

ДИНАМІЧНІ НАПРУЖЕННЯ У СКЛАДЕНОМУ ТІЛІ З КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА КОВЗНОГО КОНТАКТУ ЙОГО КОМПОНЕНТ

Розглянуто тривимірну задачу про гармонічне навантаження кругової тріщини у пружному композиті із двох різнорідних півпросторів за ковзного контакту на поверхні їх зчеплення. Дефект розміщений в одному з півпросторів перпендикулярно до поверхні поділу матеріалів. За допомогою подань розв'язків у вигляді потенціалів Гельмгольца задачу зведено до граничного інтегрального рівняння відносно функції динамічного розкриття дефекту. Шляхом числового розв'язання рівняння отримано почастотні залежності коефіцієнта інтенсивності напружень відриву в околі тріщини для різних співвідношень між пружними модулями складових композиту і глибини залягання дефекту відносно міжфазної поверхні.

Дослідження пружних хвильових полів в околі тріщин необхідне для з'ясування механізмів руйнування тіл в умовах динамічних навантажень. Так, розгляд лінійних [2, 4, 5, 8, 12] і більш загальних нелінійних [6, 7] задач про тріщини в однорідних середовищах показує, що зумовлена дефектом концентрація динамічних напружень може суттєво відрізнитися від квазістатичної. Врахування тріщин у композитному тілі ускладнюється їх динамічною взаємодією з поверхнями поділу матеріалів, особливо у випадках близького розташування. Для кусково-однорідного тіла такі інерційні ефекти вивчалися у припущенні жорсткого зчеплення його компонент [1, 9–11]. У пропонованій роботі проаналізовано випадок проковзування на поверхні контакту різнорідних пружних півпросторів, один з яких містить гармонічно навантажену підповерхневу тріщину. Для числового розв'язання задачі використано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР).

Розглянемо пружний композит, утворений двома ізотропними півпросторами A , $x_1 \geq 0$, і B , $x_1 \leq 0$, на межі S_0 розділу яких виконуються умови неідеального механічного контакту, а саме: відсутності дотичних напружень. Нехай ρ_A , G_A , ν_A і ρ_B , G_B , ν_B – густини, модулі зсуву і коефіцієнти Пуассона матеріалів відповідних півпросторів. Півпростір B містить тріщину, яка розташована перпендикулярно до границі S_0 у площині $x_3 = 0$ і займає кругову область S радіуса a (рис. 1). На протилежні поверхні S^\pm тріщини діють гармонічні за часом t з циклічною частотою ω нормальні зусилля

$$N_3^+(\mathbf{x}, t) = -N_3^-(\mathbf{x}, t) = N(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \quad \mathbf{x} \in S,$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; $N(\mathbf{x})$ – амплітуда прикладених зусиль; $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ – радіус-вектор точки тіла.

Внаслідок гармонічного характеру зовнішнього навантаження всі параметри хвильового поля у розглянутому тілі мають аналогічну часову залежність. Тоді задача про визначення напружено-деформованого стану складеного тіла з тріщиною зводиться до розв'язання диференціальних рівнянь Ляме відносно амплітудних значень векторів переміщень \mathbf{u}^D ($D = A, B$) у відповідних півпросторах

$$\omega_{1D}^{-2} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}^D) - \omega_{2D}^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^D) + \mathbf{u}^D = 0, \quad D = A, B, \quad (1)$$

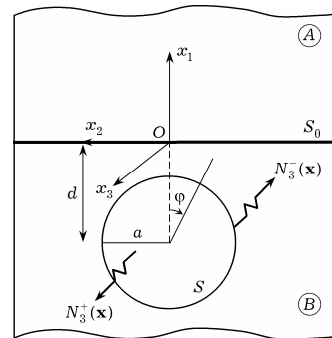


Рис. 1

з крайовими умовами ковзного контакту на поверхні S_0 розмежування півпросторів

$$\begin{aligned} u_1^A(\mathbf{x}) &= u_1^B(\mathbf{x}), & \sigma_{11}^A(\mathbf{x}) &= \sigma_{11}^B(\mathbf{x}), \\ \sigma_{j1}^D(\mathbf{x}) &= 0, & j &= 2, 3, & D &= A, B, & \mathbf{x} &\in S_0, \end{aligned} \quad (2)$$

