УДК 539.3

Б. В. Процюк

ФУНКЦІЇ ҐРІНА ТРИВИМІРНИХ СТАТИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ПРОСТОРУ

Побудовано у замкнутому вигляді функції Ґріна задач термопружності для кусково-однорідного тіла, складеного із двох ідеально контактуючих півбезмежних ізотропних тіл. При цьому використано узагальнені функції і функції Ґріна задач для відповідних систем звичайних диференціальних рівнянь. Як граничні випадки отримано функції Ґріна задач термопружності для півбезмежного тіла, коли його поверхня, яка теплоізольована або підтримується при нульовій температурі, вільна від навантажень чи жорстко защемлена. Наведено результати числових досліджень.

Методи побудови функції Ґріна задач термопружності для однорідних тіл наведено в [1, 4, 7]. Для кусково-однорідних тіл, складених із двох ідеально контактуючих півбезмежних ізотропних [6] і трансверсально-ізотропних [5] тіл, коли точкове джерело тепла розміщене на осі аплікат, функції Ґріна будують у вигляді лінійної комбінації відомих гармонічних функцій. У [6] отримано вирази для визначення радіальних і кільцевих напружень на поверхні поділу. У роботі [5] для отримання остаточних виразів для напружень необхідно розв’язати систему дванадцяти лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів, які входять в комбінації гармонічних функцій.

У цій статті для побудови в замкнутому вигляді функцій Ґріна тривимірних задач термопружності для двох ідеально контактуючих півбезмежних ізотропних тіл використано узагальнені функції і функції Ґріна відповідних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Постановка задачі теплопровідності та термопружності. Розглянемо віднесений до декартової системи координат x_1, x_2, x_3 кусково-однорідний простір, складений з двох вільних від силових навантажень ідеально контактуючих ізотропних півпросторів з поверхнею поділу $x_3 = 0$. У точці $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ першого півпростору ($x_3 < 0$) зосереджене джерело тепла одиничної потужності. Визначимо статичні температурні напруження у такому просторі.

За вихідні, розглядаючи похідні як узагальнені, беремо рівняння теплопровідності

$$\lambda_t(x_3)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\lambda_t(x_3)\frac{\partial G}{\partial x_3}\right] = -\delta(y_1)\delta(y_2)\delta(y_3), \tag{1}$$

співвідношення Дюгамеля – Неймана

$$\sigma_{ij} = \mu(x_3)(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda(x_3)\varepsilon\delta_{ij} - \beta^*(x_3)G\delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

та рівняння [2]

$$\mu(x_3)u_{i,jj} + [\lambda(x_3) + \mu(x_3)]\varepsilon_{,i} + [\tilde{\mu}(u_{i,3} + u_{3,i}) + \delta_{i3}\tilde{\lambda}_q\varepsilon]\Big|_{x_3=-0}\delta(x_3) =$$

$$= [\beta^*(x_3)\alpha_t(x_3)G]_{,i}. \tag{3}$$

Тут і далі кусково-сталі функції $\lambda_t(x_3)$, $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$, $\nu(x_3)$ і $\alpha_t(x_3)$, які мають вигляд

$$p(x_3) = p_1 + (p_2 - p_1)S(x_3), \tag{4}$$

у межах k-го півпростору співпадають з коефіцієнтами теплопровідності $\lambda_t^{(k)}$, коефіцієнтами Ляме λ_k, μ_k, коефіцієнтами Пуассона ν_k і температурним коефіцієнтом лінійного розширення $\alpha_t^{(k)}$ відповідно; $\tilde{\mu} = \mu_2 - \mu_1$, $\tilde{\lambda} = \lambda_2 - \lambda_1$; $\varepsilon = u_{i,i}$; $y_i = x_i - x_i^0$; $\beta^*(x_3) = [3\lambda(x_3) + 2\mu(x_3)]\alpha_t(x_3)$; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; δ_{ij} – символ Кронекера.

При цьому температура і напруження повинні задовольняти на безмежності умови регулярності.

Побудова розв'язку задачі теплопровідності. Використавши подання дельта-функції через інтеграли Фур'є

$$\delta(y_1)\delta(y_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2, \tag{5}$$

розв'язок задачі для рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$G = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{G} \cos\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 . \tag{6}$$

Внаслідок підстановки подань (5), (6) у рівняння (1), диференціювання добутку двох кусково-неперервних функцій за правилом

$$[\varphi(x)\psi(x)]' = \varphi(x)\psi'(x) + \varphi'(x)\psi(x),$$

та використання операції некомутативного, але асоціативного множення

$$f(x)\delta(x-a) = f(a+0)\delta(x-a), \qquad \delta(x-a)f(x) = f(a-0)\delta(x-a),$$

одержимо

$$\frac{d^2\bar{G}}{dx_3^2} - \beta^2\bar{G} + \frac{\lambda_t^{(2)} - \lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}} \left.\frac{d\bar{G}}{dx_3}\right|_{x_3=-0} \delta(x_3) = -\frac{1}{\lambda_t(x_3)}\delta(y_3), \tag{7}$$

$$\beta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 .$$

Розв'язок задачі для рівняння (7) подамо [3] у вигляді

$$\bar{G} = \bar{G}_1 + (\bar{G}_2 - \bar{G}_1)S(x_3),$$

де

$$\bar{G}_1 = \frac{1}{2\lambda_t^{(1)}\beta}\left[\Omega^+(\beta, x_3, x_3^0) - æ e^{\beta x}\right], \qquad \bar{G}_2 = \frac{æ_1}{\lambda_t^{(1)}\beta} e^{-\beta y_3}, \tag{8}$$

$$\Omega^{\pm}(\beta, x_3, x_3^0) = e^{-\beta(x_3^0 - x_3)} S(x_3^0 - x_3) \pm e^{-\beta(x_3 - x_3^0)} S(x_3 - x_3^0),$$

$$æ = \frac{k_\lambda - 1}{k_\lambda + 1}, \qquad æ_1 = \frac{1}{k_\lambda + 1}, \qquad k_\lambda = \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(1)}}, \qquad x = x_3 + x_3^0 .$$

Обчисливши у (6) інтеграли з урахуванням знайдених виразів для $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, знайдемо, що у співвідношенні для G

$$G_1 = \frac{1}{4\pi\lambda_t^{(1)}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{æ}{R_2}\right), \qquad G_2 = \frac{æ_1}{2\pi\lambda_t^{(1)} R_1}, \tag{9}$$

де $R_1 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$, $R_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x^2}$.

