

**ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН БІМАТЕРІАЛУ ІЗ ЗАКРИТОЮ МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З ШОРСТКИМИ ПОВЕРХНЯМИ**

*Сформульовано задачу термопружності для біматеріалу, компоненти якого відрізняються лише модулями зсуву, із закритою міжфазною тріщиною з шорсткими поверхнями за дії стискальних навантажень і теплового потоку, нормальних до міжфазної поверхні. Враховано залежність термічної провідності дефекту від контактного тиску його берегів і теплопровідності середовища, що його заповнює. Задачу зведено до нелінійного сингулярного інтегро-диференціального рівняння типу Прандтля відносно стрибка температури між поверхнями тріщини. Побудовано аналітичний розв'язок задачі у випадку дії лише теплового навантаження. Проаналізовано залежності контактного тиску берегів дефекту, стрибка температури між ними та коефіцієнта інтенсивності дотичних міжфазних напружень від величини задавого теплового потоку, шорсткості поверхонь і співвідношення між модулями зсуву з'єднаних матеріалів.*

**Вступ.** Для поверхонь внутрішніх дефектів (тріщин) у реальних матеріалах характерна шорсткість [17, 22] і наявність тонких граничних шарів [19], які утворюються внаслідок різних фізико-механічних і хімічних процесів та взаємодії з середовищем, що заповнює дефекти. Мікроструктура внутрішніх поверхонь особливо істотно впливає на механічну поведінку матеріалів, якщо тріщини закриваються під дією зовнішніх навантажень. Тоді мікронерівності зумовлюють дискретність контакту поверхонь, фактична площа якого залежить від контактного тиску і змінюється зі зміною навантаження [12]. Це спонукало до проведення теоретичних й експериментальних досліджень впливу поверхневої структури дефектів, що закриваються, на напружений стан і міцність тіл при механічних навантаженнях [1, 14, 18, 20, 21].

Термічні деформації в композитних матеріалах із міжфазними тріщинами теж можуть викликати контакт їхніх берегів [11, 16]. У цьому випадку необхідно враховувати вплив мікроструктури берегів на термічну провідність дефектів (або на обернену до неї величину – термічний опір) [10].

Вплив контактного термічного опору поверхонь закритої міжфазної тріщини на термонапружений стан біматеріалу вивчено в праці [4]. Досліджено зумовлені термоопором міжфазної тріщини контактні явища часткового термічного розкриття початково закритої тріщини та часткового закриття початково розкритої тріщини [7, 8], які спостерігаються за певних співвідношень між тепловими і механічними навантаженнями та фізичними характеристиками компонент біматеріалу.

У праці [6] контактні задачі термопружності для міжфазних закритих тріщин з шорсткими поверхнями, термічна провідність яких залежить від теплопровідності середовища в тріщині та контактного тиску її берегів, зведено до нелінійного сингулярного інтегро-диференціального рівняння типу Прандтля відносно функції стрибка температури між поверхнями дефекту. Аналітично-числовий розв'язок такої задачі побудовано для біматеріалу, складові якого мають різні термічні характеристики та однакові механічні [3]. Вивчено термомеханічну поведінку однорідного тіла із тріщиною з шорсткими поверхнями, що закривається під дією зосереджених сил [5]. У працях [13, 15] методом граничних елементів досліджено термонапружений стан кусково-однорідного тіла з частково закритою тріщиною, термоопір якої на ділянці контакту залежить від тиску берегів, а на розкритій частині береги термоізовані. Розв'язано [9] нелінійну задачу термопружності для тіла з розкритою тріщиною, що заповнена теплопровідним середовищем, з урахуванням обернено пропорційної залежності провідності тріщини від її розкриття, зумовленого тепловим і силовим навантаженням.