і крайовими умовами на місці розташування тріщини

$$\sigma_{33}^B(\mathbf{x}) = -N(\mathbf{x}), \quad \sigma_{j3}^B(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (3)$$

У співвідношеннях (1)–(3) ∇ – тривимірний набла-оператор; u_j^D , σ_{ij}^D , $i, j = 1, 2, 3$, – компоненти переміщень і напружень у півпросторі D ; $\omega_{jD} = \omega/c_{jD}$, $j = 1, 2$, – хвильові числа, c_{1D} і c_{2D} – швидкості поширення у півпросторі D відповідно поздовжньої і поперечної пружних хвиль.

Суперпозиційне походження переміщень \mathbf{u}^D ($D = A, B$) виражається формулами

$$\mathbf{u}^A = \nabla\varphi^A + \nabla \times \boldsymbol{\psi}^A, \quad \mathbf{u}^B = \nabla\varphi^B + \nabla \times \boldsymbol{\psi}^B + \mathbf{u}_*^B, \quad (4)$$

де векторний член \mathbf{u}_*^B характеризує переміщення від динамічного розкриття тріщини; скалярний φ^D і векторний $\boldsymbol{\psi}^D (\psi_1^D, \psi_2^D, 0)$ потенціали відображають вклад у хвильову картину відбитих (з індексом B) і заломлених (з індексом A) на поверхні S_0 хвиль і задовольняють рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2\varphi^D + \omega_{1D}^2\varphi^D = 0, \quad \nabla^2\psi_j^D + \omega_{2D}^2\psi_j^D = 0, \quad D = A, B, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

Усі доданки у співвідношеннях (4) повинні задовольняти також умови випромінювання на безмежності [3].

Функції φ^D , ψ_1^D , ψ_2^D , як розв'язки рівнянь (5), подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi^D &= \frac{2}{\omega_{2D}^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\omega_{2D}^2}{2} \right) P_{11}^D - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial P_{21}^D}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{31}^D}{\partial x_3} \right) \right], \\ \psi_j^D &= (-1)^{j+1} \frac{2}{\omega_{2D}^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_{(4-j)}} \left(\frac{\partial P_{22}^D}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{32}^D}{\partial x_3} \right) + \frac{\omega_{2D}^2}{2} P_{(4-j)2}^D + \frac{\partial^2 P_{12}^D}{\partial x_{(4-j)} \partial x_1} \right], \\ & \quad j = 1, 2, \quad D = A, B. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут P_{jn}^D – потенціали Гельмгольца у формі

$$\begin{aligned} P_{jn}^D(\mathbf{x}) &= \iint_{S_0} \alpha_j^D(\boldsymbol{\xi}) \Phi_n^D(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}, \\ \Phi_n^D(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{\exp(i\omega_{nD}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2, \quad D = A, B, \end{aligned} \quad (7)$$

з густинами α_j^D , які характеризують переміщення точок поверхні S_0 півпростору D у напрямку відповідних осей; $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ – відстань між точкою поля $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ і точкою інтегрування $\boldsymbol{\xi}(0, \xi_2, \xi_3)$.

З огляду на симетрію задачі розкриття тріщини описуємо розривом лише нормальних переміщень її протилежних поверхонь, введеним як

$$\begin{aligned} \Delta u^B(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} [u_3^{B-}(\mathbf{x}) - u_3^{B+}(\mathbf{x})], \\ u_3^{B\pm}(\mathbf{x}) &= \lim_{x_3 \rightarrow \pm 0} u_3^B(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \end{aligned}$$

З метою забезпечення цього розриву запишемо компоненти переміщення \mathbf{u}_*^B у співвідношеннях (4) таким чином [12]:

$$u_{j*}^B(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^2 \iint_S \Delta u^B(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{F}_{jn}^x[\Phi_n^B(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] dS_{\boldsymbol{\xi}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