Побудова розв'язку задачі термопружності. Розв'язок задачі для системи рівнянь (3) шукатимемо у вигляді

$$u_i = U_i + U_i^t . \tag{10}$$

Тут U_i – загальний розв'язок системи рівнянь

$$\mu(x_3)U_{i,ij} + [\lambda(x_3) + \mu(x_3)]\varepsilon_{,j} + \\ + \left.[\tilde{\mu}(U_{i,3} + U_{3,i}) + \delta_{i3}\tilde{\lambda}\varepsilon]\right|_{x_3=-0} \delta(x_3) = X_{ti}, \tag{11}$$

а $U_i^t = \Psi_{,i}$, де Ψ − термопружний потенціал переміщень, який є частковим розв'язком рівняння

$$\nabla^2 \Psi = \gamma(x_3) G . \tag{12}$$

У рівняннях (11), (12) позначено

$$X_{ti} = -2\tilde{\mu}\Psi_{,i3}\Big|_{x_3=-0} \delta(x_3), \quad i = 1,2, \quad X_{t3} = 2\tilde{\mu}(\Psi_{,11} + \Psi_{,22})\Big|_{x_3=-0} \delta(x_3),$$

$$e = U_{i,i}, \qquad \gamma(x_3) = \alpha_t(x_3)[1 + \nu(x_3)][1 - \nu(x_3)]^{-1} .$$

Співвідношення (2) через допоміжні функції U_i, Ψ запишемо так:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^t, \qquad i, j = 1,2,3 , \tag{13}$$

де

$$\sigma_{ij}^* = \mu(x_3)(U_{i,j} + U_{j,i}) + \lambda(x_3) e \delta_{ij}, \qquad \sigma_{ij}^t = 2\mu(x_3)(\Psi_{,ij} - \delta_{ij}\nabla^2\Psi) . \tag{14}$$

Розв'язки рівнянь (11), (12) відповідності до (6) шукаємо у вигляді

$$U_1 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{U}_1 \sin\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 ,$$

$$U_2 = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{U}_2 \cos\eta_1 y_1 \sin\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 ,$$

$$U_3 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{U}_3 \cos\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 , \tag{15}$$

$$\Psi = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{\Psi} \cos\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 . \tag{16}$$

На основі співвідношень (15) напруження σ_{ij}^* визначатимуться за формулами

$$\sigma_{ii}^* = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{\sigma}_{ii}^* \cos\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2, \qquad i = 1,2,3 ,$$

$$\sigma_{12}^* = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{\sigma}_{12}^* \sin\eta_1 y_1 \sin\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 ,$$

$$\sigma_{13}^* = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{\sigma}_{13}^* \sin\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 ,$$

$$\sigma_{23}^* = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{\sigma}_{23}^* \cos\eta_1 y_1 \sin\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 , \tag{17}$$

а переміщення і напруження на основі (16), тобто ті, які відповідають термопружному потенціалу, − за такими:

$$U_1^t = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_1 \bar{\Psi} \sin\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 ,$$

$$U_2^t = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_2 \bar{\Psi} \cos\eta_1 y_1 \sin\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 ,$$

$$U_3^t = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{\Psi}' \cos\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 , \tag{18}$$

$$\sigma_{ii}^t = -2\mu(x_3)\left[\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_i^2 \bar{\Psi} \cos\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 + \gamma(x_3) G\right], \quad i = 1,2 ,$$

$$\sigma_{12}^t = \frac{2\mu(x_3)}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_1\eta_2\bar{\Psi}\sin\eta_1 y_1 \sin\eta_2 y_2\, d\eta_1\, d\eta_2\,,$$

$$\sigma_{13}^t = -\frac{2\mu(x_3)}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_1\bar{\Psi}'\sin\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2\, d\eta_1\, d\eta_2\,,$$

$$\sigma_{23}^t = -\frac{2\mu(x_3)}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_2\bar{\Psi}'\cos\eta_1 y_1 \sin\eta_2 y_2\, d\eta_1\, d\eta_2\,,$$

$$\sigma_{33}^t = \frac{2\mu(x_3)}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \beta^2\bar{\Psi}\cos\eta_1 y_1 \cos\eta_2 y_2\, d\eta_1\, d\eta_2\,. \tag{19}$$

Тут позначено

$$\bar{\sigma}_{11}^* = 2\mu(x_3)\eta_1\bar{U}_1 + \lambda(x_3)\bar{e}, \qquad \bar{\sigma}_{22}^* = -2\mu(x_3)\eta_2\bar{U}_2 + \lambda(x_3)\bar{e}\,,$$

$$\bar{\sigma}_{33}^* = 2\mu_3(x_3)\bar{U}_3' + \lambda(x_3)\bar{e}, \qquad \bar{e} = \bar{U}_1\eta_1 - \bar{U}_2\eta_2 + \bar{U}_3'\,,$$

$$\bar{\sigma}_{12}^* = \mu(x_3)(\eta_1\bar{U}_3 - \eta_2\bar{U}_1), \qquad \bar{\sigma}_{13}^* = \mu(x_3)(\bar{U}_1' - \eta_1\bar{U}_3)\,,$$

$$\bar{\sigma}_{23}^* = -\mu(x_3)(\bar{U}_2' + \eta_2\bar{U}_3)\,, \tag{20}$$

$\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, $\bar{U}_3$, $\bar{\Psi}$ – невідомі функції; штрихом позначено похідну за аргументом x_3.

Підставивши (6), (16) у (12), а (15), (16) – у (11) для визначення відповідно функцій $\bar{\Psi}$ і $\bar{U}_i$ отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\bar{\Psi}}{dx_3^2} - \beta^2\bar{\Psi} = \gamma(x_3)\bar{G} \tag{21}$$

і систему звичайних диференціальних рівнянь

$$D_i(\bar{U}_1,\bar{U}_2,\bar{U}_3) \equiv \mu(x_3)(\bar{U}_i'' - \beta^2\bar{U}_i) + (-1)^i\eta_i[\lambda(x_3)+\mu(x_3)]\bar{e} +$$

$$+\tilde{\mu}[\bar{U}_{i,3} + (-1)^i\eta_i\bar{U}_3]\Big|_{x_3=-0}\,\delta(x_3) =$$

$$= 2\eta_i\,(-1)^{i+1}\tilde{\mu}\bar{\Psi}'\Big|_{x_3=-0}\,\delta(x_3), \qquad i = 1,2\,,$$

$$D_3(\bar{U}_1,\bar{U}_2,\bar{U}_3) \equiv \mu(x_3)(\bar{U}_3'' - \beta^2\bar{U}_3) + [\lambda(x_3)+\mu(x_3)]\bar{e}_{,3} +$$

$$+2\tilde{\mu}(\bar{U}_{3,3} + \tilde{\lambda}\bar{e})\Big|_{x_3=-0}\,\delta(x_3) = -2\beta^2\,\tilde{\mu}\bar{\Psi}\Big|_{x_3=-0}\,\delta(x_3). \tag{22}$$