У пропонуваній статті на основі розвинутої у праці [6] методики побудовано аналітичний розв'язок нелінійної контактної задачі термопружності для закритої міжфазної тріщини, термічна провідність якої пропорційна контактному тиску її берегів, у випадку біматеріалу, компоненти якого відрізняються модулями зсуву.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо кусково-однорідний простір, що складається із двох однорідних ізотропних півпросторів, матеріали яких відрізняються модулями зсуву ( $G_1 \neq G_2$ ) і мають однакові коефіцієнти лінійного теплового розширення ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ), коефіцієнти теплопровідності ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ) і коефіцієнти Пуассона ( $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ). На поверхні розмежування матеріалів уздовж нескінченної смуги ширини  $2a$  розміщена міжфазна тріщина. Вважаємо, що в тілі реалізується двовимірне стаціонарне температурне поле та плоска деформація. Тому розглядатимемо кусково-однорідну площину, яка складається із двох півплощин  $D_1$  і  $D_2$ , утворених внаслідок перетину верхнього і нижнього півпросторів довільною площиною, паралельною площині деформації. Декартову систему координат  $xOy$  розташуємо так, щоб вісь  $Ox$  лежала на лінії розмежування, а її початок суміщався із серединою тріщини (рис. 1а).

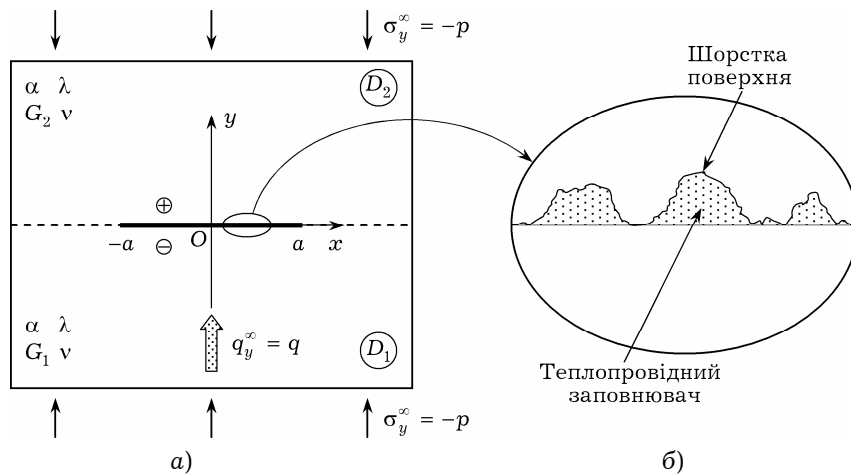


Рис. 1

На нескінченності прикладено перпендикулярні до лінії розмежування рівномірно розподілені стискувальні зусилля інтенсивності  $p$  та однорідний тепловий потік інтенсивності  $q$  (рис. 1а). Окрім того, у півплощинах  $D_1$  і  $D_2$  на безмежності вздовж осі  $Ox$  діють нормальні напруження  $\sigma_{x1}^{\infty}(y)$  і  $\sigma_{x2}^{\infty}(y)$ , які компенсують загальне видовження границь півплощин, спричинене тиском  $p$ , і їх викривлення, зумовлене тепловим потоком  $q$ .

Стискувальні зусилля зумовлюють закриття тріщини. Вважаємо, що механічний контакт поверхонь тріщини є безфрикційним, а тепловий – недосконалим внаслідок їх шорсткості і дискретності контакту (рис. 1б). Відповідно до теорії контактного теплообміну шорстких поверхонь [10] на макрорівні термічну провідність тріщини  $\lambda_n(x)$  описуватимемо функцією

$$\lambda_n(x) = \lambda_c + KP(x). \quad (1)$$

Перший доданок правої частини формули (1) враховує провідність середовища в тріщині, другий доданок визначає теплопередачу через ділянки контакту вершин мікронерівностей і описує зростання провідності при зростанні контактного тиску  $P(x)$  поверхонь тріщини. Коефіцієнт  $K > 0$  залежить від шорсткості поверхні [10] – що більша шорсткість, то менший  $K$ .

Зовні тріщини відбувається ідеальний тепловий і механічний контакт півплощин.

Запишемо граничні умови сформульованої задачі теплопровідності та термопружності:

- на ділянках ідеального контакту півплощин ( $y = 0, |x| \geq a$ )

$$T^+ = T^-, \quad q_y^+ = q_y^-, \quad \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-; \quad (2)$$

- на лінії тріщини ( $y = 0, |x| < a$ )

$$q_y^+ = q_y^-, \quad \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad v^+ = v^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad (3)$$

$$\lambda_n(x)(T^- - T^+) = q_y^+, \quad \tau_{xy}^+ = 0; \quad (4)$$

- на нескінченності в кожній із півплощин  $D_k, k = 1, 2,$

$$q_x = 0, \quad q_y = q, \quad \sigma_x = \sigma_{xk}^\infty, \quad \sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (5)$$

Тут  $T$  – температура;  $q_x = -\lambda \partial t / \partial x, q_y = -\lambda \partial t / \partial y$  – компоненти вектора теплового потоку;  $u, v$  – компоненти вектора переміщень;  $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень; індексами «-», «+» позначено граничні значення функції на міжфазній лінії ( $y = 0$ ) у нижній  $D_2$  і верхній  $D_1$  півплощинах.