де диференціальні оператори \mathbf{F}_{jn}^x мають вигляд (δ_{ij} – символ Кронекера):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{jn}^x = & (-1)^{n+1} \frac{2}{\omega_{2B}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\omega_{2B}^2}{2} \right) \left(\delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \delta_{j2} \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - \\ & - \delta_{n2} \left(\delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x_2} - \delta_{j2} \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \quad j = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2. \end{aligned}$$

Зведення крайової задачі (1)–(3) до граничного інтегрального рівняння відносно функції динамічного розкриття тріщини здійснювали в два етапи. На першому за допомогою подань (4), (6), (8) і закону Гука визначали напруження на поверхні S_0 розділу півпросторів. Після задоволення крайових умов (2) з наступним застосуванням двовимірного інтегрального Фур'є-перетворення за змінними x_2, x_3 отримали систему 6-ти лінійних алгебраїчних рівнянь відносно Фур'є-трансформант функцій $\alpha_j^D, j = 1, 2, 3, D = A, B$. Шляхом розв'язання цієї системи і застосування для переходу до оригіналів теореми про згортку отримано інтегральні подання функцій $\alpha_j^D, j = 1, 2, 3, D = A, B$, через функцію Δu^B стрибка нормальних переміщень протилежних поверхонь тріщини. Зокрема,

$$\begin{aligned} \alpha_j^B(\mathbf{x}) = & \frac{\omega_{2B}^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^2 \iint_S \Delta u^B(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \iint_{S_0} \mathbf{B}_{kn}^{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) [\Phi_n^B(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})] \int_0^{\infty} \frac{\tau}{F_{\text{Rel}}^B(\tau) F_{\text{St}}(\tau)} \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{A}_{jk}^{\boldsymbol{\eta}, \tau} [J_0(\tau |\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|)] d\tau dS_{\boldsymbol{\eta}} \right\} dS_{\boldsymbol{\xi}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (9) \end{aligned}$$

де $J_0(r)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{1n}^{\boldsymbol{\eta}} &= (-1)^{n+1} \frac{2}{\omega_{2B}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} + (1 + \delta_{n2}) \frac{\omega_{2B}^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta_1}, \\ \mathbf{B}_{2n}^{\boldsymbol{\eta}} &= (-1)^n \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} + (1 + \delta_{n2}) \frac{\omega_{2B}^2}{2} \right) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} - \delta_{1n} \omega_{1B}^2 \frac{v_B}{1 - 2v_B} \right\}, \\ \mathbf{B}_{3n}^{\boldsymbol{\eta}} &= (-1)^n \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} + (1 + \delta_{n2}) \frac{\omega_{2B}^2}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}, \\ \mathbf{B}_{4n}^{\boldsymbol{\eta}} &= (-1)^n \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} + \frac{\omega_{2B}^2}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_3}, \quad n = 1, 2, \\ \mathbf{A}_{11}^{\boldsymbol{\eta}, \tau} &= \mathbf{A}_{12}^{\boldsymbol{\eta}, \tau} = \mathbf{A}_{21}^{\boldsymbol{\eta}, \tau} = \mathbf{A}_{22}^{\boldsymbol{\eta}, \tau} = 0, \\ \mathbf{A}_{13}^{\boldsymbol{\eta}, \tau} &= \frac{F_{\text{St}}(\tau)}{T_{2B}(\tau)} \left\{ 4F_{\text{Rel}}^B(\tau) + [4\tau^2 - 3\omega_{2B}^2 - 4T_{1B}(\tau)T_{2B}(\tau)] \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} \right\}, \\ \mathbf{A}_{14}^{\boldsymbol{\eta}, \tau} &= \mathbf{A}_{23}^{\boldsymbol{\eta}, \tau} = \frac{F_{\text{St}}(\tau)}{4T_{2B}(\tau)} [4\tau^2 - 3\omega_{2B}^2 - 4T_{1B}(\tau)T_{2B}(\tau)] \frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \partial \eta_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{24}^{\eta, \tau} &= \frac{F_{St}(\tau)}{T_{2B}(\tau)} \left\{ 4F_{Rel}^B(\tau) + [4\tau^2 - 3\omega_{2B}^2 - 4T_{1B}(\tau)T_{2B}(\tau)] \frac{\partial^2}{\partial \eta_3^2} \right\}, \\
\mathbf{A}_{31}^{\eta, \tau} &= \omega_{2B}^2 T_{1B}(\tau) F_{Rel}^A(\tau) F_{Rel}^B(\tau), & \mathbf{A}_{32}^{\eta, \tau} &= -G\omega_{2A}^2 T_{1A}(\tau) T_{1B}(\tau) F_{Rel}^B(\tau), \\
\mathbf{A}_{33}^{\eta, \tau} &= -T_{1B}(\tau) F_{Rel}^A(\tau) [(2\tau^2 - \omega_{2B}^2) - 2T_{1B}(\tau)T_{2B}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \eta_2}, \\
\mathbf{A}_{34}^{\eta, \tau} &= -T_{1B}(\tau) F_{Rel}^A(\tau) [(2\tau^2 - \omega_{2B}^2) - 2T_{1B}(\tau)T_{2B}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \eta_3}, \\
T_{jD}(\tau) &= \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \omega_{jD}^2}, & \tau \geq \omega_{jD}, \\ -i\sqrt{\omega_{jD}^2 - \tau^2}, & \tau \leq \omega_{jD}, \end{cases} & j = 1, 2, & G = \frac{G_B}{G_A},
\end{aligned}$$