Частковий розв'язок рівняння (21) знаходимо у вигляді

$$\bar{\Psi} = -\frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\zeta)\bar{G}(\eta_1,\eta_2,\zeta)e^{-\beta|x_3-\zeta|}\,d\zeta\,. \tag{23}$$

Враховуючи (8), з (23) після перетворень отримаємо

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_1 + (\bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_1)S(x_3)\,,$$

де

$$\bar{\Psi}_1(\beta,x_3,x_3^0) = -\frac{\gamma_1}{4\lambda_t^{(1)}\beta^3}\{\Omega^+(\beta,x_3,x_3^0) -$$

$$-\beta y_3\Omega^-(\beta,x_3,x_3^0) + [æ\beta x_3 + æ_1(k_\gamma - k_\lambda)]e^{\beta x}\}\,,$$

$$\bar{\Psi}_2(\beta,x_3,x_3^0) = -\frac{\gamma_1}{4\lambda_t^{(1)}\beta^3}\left[2k_\gamma æ_1\beta x_3 - \beta x_3^0 - æ_1(1+k_\gamma)\right]e^{-\beta y_3}\,. \tag{24}$$

Продиференціювавши рівності (24) за x_3, матимемо

$$\bar{\Psi}_1'(\beta, x_3, x_3^0) = \frac{\gamma_1}{4\lambda_t^{(1)}\beta^2}\{\beta y_3 \Omega^+(\beta, x_3, x_3^0) - [æ\beta x_3 + æ_1(k_\gamma - 1)]e^{\beta y_3}\},$$

$$\bar{\Psi}_2'(\beta, x_3, x_3^0) = -\frac{\gamma_1}{4\lambda_t^{(1)}\beta^3}\left[2k_\gamma æ_1 \beta x_3 - \beta x_3^0 - æ_1(k_\gamma - 1)\right]e^{-\beta y_3}. \tag{25}$$

Розв'язок задачі для системи диференціальних рівнянь (22), використовуючи метод функцій Ґріна, запишемо так:

$$\bar{U}_1(\eta_1, \eta_2, \xi_3, x_3^0)\delta_{1k} + \bar{U}_2(\eta_1, \eta_2, \xi_3, x_3^0)\delta_{2k} + \bar{U}_3(\eta_1, \eta_2, \xi_3, x_3^0)\delta_{3k} =$$
$$= 2\tilde{\mu}\{\left[\eta_2 \bar{G}_2^{(k)} - \eta_1 \bar{G}_1^{(k)}\right]\Big|_{x_3=+0} \bar{\Psi}'(\beta, -0, x_3^0) +$$
$$+ \bar{G}_3^{(k)}\Big|_{x_3=+0} \beta^2 \bar{\Psi}(\beta, -0, x_3^0)\}, \tag{26}$$

де функції Ґріна $\bar{G}_i^{(k)} = \bar{G}_i^{(k)}(\eta_1, \eta_2, x_3, \xi_3)$, $i, k = 1, 2, 3$, – розв'язки задач

$$D_s(\bar{G}_1^{(k)}, \bar{G}_2^{(k)}, \bar{G}_3^{(k)}) = -\delta_{sk}\delta(x_3 - \xi_3), \qquad s = 1, 2, \qquad -\infty < \xi_3 < \infty,$$

$$D_3(\bar{G}_1^{(k)}, \bar{G}_2^{(k)}, \bar{G}_3^{(k)}) = -\delta_{3k}\delta(x_3 - \xi_3),$$

$$\bar{G}_i^{(k)} \to 0, \qquad x_3 \to \pm\infty. \tag{27}$$

Згідно з [2] вони мають вигляд

$$\bar{G}_i^{(k)} = \bar{G}_{i1}^{(k)} + (\bar{G}_{i2}^{(k)} - \bar{G}_{i1}^{(k)})S(x_3),$$

$$\bar{G}_{ij}^{(k)} = \bar{G}_{ij}^{(k1)} + (\bar{G}_{ij}^{(k2)} - \bar{G}_{ij}^{(k1)})S(\xi_3), \tag{28}$$

де

$$\bar{G}_{ij}^{(kp)} = \left[\eta_{3-i}\eta_{3-k}V_j^{(p)}(\beta, x_3, \xi_3) + (-1)^{i+k}\eta_i\eta_k \tilde{G}_{rj}^{(rp)}(\beta, x_3, \xi_3)\right]\frac{1}{\beta^2},$$
$$i, j, k, p = 1, 2,$$

$$\bar{G}_{ij}^{(3p)} = (-1)^{i+1}\eta_i \tilde{G}_{rj}^{(zp)}(\beta, x_3, \xi_3)\frac{1}{\beta}, \qquad \bar{G}_{3j}^{(kp)} = (-1)^{k+1}\eta_k \tilde{G}_{zj}^{(rp)}(\beta, x_3, \xi_3)\frac{1}{\beta},$$

$$\bar{G}_{3j}^{(3p)} = \tilde{G}_{zj}^{(zp)}(\beta, x_3, \xi_3). \tag{29}$$

Тут

$$V_1^{(1)}(\beta, x_3, \xi_3) = \frac{1}{2\beta\mu_1}\left[\Omega^+(\beta, x_3, \xi_3) - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}e^{\beta\tilde{x}}\right], \qquad \tilde{x} = x_3 + \xi_3,$$

$$V_1^{(2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \frac{1}{\beta(\mu_1 + \mu_2)}e^{-\beta\tilde{y}}, \qquad \tilde{y} = x_3 - \xi_3,$$

$$V_2^{(2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \frac{1}{2\beta\mu_2}\left[\Omega^+(\beta, x_3, \xi_3) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}e^{-\beta\tilde{x}}\right],$$