**2. Метод розв'язування задачі.** Температуру, теплові потоки, переміщення і напруження у верхній і нижній півплощинах  $D_1$  і  $D_2$  подамо, використовуючи комплексні потенціали, через стрибки температури  $\gamma(x) = T^-(x) - T^+(x)$  і дотичних переміщень  $U(x) = u^-(x) - u^+(x)$  берегів тріщини [4, 6]:

$$T = \operatorname{Re} [F(z) + iqz/\lambda], \quad q_x - iq_y = -\lambda F'(z) - iq,$$

$$2G_k(u' + iv') = \alpha \Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} + 2\alpha(1 + \nu)G_k F(z),$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} - p,$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} [\Phi_k(z)] + \sigma_{xk}^\infty(y) - p, \quad z \in D_k, \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) = \frac{(-1)^k G_1 G_2}{G_{*k}} \left[ 2\alpha(1 + \nu)F(z) + \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{U'(t) dt}{t - z} \right],$$

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\gamma(t) dt}{t - z}, \quad z \in D_k, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

Тут  $z = x + iy$ ;  $\alpha = 3 - 4\nu$ ;  $G_{*1} = G_1 + \alpha G_2$ ;  $G_{*2} = G_2 + \alpha G_1, k = 1, 2.$

Подання (6), (7) задовольняють усі граничні умови задачі, за винятком умов (4).

Задовольняючи тепер з урахуванням залежностей (6), (7) умови контакту (4), одержимо систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь для визначення функцій стрибків:

$$[\lambda_c + KP(x)]\gamma(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t - x} = q, \quad |x| \leq a, \quad (8)$$

$$\int_{-a}^a \frac{U'(t) dt}{t - x} - \alpha(1 + \nu) \int_{-a}^a \frac{\gamma(t) dt}{t - x} = 0, \quad |x| \leq a. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{Шукані функції повинні задовольняти на кінцях тріщини умови} \\ \gamma(\pm a) = 0, \quad U(\pm a) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

які впливають з неперервності температури і переміщень.

З рівняння (9) і другої з умов (10) легко визначаємо похідну від стрибка переміщень через стрибок температури:

$$U'(x) = \alpha(1 + \nu) \left[ \gamma(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \gamma(t) dt \right], \quad |x| \leq a. \quad (11)$$

Із формул (6), (7), (11) випливає, що температурне поле і термонапружений стан в біматеріалі з міжфазною закритою тріщиною при розглянутому термомеханічному навантаженні цілком визначається функцією стрибка температури  $\gamma(x)$ , яка є розв'язком рівняння (8). Зокрема, нормальні і дотичні міжфазні напруження так подаються через функцію  $\gamma(x)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = -\frac{4\alpha(1 - \nu^2)(G_1 + G_2)G_1G_2 \operatorname{sgn}(x)}{G_{*1}G_{*2}\sqrt{x^2 - a^2}} \int_{-a}^a \gamma(x) dx, \\ |x| > a. \end{aligned} \quad (12)$$

Зі співвідношень (12) видно, що дотичні міжфазні напруження зовні тріщини біля її країв мають кореневу особливість, а нормальні – обмежені.

Коефіцієнти інтенсивності напружень

$$k_1^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm a} \{ \sqrt{2(\pm x - a)} \sigma_y(x, 0) \}, \quad k_2^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm a} \{ \sqrt{2(\pm x - a)} \tau_{xy}(x, 0) \},$$

за якими можна оцінювати граничну рівновагу тіл з тріщинами, з урахуванням співвідношення (12) запишемо у вигляді

$$k_1^\pm = 0, \quad k_2^\pm = \mp \frac{4\alpha(1 - \nu^2)(G_1 + G_2)G_1G_2}{G_{*1}G_{*2}\sqrt{a}} \int_{-a}^a \gamma(x) dx. \quad (13)$$