$F_{Rel}^D(\tau) = (\tau^2 - \omega_{2D}^2/2)^2 - \tau^2 T_{1D}(\tau) T_{2D}(\tau)$ – функція Релея для півпростору D ,
 $F_{St}(\tau) = \omega_{2B}^2 T_{1B}(\tau) F_{Rel}^A(\tau) + G\omega_{2A}^2 T_{1A}(\tau) F_{Rel}^B(\tau)$ – аналог функції Стоунлі для бі-матеріалу [3]. Поява функцій Релея і Стоунлі зумовлена виконанням крайових умов на поверхні поділу матеріалів і свідчить про поширення в композиті з певними комбінаціями пружних модулів поверхневих пружних хвиль відповідних мод.

На другому етапі, підставивши співвідношення (9) в (7) та використавши формули (4), (6), (8), визначаємо напруження на місці розташування тріщини і задовольняємо крайові умови (3). Таким чином, отримано ГПР задачі відносно функції Δu^B у вигляді

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^2 \iint_S \Delta u^B(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{\Lambda}_n^x [\Phi_n^B(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] dS_{\boldsymbol{\xi}} - \sum_{n=1}^2 \iint_S \Delta u^B(\boldsymbol{\xi}) \bar{\mathbf{\Lambda}}_n^x [\Phi_n^B(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi})] dS_{\boldsymbol{\xi}} - \\
& - 2 \sum_{n, \ell=1}^2 \iint_S \Delta u^B(\boldsymbol{\xi}) \int_0^{\infty} \frac{\tau}{F_{St}(\tau)} M_{n\ell}(x_1, \xi_1, \tau) \times \\
& \times \mathbf{P}_n^x \mathbf{P}_{\ell}^x \left[J_0 \left(\tau \sqrt{(x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2} \right) \right] \Big|_{x_3=0} d\tau dS_{\boldsymbol{\xi}} = \\
& = \frac{\omega_{2B}^2}{4G_B} N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \tag{10}
\end{aligned}$$