$$\tilde{G}_{q1}^{(q1)}(\beta, x_3, \xi_3) = \frac{k_{61}}{\beta}\left[k_{41}\Omega^+(\beta, x_3, \xi_3) + \delta_q \beta\tilde{y}\Omega^-(\beta, x_3, \xi_3)\right] -$$
$$- \frac{k_{61}}{d_0\beta}\left[\frac{m_0}{m_2}x_3\xi_3\beta^2 + \delta_q \frac{m_0 k_{41}}{2m_2}\tilde{x}\beta - d_{11}\right]e^{\beta\tilde{x}},$$

$$\tilde{G}_{q2}^{(q2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \frac{k_{62}}{\beta}\left[k_{42}\Omega^+(\beta, x_3, \xi_3) + \delta_q \beta\tilde{y}\Omega^-(\beta, x_3, \xi_3)\right] -$$
$$- \frac{k_{62}}{2m_1 d_0 \beta}\left[2m_0 x_3\xi_3\beta^2 - \delta_q k_{42} m_0 \tilde{x}\beta + d_{34}\right]e^{-\beta\tilde{x}},$$
$$q = r, z, \qquad \delta_r = 1, \qquad \delta_z = -1,$$

$$\tilde{G}_{r2}^{(z2)}(\beta, x_3, \xi_3) = k_{62}\tilde{y}\Omega^+(\beta, x_3, \xi_3) -$$

$$- \frac{k_{62}}{2m_1 d_0 \beta}\left[2m_0 x_3 \xi_3 \beta^2 + k_{42} m_0 \tilde{y}\beta - d_{32}\right] e^{-\beta\tilde{x}},$$

$$\tilde{G}_{r1}^{(z1)}(\beta, x_3, \xi_3) = k_{61}\tilde{y}\Omega^+(\beta, x_3, \xi_3) - \frac{k_{61}}{d_0\beta}\left[-\frac{m_0}{m_2} x_3 \xi_3 \beta^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{k_{41} m_0}{2m_2}\tilde{y}\beta - 4mk_{01}d_{16}\right] e^{\beta\tilde{x}},$$

$$\tilde{G}_{r1}^{(r2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{H}_1(\beta, x_3, \xi_3, c)\Big|_{c=-1},$$

$$\tilde{G}_{z1}^{(z2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{H}_1(\beta, x_3, \xi_3, c)\Big|_{c=1},$$

$$\tilde{H}_1(\beta, x_3, \xi_3, c) = -\frac{4k_{02}k_{62}}{d_0\beta}\left[c\varphi_{21}(x_3, \xi_3)\beta + d_{21}\right] e^{\beta\tilde{y}},$$

$$\tilde{G}_{z1}^{(r2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{H}_2(\beta, x_3, \xi_3, c)\Big|_{c=1},$$

$$\tilde{G}_{r1}^{(z2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{H}_2(\beta, x_3, \xi_3, c)\Big|_{c=-1},$$

$$\tilde{H}_2(\beta, x_3, \xi_3, c) = -\frac{4k_{02}k_{62}}{d_0\beta}\left[c\varphi_{21}(x_3, \xi_3)\beta - d_{16}\right] e^{\beta\tilde{y}},$$

$$\tilde{G}_{r1}^{(z1)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{G}_{z1}^{(r1)}(\beta, \xi_3, x_3), \qquad \tilde{G}_{r2}^{(z2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{G}_{z2}^{(r2)}(\beta, \xi_3, x_3),$$

$$\tilde{G}_{r2}^{(z1)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{G}_{z1}^{(r2)}(\beta, \xi_3, x_3), \qquad \tilde{G}_{r1}^{(z2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{G}_{z2}^{(r1)}(\beta, \xi_3, x_3),$$

$$\tilde{G}_{z1}^{(z2)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{G}_{z2}^{(z1)}(\beta, \xi_3, x_3), \qquad \tilde{G}_{r2}^{(r1)}(\beta, x_3, \xi_3) = \tilde{G}_{r1}^{(r2)}(\beta, \xi_3, x_3), \quad (30)$$

$$d_0 = (4m_1m_2)^{-1}, \quad 2m_1 = (m + k_{41})^{-1}, \quad 2m_2 = -(1 + mk_{42})^{-1},$$

$$m_0 = 1 - m, \quad m = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad d_{11} = -4d_{21}mk_{01} - d_0k_{41},$$

$$d_{34} = k_{42}^2 m_0 - 8m_1d_{16}k_{02}, \quad d_{16} = k_{41}k_{12} - mk_{42}k_{11},$$

$$d_{21} = d_0(k_{42}m_2 - k_{41}m_1), \quad d_{32} = 8m_1d_{16}k_{02},$$

$$k_{1j} = 1 - 2\nu_j, \quad k_{4j} = 3 - 4v_j, \quad k_{6j} = \frac{1}{8\mu_j k_{0j}}, \quad k_{0j} = 1 - \nu_j, \quad j = 1, 2,$$

$$2\varphi_{21}(x_3, \xi_3) = \frac{x_3}{m_2} + \frac{\xi_3}{m_1}.$$

З (26) після перетворень з урахуванням (28), (29) для j-го півпростору одержимо такі співвідношення:

$$\bar{U}_{1j}(\eta_1, \eta_2, \xi_3, x_3^0) = 2\tilde{\mu}\eta_1\left[-\tilde{G}_{r2}^{(rj)}(\beta, 0, \xi_3)\bar{\Psi}_1'(\beta, 0, x_3^0) + \right.$$

$$\left. + \beta\tilde{G}_{z2}^{(rj)}(\beta, 0, \xi_3)\bar{\Psi}_1(\beta, 0, x_3^0)\right],$$

$$\bar{U}_{2j}(\eta_1, \eta_2, \xi_3, x_3^0) = -\frac{\eta_2}{\eta_1}\bar{U}_{1j}(\eta_1, \eta_2, \xi_3, x_3^0),$$

$$\bar{U}_{3j}(\eta_1,\eta_2,\xi_3,x_3^0) = 2\tilde{\mu}\beta\big[-\tilde{G}_{r2}^{(zj)}(\beta,0,\xi_3)\bar{\Psi}_1'(\beta,0,x_3^0) +$$

$$+\beta\tilde{G}_{z2}^{(zj)}(\beta,0.\xi_3)\bar{\Psi}_1(\beta,0,x_3^0)\big], \qquad (31)$$