Для розв'язання рівняння (8) спочатку необхідно визначити контактний тиск берегів тріщини  $P(x) = -\sigma_y^\pm(x, 0)$ , який входить в ліву частину цього рівняння. Його знаходимо з подань (6), (7):

$$P(x) = p + \frac{2\alpha(1 + \nu)(1 - 2\nu)G_1G_2(G_1 - G_2)}{G_{*1}G_{*2}\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \gamma(x) dx, \quad |x| \leq a. \quad (14)$$

З формули (14) випливає, що у випадку нестисливих матеріалів півплощин ( $\nu = 0.5$ ) термічні деформації не впливають на контактний тиск берегів тріщини і він дорівнюватиме тиску, прикладеному до тіл на нескінченності ( $P(x) = p$ ). Аналогічний результат буде й тоді, коли модулі зсуву компонентів біматеріалу рівні ( $G_1 = G_2$ ), тобто, коли з'єднані матеріали є ідентичними. Аналіз нормальних контактних напружень берегів тріщини (14) показує, що в кінцях тріщини вони необмежені.

Враховавши в рівнянні (8) вираз (14), отримаємо для визначення функції  $\gamma(x)$  нелінійне сингулярне інтегро-диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \left[ \lambda_c + K \left( p + \frac{2\alpha(1 + \nu)(1 - 2\nu)G_1G_2(G_1 - G_2)}{G_{*1}G_{*2}\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \gamma(x) dx \right) \right] \gamma(x) - \\ - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t - x} = q, \quad |x| \leq a. \end{aligned} \quad (15)$$

**3. Аналітичний розв'язок задачі.** Проаналізуємо термомеханічну поведінку біматеріалу, підданого дії лише теплового потоку  $q$  і вільного від механічного навантаження ( $p = 0$ ) за відсутності середовища в тріщині ( $\lambda_c = 0$ ). У цьому випадку термічна провідність тріщини (1) залежить лише від контактного тиску її берегів ( $\lambda_n(x) = KP(x)$ ), який набуває вигляду

$$P(x) = \frac{2\alpha(1+\nu)(1-2\nu)G_1G_2(G_1-G_2)}{G_{*1}G_{*2}\pi\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^a \gamma(x) dx, \quad |x| \leq a. \quad (16)$$

Для того щоб тріщина не розкривалася, необхідно, щоб контактний тиск берегів був додатним:  $P(x) > 0$ . Як випливає з формули (16), ця умова виконується, якщо

$$(G_1 - G_2) \int_{-a}^a \gamma(x) dx > 0. \quad (17)$$

Оскільки знак функції стрибка температури  $\gamma(x)$  збігається зі знаком заданої на нескінченності компоненти  $q_y^\infty$  вектора теплового потоку (тобто  $\text{sgn}(\gamma(x)) = \text{sgn}(q)$ ), то нерівність (17) еквівалентна нерівності

$$q(G_1 - G_2) > 0. \quad (18)$$

Отже, за відсутності силового навантаження ( $p = 0$ ) постановка задачі про контакт берегів тріщини має сенс, якщо тепловий потік скерований від матеріалу з більшим модулем зсуву до матеріалу з меншим модулем зсуву. Тобто при виконанні умови (18) тепловий потік зумовлюватиме закриття міжфазної тріщини у випадку недосконалого теплового контакту її берегів. Зазначимо, що компонента  $q_y^\infty = q$  заданого на нескінченності вектора теплового потоку є додатною ( $q > 0$ ) у вибраній системі координат (див. рис. 1), якщо напрям потоку збігається з напрямом осі  $Oy$  (саме цей випадок зображено на рис. 1), і від'ємною ( $q < 0$ ), якщо напрям потоку протилежний. У першому випадку для виконання умов (18) необхідно, щоб матеріал нижнього тіла був жорсткішим, ніж верхнього ( $G_1 > G_2$ ), у другому випадку, навпаки, необхідно, щоб матеріал нижнього тіла був податливішим ( $G_1 < G_2$ ). Очевидно, що другий випадок зводиться до першого після заміни змінних  $x_0 = -x$ ,  $y_0 = -y$  і переходу до нової системи координат  $x_0Oy_0$ . Тому надалі, не обмежуючи загальності, для полегшення інтерпретації результатів зафіксуємо перший з цих випадків, для якого виконується нерівність (18), і будемо розглядати зображений на рис. 1 напрямок теплового потоку на нескінченності, коли  $q > 0$ , та вважатимемо, що матеріал нижнього тіла є жорсткіший, ніж верхнього:

$$G_1 > G_2. \quad (19)$$

Сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (15) у випадку відсутності силового навантаження ( $p = 0$ ) і незаповненої тріщини ( $\lambda_c = 0$ ) набуває вигляду

$$\frac{KS}{\sqrt{a^2-x^2}} \left[ \int_{-a}^a \gamma(t) dt \right] \gamma(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} = q, \quad |x| \leq a, \quad (20)$$