Тут $\bar{\mathbf{x}}$ – симетричне відображення точки \mathbf{x} у півпростір A , тобто $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(-x_1, x_2)$, оператори $\mathbf{\Lambda}_n^x$, $\bar{\mathbf{\Lambda}}_n^x$, \mathbf{P}_n^x і ядра $M_{n\ell}$ мають таку структуру:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda}_1^x &= \bar{\mathbf{\Lambda}}_1^x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\omega_{2B}^2}{2} \right)^2, \\
\mathbf{\Lambda}_2^x &= -\bar{\mathbf{\Lambda}}_2^x = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \omega_{2B}^2 \right), \\
\mathbf{P}_1^x &= \frac{\nu_B \omega_{1B}^2}{1 - 2\nu_B} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, & \mathbf{P}_2^x &= \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \\
M_{11}(x_1, \xi_1, \tau) &= [G\omega_{2A}^2 \tau^2 T_{1A}(\tau) T_{1B}(\tau) - \omega_{2B}^2 F_{Rel}^A(\tau)] \exp[(x_1 + \xi_1) T_{1B}(\tau)], \\
M_{22}(x_1, \xi_1, \tau) &= G\omega_{2A}^2 T_{1A}(\tau) T_{1B}(\tau) T_{2B}^2(\tau) \exp[(x_1 + \xi_1) T_{2B}(\tau)],
\end{aligned}$$

$$M_{n\ell}(x_1, \xi_1, \tau) = -G\omega_{2A}^2 T_{1A}(\tau) T_{1B}(\tau) (\tau^2 - \omega_{2B}^2/2) \exp[x_1 T_{nB}(\tau) + \xi_1 T_{\ell B}(\tau)],$$

$$n, \ell = 1, 2, \quad n \neq \ell.$$

Після проведення операцій диференціювання рівняння (10) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \iint_S \Delta u^B(\boldsymbol{\xi}) \left[L(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) - \bar{L}(|\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\xi}|) - \right. \\ \left. - 2 \sum_{n,\ell=1}^2 \int_0^\infty \frac{\tau}{F_{St}(\tau)} M_{n\ell}(x_1, \xi_1, \tau) \Omega_{n\ell}(|x_2 - \xi_2|, \tau) d\tau \right] dS_{\boldsymbol{\xi}} = \\ = \frac{\omega_{2B}^2}{4G_B} N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$L(r) = \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} V_n(r) \frac{\exp(i\omega_{nB}r)}{r^5}, \quad \bar{L}(r) = \sum_{n=1}^2 V_n(r) \frac{\exp(i\omega_{nB}r)}{r^5},$$

$$\begin{aligned} V_n(r) = 9 - 9i\omega_{nB}r - (5\omega_{2B}^2 - \omega_{nB}^2)r^2 + \\ + i\omega_{nB}(2\omega_{nB}^2 - \omega_{2B}^2)r^3 + \delta_{1n}(2\omega_{1B}^2 - \omega_{2B}^2)^2 \frac{r^4}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{n\ell}(r, \tau) = \delta_{1n}(r, \tau)\delta_{1\ell}\Omega_0(r, \tau) + (2\delta_{1n}\delta_{1\ell} + \delta_{1n}\delta_{2\ell} + \\ + \delta_{2n}\delta_{1\ell})\Omega_1(r, \tau) + 3\Omega_2(r, \tau), \quad n, \ell = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\Omega_k(r, \tau) = [\nu_B \omega_{2B}^2 / 2(1 - \nu_B)]^{2-k} (\tau/r)^k J_k(\tau r), \quad k = 0, 1, 2.$$

Ядро L рівняння має такий самий вигляд, як і для випадку безмежного однорідного тіла з тріщиною [12], решта ядер, зокрема ядро з півбезмежним інтегралом, є регулярними і описують взаємодію тріщини з поверхнею S_0 поділу матеріалів. У випадку $\rho_A = 0$, $G_A = 0$ ГІР (11) вироджується в рівняння задачі про пружний півпростір з гармонічно навантаженою внутрішньою тріщиною за відсутності зусиль на його поверхні [13].

Ядро L ГІР містить особливість порядку $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-3}$. В цьому неважко переконатися, розвинувши ядро в ряд відносно відстані $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$. Спрямувавши $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{x}$, отримуємо

$$\begin{aligned} L(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} + \frac{C\omega_{2B}^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} + O(1), \\ C = \frac{7 - 12\nu_B + 8\nu_B^2}{8(1 - \nu_B)}. \end{aligned}$$

Наявність такого порядку особливості вказує на те, що ГІР (11) є гіперсингулярним. Його розв'язок існує в класі функцій, які перетворюються у нуль на контурі області інтегрування, що відповідає умові відсутності стрибка переміщень на контурі тріщини. Тому функцію розкриття дефекту $\Delta u^B(\boldsymbol{\xi})$ подаємо у вигляді

$$\Delta u^B(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{a^2 - (\xi_1 + d)^2 - \xi_2^2} f(\boldsymbol{\xi}), \quad (12)$$

де $f(\boldsymbol{\xi})$ – нова невідома неперервно диференційовна в області S функція; d – відстань від центру тріщини до поверхні S_0 (рис. 1).