які після подальших перетворень з урахуванням (24), (30) набудуть вигляду

$$\bar{U}_{11}(\eta_1,\eta_2,x_3,x_3^0) =$$

$$= -\frac{m_0\gamma_1}{2\lambda_t^{(1)}}\left[m_1(2æ_1x_3 - k_{41}x_3^0)\beta^{-2} - 2m_1x_3x_3^0\beta^{-1} + æ_1d^+\beta^{-3}\right]\eta_1e^{\beta x},$$

$$\bar{U}_{12}(\eta_1,\eta_2,x_3,x_3^0) =$$

$$= -\frac{m_0\gamma_1}{2\lambda_t^{(1)}}\left[æ_1d^+\beta^{-3} - (m_1k_{41}x_3^0 + 2m_2k_\gamma æ_1x_3)\beta^{-2}\right]\eta_1e^{-\beta y_3},$$

$$\bar{U}_{2j}(\eta_1,\eta_2,\xi_3,x_3^0) = -\frac{\eta_2}{\eta_1}\bar{U}_{1j}(\eta_1,\eta_2,\xi_3,x_3^0),$$

$$\bar{U}_{31}(\eta_1,\eta_2,x_3,x_3^0) =$$

$$= -\frac{m_0\gamma_1}{2\lambda_t^{(1)}}\left[2m_1x_3x_3^0 - m_1(2æ_1x_3 + k_{41}x_3^0)\beta^{-1} + æ_1d^-\beta^{-2}\right]e^{\beta x},$$

$$\bar{U}_{32}(\eta_1,\eta_2,x_3,x_3^0) = -\frac{m_0\gamma_1}{2\lambda_t^{(1)}}\left[æ_1d^-\beta^{-2} -\right.$$

$$\left.-(m_1k_{41}x_3^0 + 2m_2k_\gamma æ_1x_3)\beta^{-1}\right]e^{-\beta y_3}, \qquad (32)$$

де $d^\pm = m_1k_{41} \pm m_2k_{42}k_\gamma$, $k_\gamma = \gamma_2/\gamma_1$.

Підставляючи (32) у (20), для кожного із півпросторів отримуємо

$$\bar{\sigma}_{ii}^{*(1)} = \frac{\mu_1m_0\gamma_1}{\lambda_t^{(1)}}\big[(m_1(k_{41}x_3^0 - 2æ_1x_3)\beta^{-2} + 2m_1 x_3x_3^0\beta^{-1} -$$

$$-æ_1m_0d^+\beta^{-3})\eta_i^2 - 4m_1\nu_1(æ_1\beta^{-1} - x_3^0)\big]e^{\beta x},$$

$$\bar{\sigma}_{ii}^{*(2)} = \frac{\mu_2m_0\gamma_1}{\lambda_t^{(1)}}\big[(m_1k_{41}x_3^0 + 2m_2k_\gamma æ_1x_3)\eta_i^2\beta^{-2} -$$

$$-æ_1d^+\eta_i^2\beta^{-3} - 4m_2\nu_2k_\gamma æ_1\beta^{-1}\big]e^{-\beta y_3}, \qquad i = 1,2,$$

$$\bar{\sigma}_{12}^{*(1)} = \frac{\mu_1m_0\gamma_1}{\lambda_t^{(1)}}\big[m_1(2æ_1x_3 - k_{41}x_3^0)\beta^{-2} - 2m_1x_3x_3^0\beta^{-1} + æ_1d^+\beta^{-3}\big]\eta_1\eta_2e^{\beta x},$$

$$\bar{\sigma}_{12}^{*(2)} = \frac{\mu_2m_0\gamma_1}{\lambda_t^{(1)}}\big[-(m_1k_{41}x_3^0 + 2m_2k_\gamma æ_1x_3)\beta^{-2} + æ_1d^+\beta^{-3}\big]\eta_1\eta_2e^{-\beta y_3},$$

$$\bar{\sigma}_{33}^{*(1)} = \frac{\mu_1m_0\gamma_1}{\lambda_t^{(1)}}\big[æ_1(m_2k_{42}k_\gamma - m_1)\beta^{-1} + m_1(x_3^0 + 2æ_1x_3) - 2m_1x_3x_3^0\beta\big]e^{\beta x},$$

$$\bar{\sigma}_{33}^{*(2)} = \frac{\mu_2m_0\gamma_1}{\lambda_t^{(1)}}\big[æ_1(m_1k_{41} - m_2k_\gamma)\beta^{-1} - m_1k_{41}x_3^0 - 2m_2k_\gamma æ_1x_3\big]e^{-\beta y_3},$$

$$\bar{\sigma}_{i3}^{*(1)} = \frac{\mu_1 m_0 \gamma_1}{\lambda_t^{(1)}} \left[-æ_1 (m_2 k_{42} k_\gamma + m_1) \beta^{-2} + \right.$$

$$\left. + m_1 (x_3^0 - 2æ_1 x_3) \beta^{-1} + 2 m_1 x_3 x_3^0 \right] \eta_i e^{\beta x} ,$$

$$\bar{\sigma}_{i3}^{*(2)} = \frac{\mu_2 m_0 \gamma_1}{\lambda_t^{(1)}} \left[æ_1 (m_1 k_{41} + m_2 k_\gamma) \beta^{-2} - \right.$$

$$\left. - (m_1 k_{41} x_3^0 + 2 m_2 k_\gamma æ_1 x_3) \beta^{-1} \right] \eta_i e^{-\beta y_3} . \qquad (33)$$

Отже, вирази для $\bar{\Psi}_j$, $\bar{\Psi}'_j$, $\bar{U}_j$, $\bar{\sigma}_{ik}^{*(j)}$ – відомі. Обчисливши з урахуванням цих виразів у (15)–(19) відповідні інтеграли і підставивши отримані співвідношення у (10), (13), одержимо шукані вирази для переміщень та напружень:

$$\frac{u_{i1}}{\gamma_*} = y_i \left\{ \frac{2 m_0 m_1 (k_{41} x_3^0 - 2æ_1 x_3) + æ x_3}{R_2 (R_2 - x)} + \frac{4 m_0 m_1 x_3 x_3^0}{R_2^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{æ_1 (k_\gamma - k_\lambda - 2 m_0 d^+)}{R_2 - x} + \frac{1}{R_1} \right\} ,$$

$$\frac{u_{i2}}{\gamma_*} = y_i \left\{ \frac{2 m_0 (m_1 k_1 x_3^0 + 2 m_2 k_\gamma æ_1 x_3) + 2 k_\gamma æ_1 x_3 - x_3^0}{R_1 (R_1 + y_3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{æ_1 (1 + k_\gamma - 2 m_0 d^+)}{R_1 + y_3} \right\} , \qquad i = 1, 2 ,$$