де  $S = \frac{\alpha(1+\nu)(1-2\nu)G_1G_2}{2\pi G_{*1}G_{*2}} (G_1 - G_2)$ .

Позначивши

$$\Gamma = \int_{-a}^a \gamma(t) dt, \quad (21)$$

рівняння (20) перепишемо так:

$$\frac{KS\Gamma}{\sqrt{a^2-x^2}} \gamma(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} = q, \quad |x| \leq a. \quad (22)$$

Вважаючи  $\Gamma$  відомою величиною, з урахуванням першої з умов (10) визначимо [2] розв'язок рівняння (22):

$$\gamma(x) = \frac{2q\sqrt{a^2 - x^2}}{\lambda + 2aKS\Gamma}, \quad |x| \leq a. \quad (23)$$

Підставивши функцію  $\gamma(x)$  (23) у формулу (21), отримаємо відносно  $\Gamma$  квадратне рівняння

$$2aKS\Gamma^2 + \lambda\Gamma - \pi qa^2 = 0, \quad (24)$$

яке має два розв'язки

$$\Gamma = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\pi a^3 KSq}}{4aKS}, \quad (25)$$

$$\Gamma = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 8\pi a^3 KSq}}{4aKS}. \quad (26)$$

Використовуючи формулу (21), бачимо, що умову (17) задовольняє лише розв'язок (25). Тому надалі відкидаємо розв'язок, який подається формулою (26).

Підставляючи (25) в (23), знаходимо функцію стрибка температури

$$\gamma(x) = \frac{4q\sqrt{a^2 - x^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\pi a^3 KSq}}, \quad |x| \leq a. \quad (27)$$

Коефіцієнт інтенсивності міжфазних дотичних напружень (13) з урахуванням виразу (27) запишемо у вигляді

$$k_2^\pm = \mp \frac{8\pi(1 - \nu^2)(G_1 + G_2)G_1 G_2 \alpha a^{3/2} q}{G_{*1} G_{*2} (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\pi a^3 KSq})}. \quad (28)$$

**4. Аналіз числових результатів.** Для проведення числового аналізу задачі перейдемо до безрозмірних величин. Введемо безрозмірний тепловий потік  $\bar{q} = q/q_0$ , стрибок температури  $\bar{\gamma} = \gamma/\gamma_0$ , контактний тиск берегів тріщини  $\bar{P} = P/(G_1 \alpha (1 + \nu) \gamma_0)$ , коефіцієнт інтенсивності міжфазних дотичних напружень  $\bar{k}_2^\pm = k_2^\pm / (G_1 \alpha (1 + \nu) \gamma_0 \sqrt{a})$ , коефіцієнт пропорційності між термічною провідністю тріщини і контактним тиском її берегів  $\bar{K} = 8a^2 K \alpha (1 + \nu) q_0 G_1 / \lambda^2$ , відносний модуль зсуву матеріалу верхньої півплощини  $\bar{G}_2 = G_2 / G_1$  і безрозмірну змінну  $\xi = x/a$ . Тут  $q_0 = 1 \text{ Вт/м}^2$  – тепловий потік одиничної густини,  $\gamma_0 = 2aq_0/\lambda$  – стрибок температури в центрі термоізоляованої тріщини ( $\lambda_n(x) = 0$ ) при тепловому потоці  $q_0$  на нескінченності.

Зазначимо, що відносний модуль зсуву  $\bar{G}_2$  матеріалу верхньої півплощини  $D_2$ , зважаючи на нерівність (19), змінюється в діапазоні

$$0 < \bar{G}_2 < 1. \quad (29)$$

Обчислення проведено для коефіцієнтів Пуассона матеріалів  $\nu = 0.25$ .