Використавши співвідношення (12) і результати роботи [12], запишемо регуляризоване подання характеристичної частини рівняння (11) так:

$$\begin{aligned} \iint_S \Delta u^B(\boldsymbol{\xi}) L(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_{\boldsymbol{\xi}} &= \sum_{\ell=0}^2 \frac{1}{\ell!} \sum_{k=0}^{2-\ell} \frac{1}{k!} [I_{\ell k}^3(\mathbf{x}) - I_{\ell k}^{3\varepsilon}(\mathbf{x})] \frac{\partial^{\ell+k} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^\ell \partial x_2^k} + \\ &+ C\omega_{2B}^2 [I_{00}^1(\mathbf{x}) - I_{00}^{1\varepsilon}(\mathbf{x})] f(\mathbf{x}) + \\ &+ \iint_{S^\varepsilon} \sqrt{a^2 - (\xi_1 + d)^2 - \xi_2^2} f(\boldsymbol{\xi}) L(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут інтеграли

$$I_{\ell k}^n(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{(\xi_1 - x_1)^\ell (\xi_2 - x_2)^k}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^n} \sqrt{a^2 - (\xi_1 + d)^2 - \xi_2^2} dS_{\boldsymbol{\xi}}$$

існують в сенсі головного значення і обчислюються аналітично шляхом інтегрування за частинами. Інтеграли $I_{\ell k}^{n\varepsilon}(\mathbf{x})$ відрізняються від інтегралів $I_{\ell k}^n(\mathbf{x})$ областю інтегрування S^ε , отриманою з області S вилученням малого околу точки \mathbf{x} . Ці інтеграли визначали чисельно.

Підставивши вираз (13) в ГІР (11), отримуємо його регулярний аналог зручній для гранично-інтегральної алгоритмізації формі. Дискретизація рівняння ґрунтується на введенні в області S сітки радіально-кутових елементів і колокаційному задоволенні його у вузлових точках посередині вказаних граничних елементів. При цьому використовується кусково-стала апроксимація розв'язку, скінченнорізницевої схеми обчислення похідних у формулі (13) за значеннями шуканої функції на сусідніх елементах, а також заміна півбезмежного інтегралу в регулярному ядрі ГІР скінченим з достатньо великою верхньою межею з огляду на спадання підінтегральної функції, коли $\tau \rightarrow \infty$. Таким чином, задачу зведено до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень функції $f(\boldsymbol{\xi})$.

За допомогою функції $f(\mathbf{x})$ визначали коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) нормального відриву в околі контуру тріщини за формулою

$$K_I(\varphi) = - \frac{2G_B \pi \sqrt{\pi a}}{1 - \nu_B} f(\mathbf{x}) \Big|_{\substack{x_1 = -d + a \cos \varphi, \\ x_2 = -a \sin \varphi}},$$

де φ – кутова координата точки контуру тріщини (рис. 1).