$$\frac{u_{31}}{\gamma_*} = \frac{y_3}{R_1} + \frac{2 m_0 m_1 (k_{41} x_3^0 + 2æ_1 x_3) - æ x_3}{R_2} + \frac{4 m_0 m_1 x_3 x_3^0 x}{R_2^3} +$$

$$+ æ_1 (2 m_0 d^- + k_\gamma - 1) \ln |R_2 - x| ,$$

$$\frac{u_{32}}{\gamma_*} = \frac{2 m_0 (m_1 k_1 x_3^0 + 2 m_2 k_\gamma æ_1 x_3) + 2 k_\gamma æ_1 x_3 - x_3^0}{R_1} +$$

$$+ æ_1 (2 m_0 d^- + k_\gamma - 1) \ln |R_1 + y_3| ,$$

$$\frac{\sigma_{ii}^{(1)}}{\gamma_0} = \left[2 m_0 m_1 k_{41} x_3^0 + (æ - 4 m_0 m_1 æ_1) x_3 \right] \left[\frac{1}{R_2 (R_2 - x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2 R_2 - x}{R_2^3 (R_2 - x)^2} y_i^2 \right] + 4 m_0 m_1 \left[x_3 x_3^0 \left(\frac{1}{R_2^3} - 3 y_i^2 \frac{1}{R_2^5} \right) - \right.$$

$$\left. - 2 \nu_1 \left(æ_1 \frac{1}{R_2} + x_3^0 x \frac{1}{R_2^3} \right) \right] + æ_1 (k_\gamma - k_\lambda - 2 m_0 d^+) \left[\frac{1}{R_2 - x} - \right.$$

$$\left. - \frac{y_i^2}{R_2 (R_2 - x)^2} \right] + 2 æ \frac{1}{R_2} - \frac{{y_i}^2 + R_1^2}{R_1^3} ,$$

$$m \frac{\sigma_{ii}^{(2)}}{\gamma_0} = \left[(2 m_0 m_1 k_{41} - 1) x_3^0 + 2 k_\gamma æ_1 (2 m_0 m_2 + 1) x_3 \right] \left[\frac{1}{R_1 (R_1 + y_3)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2 R_1 + y_3}{R_1^3 (R_1 + y_3)^2} y_i^2 \right] + æ_1 (1 + k_\gamma - 2 m_0 d^+) \left[\frac{1}{R_1 + y_3} - \right.$$

$$\left. - \frac{y_i^2}{R_1 (R_1 + y_3)^2} \right] - 8 m_0 m_2 \nu_2 k_\gamma æ_1 R_1^{-1} - \frac{4 æ_1 k_\gamma}{R_1} ,$$

$$\frac{\sigma_{12}^{(1)}}{\gamma_0} = y_1 y_2 \left\{ \left[(4m_0 m_1 \text{æ}_1 - \text{æ}) x_3 - 2m_0 m_1 k_{41} x_3^0 \right] \frac{2R_2 - x}{R_2^3 (R_2 - x)^2} - \right.$$

$$\left. - 12m_0 m_1 x_3 x_3^0 \frac{1}{R_2^5} + \text{æ}_1 (2m_0 d^+ - k_\gamma + k_\lambda) \frac{1}{R_2 (R_2 - x)^2} - \frac{1}{R_1^3} \right\},$$

$$m \frac{\sigma_{12}^{(2)}}{\gamma_0} = y_1 y_2 \left\{ - \left[(2m_0 m_1 k_{41} - 1) x_3^0 + 2k_\gamma \text{æ}_1 (2m_0 m_2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 1) x_3 \right] \frac{2R_1 + y_3}{R_1^3 (R_1 + y_3)^2} + \text{æ}_1 (2m_0 d^+ - 1 - k_\gamma) \frac{1}{R_1 (R_1 + y_3)^2} \right\},$$

$$\frac{\sigma_{33}^{(1)}}{\gamma_0} = \text{æ}_1 \left[2m_0 (m_2 k_{42} k_\gamma - m_1) - k_\gamma + k_\lambda \right] \frac{1}{R_2} - 4m_0 m_1 x_3 x_3^0 (3x^2 - R_2^2) \frac{1}{R_2^5} -$$

$$- \left[2m_0 m_1 x_3^0 + (4m_0 m_1 \text{æ}_1 - \text{æ}) x_3 \right] x \frac{1}{R_2^3} - (R_1^2 + y_3^2) \frac{1}{R_1^3},$$

$$m \frac{\sigma_{33}^{(2)}}{\gamma_0} = \text{æ}_1 \left[2m_0 (m_1 k_{41} - m_2 k_\gamma) - 1 - k_\gamma \right] \frac{1}{R_1} +$$

$$+ \left[(1 - 2m_0 m_1 k_{41}) x_3^0 - 2k_\gamma \text{æ}_1 (1 + 2m_0 m_2) x_3 \right] y_3 \frac{1}{R_1^3},$$

$$\frac{\sigma_{i3}^{(1)}}{\gamma_0} = y_i \left\{ \text{æ}_1 \left[k_\gamma - 1 - 2m_0 (m_2 k_{42} k_\gamma + m_1) \right] \frac{1}{R_2 (R_2 - x)} + \left[2m_0 m_1 x_3^0 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\text{æ} - 4m_0 m_1 \text{æ}_1) x_3 \right] \frac{1}{R_2^3} - 12m_0 m_1 x_3 x_3^0 x \frac{1}{R_2^5} - y_3 \frac{1}{R_1^3} \right\},$$

$$m \frac{\sigma_{i3}^{(2)}}{\gamma_0} = y_i \left\{ \text{æ}_1 \left[2m_0 (m_1 k_{41} + m_2 k_\gamma) + k_\gamma - 1 \right] \frac{1}{R_1 (R_1 + y_3)} + \right.$$

$$\left. + \left[(1 - 2m_0 m_1 k_{41}) x_3^0 - 2k_\gamma \text{æ}_1 (1 + 2m_2 m_0) x_3 \right] \frac{1}{R_1^3} \right\}, \qquad (34)$$

де $\gamma_* = \gamma_1 / (8\pi\lambda_t^{(1)})$, $\gamma_0 = 2\mu_1 \gamma_*$.

Часткові випадки. Шляхом граничних переходів із (34) можна отримати формули для визначення температурних перміщень і напружень в однорідному півпросторі, коли його поверхня, яка теплоізольована або підтримується при нульовій температурі, вільна від навантажень чи жорстко защемлена.