На рис. 2, 3 показано залежність розподілу стрибка температури  $\bar{\gamma}(\xi)$  і контактного тиску берегів тріщини  $\bar{P}(\xi)$  відповідно від коефіцієнта  $\bar{K}$ , який збільшується при зменшенні шорсткості поверхні тріщини. Стрибок температури досягає максимуму посередині тріщини (при  $\xi = 0$ ), а на її краях (при  $\xi = \pm 1$ ) дорівнює нулеві (рис. 2). Контактний тиск поверхонь дефекту має мінімум посередині тріщини і прямує до нескінченності при наближенні до країв тріщини (рис. 3). Бачимо, що зі зростанням шорсткості тріщини (спаданням коефіцієнта  $\bar{K}$ ) стрибок температури і тиск зростають.

Найбільші значення стрибка температури і тиску берегів досягаються при  $\bar{K} = 0$ , що відповідає термоізованій поверхні тріщини ( $\lambda_n(x) = 0$ ).

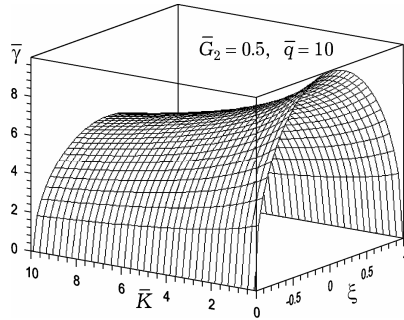


Рис. 2

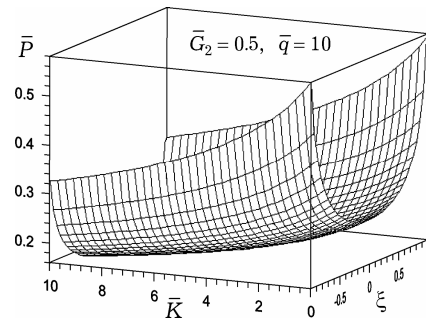


Рис. 3

Залежність розподілу стрибка температури і контактної тиску берегів від теплового потоку  $\bar{q}$  проілюстровано на рис. 4 і 5 відповідно. З них можна зробити висновки, що ці контактні характеристики нелінійно залежать від потоку і зростають з ростом  $\bar{q}$ . Зауважимо, що у випадку закритої міжфазної тріщини з ідеальним тепловим контактом берегів і у випадку тріщини в однорідному матеріалі з неідеальним тепловим контактом її поверхонь нормальний до тріщини тепловий потік не змінює контактної тиску. У випадку термоізованних розкритих тріщин стрибок температури між берегами є лінійною функцією теплового потоку, заданого на нескінченності [2].

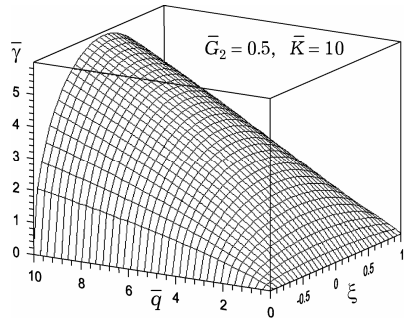


Рис. 4

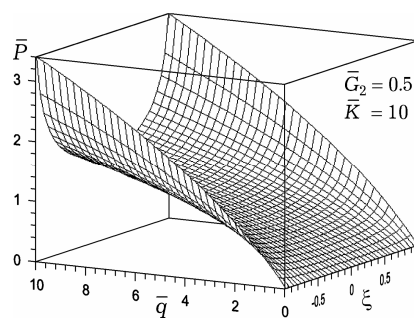


Рис. 5

На рис. 6 і 7 зображено залежності стрибка температури і контактної тиску берегів дефекту від відносної жорсткості верхнього матеріалу  $\bar{G}_2$ . При значеннях  $\bar{G}_2 = 0$  і  $\bar{G}_2 = 1$  стрибок температури досягає свого максимального значення, а тиск є мінімальним і дорівнює нулеві. Стрибок температури набуває мінімального значення при  $\bar{G}_2 \approx 0.36$ , а тиск стає максимальним при  $\bar{G}_2 \approx 0.38$ .