Розрахунки виконано для випадку навантаження поверхонь тріщини гармонічними зусиллями з постійною амплітудою $N(\mathbf{x}) = N_0 = \text{const}$. При обчисленнях приймали $\nu_A = \nu_B = 0.3$, $\rho_A = \rho_B$, амплітуду КІН нормували за допомогою статичного КІН відриву $K_I^s = 2N_0 \sqrt{a/\pi}$ для тріщини у безмежному однорідному тілі, тобто $K_I^* = |K_I|/K_I^s$. Амплітуду КІН K_I^* (рис. 2) у залежності від нормалізованого хвильового числа $\omega_{2B}a$ для відстані $d = 1.15a$, а також пікові значення $K_I^{*\max} = \max K_I^* \Big|_{0 < \omega_{2B}a < 2}$ (рис. 3) у залежності від відносної відстані залягання дефекту d/a аналізували у найближчій до поверхні поділу матеріалів точці контуру тріщини $\varphi = 0^\circ$, де ефекти впливу цієї поверхні на дефект найбільш відчутні. Криві 1–4 відповідають співвідношенням модулів зсуву матеріалів $G = 0.1, 0.5, 2.0, 10.0$. Для порівняння на рисунках наведено також результати для випадку гармонічно навантаженої тріщини в однорідному пружному просторі [12] (марковані квадратами криві) і півпросторі [13] (марковані трикутниками криві).

Слід зазначити, що для малих «перемичок» між тріщиною і поверхнею поділу матеріалів регулярні ядра ГІР збігаються слабо. Тому числовий аналіз проводили для відстаней $d \geq 1.15a$, при яких вказані ядра вдалося підсумувати з контрольованою точністю. Погіршення збіжності цих ядер притаманне також, коли зменшується контраст між пружними модулями складових півпросторів (при $G \rightarrow 1$), через появу дійсного кореня функції Релея. У цьому виродженому випадку слід скористатися методикою регуляризації ядра з функцією Релея у знаменнику, описаною в [13]. Тоді ж спрощена постановка задачі досягається розглядом взаємодії двох компланарних кругових тріщин під гармонічним навантаженням в однорідному безмежному просторі, розташованих симетрично відносно поверхні S_0 , внаслідок апріорного забезпечення умов ковзного контакту на поверхні S_0 .

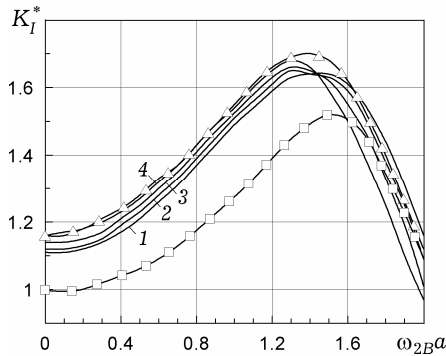


Рис. 2

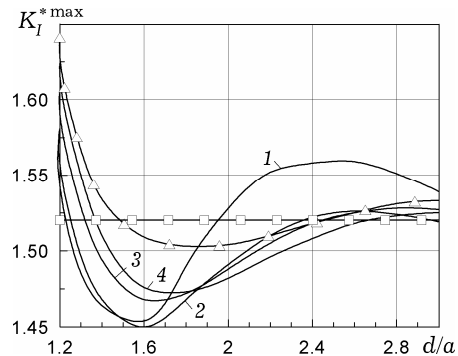


Рис. 3

У розглянутому спектрі хвильових чисел амплітуди КІН монотонно зростають від статичних значень для $\omega_{2B}a = 0$ до максимумів, а потім спадають (рис. 2). Збільшення параметра G сприяє зростанню максимальних значень K_I^* та їх наближенню знизу до аналогу, який відповідає півпростору з тріщиною. Проковзування на поверхні поділу матеріалів призводить до того, що для фіксованого параметра G максимуми амплітуд КІН більші, ніж у випадку тріщини в біматеріалі з жорстким (ідеальним) контактом компонент тіла [10]. Більш того, навіть при $G < 1.0$ (тріщина у «м'якшому» матеріалі) вони перевищують аналог для тріщини в однорідному тілі. Таким чином, спостерігається протилежна закономірність порівняно з ідеальним з'єднанням півпросторів, тобто втрачається «ефект підкріплення дефекту». Зі зростанням відстані між тріщиною і поверхнею поділу матеріалів (рис. 3) величини K_I^{*max} мають осцилюючу поведінку навколо значення, яке відповідає максимальному КІН для однорідного тіла з тріщиною, наближаючись до нього, коли $d \rightarrow \infty$. З рисунка видно, що для $d > 3a$ впливом неоднорідності тіла на тріщину для розглянутих ситуацій можна знехтувати.