Так, спрямувавши $\mu_2 \to 0$; $\lambda_t^{(2)} \to 0$ або $\lambda_t^{(2)} \to \infty$, дістанемо відповідні формули для півпростору, поверхня якого вільна від навантажень:

$$\frac{u_{i1}}{\gamma_*} = y_i \left[\frac{x_3 - k_{41} x_3^0}{R_2 (R_2 - x)} - \frac{2x_3 x_3^0}{R_2^3} + \frac{b}{R_2 - x} + \frac{1}{R_1} \right],$$

$$\frac{u_{31}}{\gamma_*} = \frac{y_3}{R_1} - \frac{k_{41} x_3^0 + x_3}{R_2} - \frac{2x_3 x_3^0 x}{R_2^3} - 4\text{æ}_1 k_{01} \ln |R_2 - x|,$$

$$\frac{\sigma_{ii}^{(1)}}{\gamma_0} = (x_3 - k_{41} x_3^0) \left[\frac{1}{R_2 (R_2 - x)} - \frac{2R_2 - x}{R_2^3 (R_2 - x)} y_i^2 \right] -$$

$$- 2x_3 x_3^0 \left(\frac{1}{R_2^3} - 3y_i^2 \frac{1}{R_2^5} \right) + 4\nu_1 \left(\text{æ}_1 \frac{1}{R_2} + x_3^0 x \frac{1}{R_2^3} \right) +$$

$$+ b \left[\frac{1}{R_2 - x} - \frac{y_i^2}{R_2 (R_2 - x)^2} \right] + 2\text{æ} \frac{1}{R_2} - \frac{y_i^{\,2} + R_1^2}{R_1^3},$$

$$\frac{\sigma_{12}^{(1)}}{\gamma_0} = y_1 y_2 \left[(k_{41} x_3^0 - x_3) \frac{2R_2 - x}{R_2^3 (R_2 - x)^2} + 6 x_3 x_3^0 \frac{1}{R_2^5} - \frac{b}{R_2 (R_2 - x)^2} - \frac{1}{R_1^3} \right],$$

$$\frac{\sigma_{33}^{(1)}}{\gamma_0} = \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_2^3} + 2 x_3 x_3^0 \frac{3x^2 - R_2^2}{R_2^5} - \frac{R_1^2 + y_3^2}{R_1^3},$$

$$\frac{\sigma_{i3}^{(1)}}{\gamma_0} = y_i \left(y_3 \frac{1}{R_2^3} + 6 x_3 x_3^0 x \frac{1}{R_2^5} - y_3 \frac{1}{R_1^3} \right). \qquad (35)$$

Якщо у (34) спрямувати $\mu_2 \to \infty$, $\alpha_t^{(2)} \to 0$; $\lambda_t^{(2)} \to 0$ або $\lambda_t^{(2)} \to \infty$, то відповідно для півпростору, поверхня якого жорстко защемлена, матимемо

$$\frac{u_{i1}}{\gamma_*} = y_i \left[\frac{k_{41}(x_3^0 + æ x_3) - 2æ_1 x_3}{k_{41} R_2 (R_2 - x)} + \frac{2 x_3 x_3^0}{k_{41} R_2^3} - \frac{1}{R_2 - x} + \frac{1}{R_1} \right],$$

$$\frac{u_{31}}{\gamma_*} = \frac{y_3}{R_1} + \frac{k_{41}(x_3^0 - æ x_3) + 2æ_1 x_3}{k_{41} R_2} + \frac{2 x_3 x_3^0 x}{k_{41} R_2^3},$$

$$\frac{\sigma_{ii}^{(1)}}{\gamma_0} = \frac{k_{41}(x_3^0 + æ x_3) - 2æ_1 x_3}{k_{41}} \left[\frac{1}{R_2 (R_2 - x)} - \frac{2R_2 - x}{R_2^3 (R_2 - x)^2} y_i^2 \right] +$$

$$+ 2æ \frac{1}{R_2} + \frac{2 x_3 x_3^0}{k_{41}} \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{3 y_i^2}{R_2^5} \right) - \frac{4\nu_1}{k_{41}} \left(\frac{æ_1}{R_2} + \frac{x_3^0 x}{R_2^3} \right) -$$

$$- \frac{1}{R_2 - x} + \frac{y_i^2}{R_2 (R_2 - x)^2} - \frac{{y_i}^2 + R_1^2}{R_1^3},$$

$$\frac{\sigma_{12}^{(1)}}{\gamma_0} = y_1 y_2 \left[\frac{2æ_1 x_3 - k_{41}(x_3^0 + æ x_3)}{k_{41}} \frac{2R_2 - x}{R_2^3 (R_2 - x)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{6 x_3 x_3^0}{k_{41}} \frac{1}{R_2^5} + \frac{1}{R_2 (R_2 - x)^2} - \frac{1}{R_1^3} \right],$$

$$\frac{\sigma_{33}^{(1)}}{\gamma_0} = \frac{b^*}{R_2} - \left(\frac{x_3^0 + 2æ_1 x_3}{k_{41}} - æ x_3 \right) \frac{x}{R_2^3} - \frac{2 x_3 x_3^0}{k_{41}} \frac{3x^2 - R_2^2}{R_2^5} - \frac{R_1^2 + y_3^2}{R_1^3},$$

$$\frac{\sigma_{i3}^{(1)}}{\gamma_0} = y_i \left[- \frac{4 k_{01} æ_1}{k_{41} R_2 (R_2 - x)} + \left(\frac{x_3^0 - 2æ_1 x_3}{k_{41}} + æ x_3 \right) \frac{1}{R_2^3} - \frac{6 x_3 x_3^0 x}{k_{41} R_2^5} - \frac{y_3}{R_1^3} \right]. \qquad (36)$$

У формулах (35), (36) $b = k_{41}$, $æ_1 = 1$, $æ = -1$, $b^* = -1/k_{41}$ (для теплоізольованої поверхні) або $b = -1$, $æ_1 = 0$, $æ = 1$, $b^* = 1$ (для поверхні, що підтримується при нульовій температурі).

Зауважимо, що формули для визначення напружень $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ у півпросторі, поверхня якого вільна від навантажень, не залежать від того, чи вона теплоізольована, чи підтримується при нульовій температурі. У випадку, коли поверхня підтримується при нульовій температурі, вони співпадають із одержаними в [1] (якщо наведені у цій монографії відповідні формули для осесиметричної задачі записати у прямокутній системі координат).