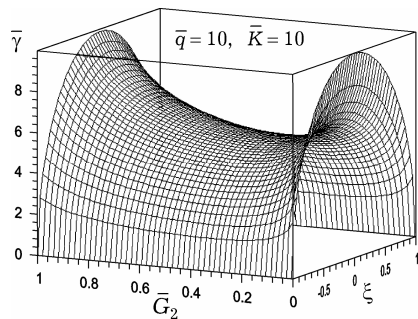


Рис. 6

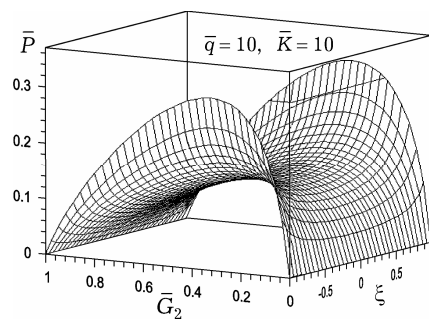


Рис. 7

Вплив теплового потоку  $\bar{q}$  на коефіцієнт інтенсивності дотичних міжфазних напружень  $\bar{k}_2^\pm$  для значень коефіцієнта  $\bar{K} = 10, 20, 30$ , які залежать від шорсткості поверхні тріщини, при  $\bar{G}_2 = 0.5$  проілюстровано на рис. 8. Бачимо, що  $|\bar{k}_2^\pm|$  нелінійно залежить від  $\bar{q}$ , зростаючи з ростом  $\bar{q}$ , і зростає зі збільшенням шорсткості (зменшенням коефіцієнта  $\bar{K}$ ).

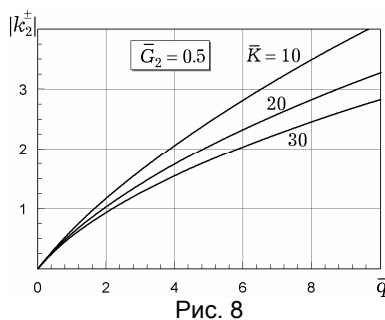


Рис. 8

1. *Андрейків А. О.* Узагальнена задача Гріффітса для зсуву з урахуванням шорсткості поверхонь тріщини // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2000. – **36**, № 2. – С. 49–54.  
Те саме: *Andreikiv A. O.* Generalized Griffith problem of shear with regard for the roughness of the crack surfaces // *Mater. Sci.* – 2000. – **36**, No. 2. – P. 210–217.
2. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
3. *Кит Г. С., Нагалка С. П., Мартыняк Р. М.* Нелинейная контактная задача термоупругости для трещины на границе раздела материалов с различными термическими свойствами // *Теорет. и прикл. механика.* – 2001. – Вып. 33. – С. 13–21.
4. *Кит Г. С., Мартыняк Р. М.* Термопружність кусково-однорідного тіла із закритою міжфазною тріщиною при наявності контактної термоопору між її берегами // *Доп. НАН України.* – 1996. – № 10. – С. 84–88.
5. *Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Нагалка С. П.* Термопружні ефекти в тілі з тріщиною, закритою зосередженими силами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1999. – **42**, № 2. – С. 101–107.
6. *Мартыняк Р. М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з контактної-поверхневими неоднорідностями і дефектами: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів, 2000. – 372 с.
7. *Мартыняк Р. М.* Термічне розкриття початково закритої міжфазної тріщини за неідеального теплового контакту її берегів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1999. – **35**, № 5. – С. 14–22.  
Те саме: *Martyniuk R. M.* Thermal opening of an initially closed interface crack under conditions of imperfect thermal contact between its lips // *Mater. Sci.* – 1999. – **35**, No. 5. – P. 612–622.
8. *Мартыняк Р. М., Гончар Х. І., Нагалка С. П.* Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2003. – **39**, № 5. – С. 59–66.  
Те саме: *Martyniuk R. M., Honchar Kh. I., Nahalka S. P.* Simulation of thermomechanical closure of an initially open interface crack with heat resistance // *Mater. Sci.* – 2003. – **39**, No. 5. – P. 672–681.
9. *Мартыняк Р. М., Гончар Х. И.* Термоупругое деформирование биматериала с межфазным дефектом, заполненным теплопроводной средой // *Теорет. и прикл. механика.* – 2005. – Вып. 41. – С. 58–62.
10. *Шльков Ю. Н., Ганин Е. А., Царевский С. Н.* Контактное термическое сопротивление. – Москва: Энергия, 1977. – 328 с.
11. *Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 2: Imperfect contact // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1983. – **50**, No. 4a. – P. 770–776.
12. *Garsia A. M., Sehitoglu H.* Contact of crack surfaces during fatigue: Part 1. Formulation of the model // *Metallurgical and Materials Transactions. A.* – 1997. – **28A**, No. 11. – P. 2263–2275.
13. *Giannopoulos G. I., Anifantis N. K.* A BEM analysis for thermomechanical closure of interfacial cracks incorporating friction and thermal resistance // *Comput. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* – 2007. – **196**, No. 4–6. – P. 1018–1029.
14. *Gross T. S., Mendelsohn D. A.* On the effect of crack face contact and friction due to fracture surface roughness in edge crack subjected to external shear // *Eng. Fract. Mech.* – 1988. – **31**, No. 3. – P. 405–420.