Робота виконана за підтримки INTAS (проект № 05-1000008-7979).

1. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Ехлаков А. В. Математическая модель ультразвуковой диагностики трехмерной приповерхностной трещины // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, № 1. – С. 147–156.
2. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В. О трещине нормального отрыва в упругой среде под действием гармонической волны // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 2. – С. 93–100.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
4. Шифрин Е. И. Пространственные задачи линейной механики разрушения. – Москва: Физматлит, 2002. – 368 с.

5. Ariza M. P., Dominguez J. General BE approach for three-dimensional dynamic fracture analysis // Engng. Anal. with Bound. Elements. – 2002. – **26**, No. 8. – P. 639–651.
6. Guz A. N. Formulation of problems in dynamic fracture mechanics // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, No. 6. – P. 531–536.
Те саме: Гузь А. Н. О постановке задач динамической механики разрушения // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 6. – С. 3–9.
7. Guz A. N., Menshykov O. V., Zozulya V. V., Guz I. A. Contact problem for the flat elliptical crack under normally incident shear wave // CMES: Comp. Modeling Engng. Sci. – 2007. – **17**, No. 3. – P. 205–214.
8. Iturraran-Viveros U., Sanchez-Sesma F. J., Luzon F. Boundary element simulation of scattering of elastic waves by 3-D cracks // J. Appl. Geophys. – 2008. – **64**. – P. 70–82.
9. Lei J., Wang Y. S., Gross D. Dynamic interaction between a sub-interface crack and the interface in a bi-material: time-domain BEM analysis // Arch. Appl. Mech. – 2003. – **73**. – P. 225–240.
10. Mykhas'kiv V. V., Stepanyuk O. I. Boundary integral analysis of the symmetric dynamic problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack // Meccanica. – 2001. – **36**, No. 4. – P. 479–495.
11. Sih G. C., Chen E. P. Axisymmetric elastodynamic response from normal and radial impact of layered composites with embedded penny-shaped crack // Int. J. Solid. Struct. – 1980. – **16**. – P. 1093–1107.
12. Sladek J., Sladek V., Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z. Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3D dynamic crack problem // Engng. Anal. with Bound. Elements. – 2003. – **27**, No. 3. – P. 203–213.
13. Zhang Ch., Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z. Time-harmonic analysis of a planar crack in an elastic half-space by BEM // Comput. Fluid and Solid Mech.: Collection of Papers. – Amsterdam: Elsevier, 2005. – P. 557–560.

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СОСТАВНОМ ТЕЛЕ С КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ КОНТАКТЕ ЕГО КОМПОНЕНТ

Решена трехмерная задача гармонического нагружения круговой трещины в упругом композите из двух разнородных полупространств со скользящим контактом на поверхности их сцепления. Дефект расположен в одном из полупространств перпендикулярно к межфазной поверхности. С помощью представлений решений в виде потенциалов Гельмгольца задача сведена к граничному интегральному уравнению относительно функции динамического раскрытия дефекта. Посредством численного решения уравнения получены частотные зависимости коэффициента интенсивности напряжений отрыва в окрестности трещины для различных соотношений между упругими модулями составляющих композита и глубин залегания дефекта относительно межфазной поверхности.

DYNAMIC STRESSES IN COMPOSITE SOLID WITH PENNY-SHAPED CRACK UNDER SLIDING CONTACT OF ITS COMPONENTS

A three-dimensional problem on time-harmonic loading of a penny-shaped crack in elastic composite consisting of two heterogeneous half-spaces, when sliding takes place on the interface, is solved. The defect is situated in one of the half-spaces perpendicularly to the interface. By the integral representations of solutions in the form of Helmholtz potentials the problem is reduced to the boundary integral equation relative to the crack opening displacement. By numerical solution of the equation the frequency dependencies of mode-I stress intensity factor in the crack vicinity are obtained for different relations between the elastic modulus of the solid constituents and depths of crack location relative to the interface.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Львів. фак-т Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. транспорту, Львів,

³ Кубанськ. держ. ун-т, Краснодар, Росія

Одержано
28.10.09