Числові результати. Досліджували температурні напруження для різних значень фізико-механічних характеристик складових залежно від місцезнаходження точкового джерела тепла. На рис. 1–4 показано поведінку безрозмірних розривних і неперервних напружень на поверхні поділу вздовж осі Ox_1, коли джерело тепла діє в точці $M_0(0.1, 0, -0.03)$, для таких значень параметрів: $k_\gamma = 2.5$, $\nu_1 = 0.25$, $\nu_2 = 0.3$, $k_\lambda = 0.9$ (криві *1*), $k_\lambda = 2.9$ (криві *2*), $m = 0.7$ (суцільні лінії), $m = 2$ (штрихові лінії). Штрих-пунктирні лінії відповідають однорідному півпростору.

Розривні напруження σ_{11} характеризують графіки на рис. 1, 2. З їх аналізу випливає, що у другому півпросторі вони стискувальні. Максимальні значення, які досягаються при менших k_λ і m над точкою дії джерела тепла, приблизно у вісім разів більші, ніж в однорідному просторі. У першому півпросторі вони можуть бути як стискувальними, так і розтягувальними (при більших k_λ і m). Максимальні стискувальні − поза околом над точкою дії джерела тепла, причому вони не перевищують напружень в однорідному просторі.

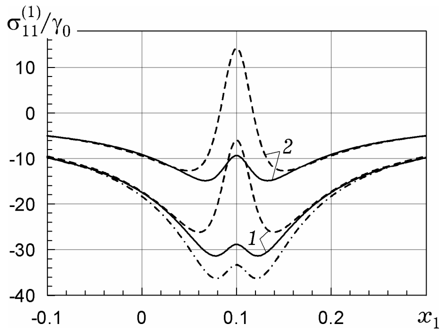

Рис. 1

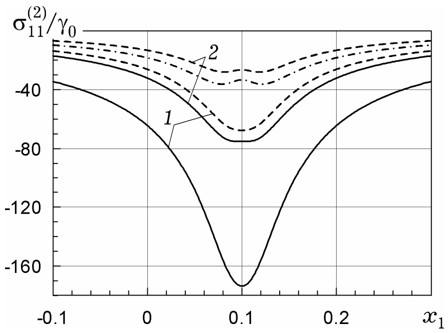

Рис. 2

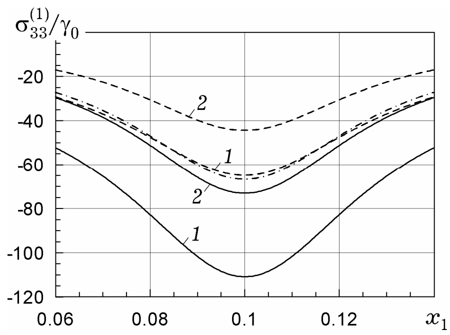

Рис. 3

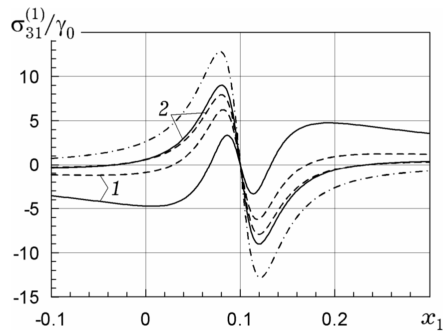

Рис. 4

Осьові напруження є стискувальними (рис. 3). Найменші значення досягаються при більших k_λ і m, найбільші − при менших k_λ і m. Для однорідного простору вони знаходяться між цими значеннями.

Дотичні напруження (рис. 4), які, на відміну від розглянутих вище, симетричні відносно точки M_0, максимальних значень досягають в однорідному просторі. Якщо в однорідному просторі при x_1, більших або менших ніж 0.1, вони стискувальні або розтягувальні, то в кусково-однорідному просторі при відповідних x_1 вони переходять із стискувальних у розтягувальні, або навпаки.

Висновки. Одержано і апробовано замкнутий розв’язок статичної тривимірної задачі термопружності для двох ідеально контактуючих тіл, одне з яких нагрівається точковим джерелом тепла. Наведені співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Ґріна, можуть бути використані для визначення у розглянутих тілах термопружного стану, зумовленого нагрівом джерелами тепла, розподілених уздовж лінії, по поверхні і по об’єму.

1. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
2. *Процюк Б. В.* Тривимірні статичні та квазістатичні задачі термопружності для шаруватих тіл із плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 2. – С. 96–106.
3. *Процюк Б. В.* Функції Ґріна стаціонарних задач теплопровідності для трансверсально-ізотропних багатошарових тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 3. – С. 80–88.
4. *Hou P.-F., Leung A. T. Y., Chen C. P.* Fundamental solution for transversally isotropic thermoelastic materials // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**. – P. 392–408.
5. *Hou P.-F., Leung A. T. Y., He Y.-J.* Three-dimensional Green's functions for transversely isotropic thermoelastic bimaterials // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**. – P. 6100–6113.
6. *Mossakovski J.* Thermal stresses in an elastic space with discontinuous physical properties // Arch. Mech. Stosow. – 1958. – No. 10. – P. 243–258.
7. *Sharma B.* Thermal stresses in transversely isotropic semi-infinite elastic solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1958. – **25**. – P. 169–182.

ФУНКЦИИ ГРИНА ТРЕХМЕРНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Построены в замкнутом виде функции Грина задач термоупругости для кусочно-однородного тела, составленного из двух идеально контактирующих полубесконечных изотропных тел. При этом использованы обобщенные функции и функции Грина задач для соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Как предельные случаи получены функции Грина задач термоупругости для полубесконечного тела, когда его поверхность, которая поддерживается при нулевой температуре или теплоизолирована, свободна от напряжений или жестко защемлена. Приведены результаты численных исследований.

GREEN'S FUNCTIONS OF 3D STATIC THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR PIECEWISE-HOMOGENEOUS SPACE

The Green's functions of thermoelasticity problems for a piecewise-homogeneous body formed of two ideally contacting semi-infinite isotropic bodies are constructed in a closed form. In addition the generalized functions and Green's functions are utilized for corresponding systems of ordinary differential equations. As the limiting cases Green's functions of thermoelasticity problem are obtained for a semi-infinite body when its surface thermally insulated or maintained at zero temperature is load-free or rigidly fixed. The results of numerical studies are presented.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.01.09