15. Keppas L. K., Anifantis N. K. Boundary element prediction on TBC fracture resistance // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* – 2010. – **33**, No. 3. – P. 174–182.
16. Kharun I. V., Loboda V. V. A thermoelastic problem for interface crack with contact zones // *Int. J. Solids and Struct.* – 2004. – **41**, No. 1. – P. 159–175.
17. Kobayashi T., Shockey D. A. Fracture surface topography analysis (FRASTA) – Development, accomplishments and future applications // *Eng. Fract. Mech.* – 2010. – **77**, No. 12. – P. 2370–2384.
18. Mendelsohn D. A., Gross T. S., Goulet R. U., Zhouc M. Experimental-computational estimation of rough fracture surface contact stresses // *Mater. Sci. and Eng. A.* – 1998. – **249**, No. 1–2. – P. 1–6.
19. Newman J. A., Piascik R. S. Interactions of plasticity and oxide crack closure mechanisms near the fatigue crack growth threshold // *Int. J. Fatigue.* – 2004. – **26**, No. 9. – P. 923–927.
20. Riemelmoser F. O., Pippan R. Crack closure: a concept of fatigue crack growth under examination // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* – 1997. – **20**, No. 11. – P. 1529–1540.
21. Sehitoglu H., Garsia A. M. Contact of crack surfaces during fatigue: Part 2. Simulations // *Metallurgical and Materials Transactions. A.* – 1997. – **28A**, No. 11. – P. 2277–2289.
22. Semprimoschnig C. O. A., Stampfl J., Pippan R., Kolednik O. A new powerful tool for surveying cleavage fracture surface // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* – 1997. – **20**, No. 11. – P. 1541–1550.

#### ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БИМАТЕРИАЛА С ЗАКРЫТОЙ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ С ШЕРОХОВАТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

*Сформулирована задача термоупругости для биматериала, компоненты которого имеют различные модули сдвига, с закрытой межфазной трещиной с шероховатыми поверхностями при действии сжимающей нагрузки и теплового потока, нормальных к межфазной поверхности. Учтена зависимость термической проводимости дефекта от контактного давления его берегов и теплопроводности среды, заполняющей его. Задача сведена к нелинейному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению типа Прандтля относительно скачка температуры между поверхностями трещины. Определено аналитическое решение задачи в случае действия лишь тепловой нагрузки. Проанализированы зависимости контактного давления берегов дефекта, скачка температуры между ними и коэффициента интенсивности касательных межфазных напряжений от величины заданного теплового потока, шероховатости поверхностей и соотношения между модулями сдвига сопряженных материалов.*

#### THERMAL STRESSED STATE IN BIMATERIAL WITH A CLOSED INTERFACE CRACK WITH ROUGH SURFACES

*The problem of thermoelasticity for a bimaterial with a closed interfacial crack with rough surfaces is formulated. The bimaterial is loaded by compressive stresses and heat flow normal to the interfacial surface. The components of bimaterial differ in shear modulus only. The dependence of thermal conductivity of the defect on the contact pressure of crack faces and thermal conductivity of the crack filler is taken into account. The problem is reduced to a Prandtl's singular integrodifferential equation for a temperature jump between crack faces. The analytical solution of the problem is obtained in the case when the heat flow is imposed. The effect of the imposed heat flow, roughness of the surfaces and ratio of bimaterial components shear moduli on the contact pressure, temperature jump between crack faces and the tangential interfacial stress intensity factor is analyzed.*

Ин-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
21.12.09