УДК 539.3

О. Ф. Кривий

СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ І РІВНЯННЯ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРОСТОРУ З МІЖФАЗНИМИ ДЕФЕКТАМИ

З використанням побудованого розривного розв'язку для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору отримано двовимірні сингулярні інтегральні співвідношення, які пов'язують стрибки і суми компонент тензора напружень і вектора переміщень і дозволяють задачі про міжфазні дефекти довільної природи зводити безпосередньо до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь, ядра яких виписуються у явному вигляді.

Задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних середовищах розглядались багатьма авторами. При цьому дослідження в основному обмежувались або двовимірними анізотропними середовищами, наприклад, [4–6, 9, 19], або кусково-однорідними ізотропними просторами та осесиметричними задачами для трансверсально-ізотропних просторів [3, 8, 14, 16–18, 20]. Що стосується більш загальних випадків, таких як кусково-однорідні анізотропні простори, в тому числі неосесиметричні задачі для кусково-однорідних трансверсально-ізотропних середовищ, то відомі лише чисельно-аналітичні результати, наприклад, [15, 22–25, 28], які базуються на результатах робіт [11, 26, 27] і містять в основному наближені значення коефіцієнтів інтенсивності.

Одним із основних методів дослідження задач про міжфазні дефекти є зведення їх до систем сингулярних інтегральних рівнянь, побудова яких пов'язана як з теоретичними, так і технічними складностями, особливо для неоднорідних анізотропних просторів. У роботі [10] побудовано розривний розв'язок для ізотропного простору, а в [3] цю методику узагальнено на випадок кусково-однорідного ізотропного простору і розглянуто задачі про міжфазні кругові включення при різних умовах на їх берегах. У праці [12] побудовано розривний розв'язок для трансверсально-ізотропного простору. У всіх випадках задачі розглядались у класах кусково-диференційовних функцій, що накладало відповідні обмеження на навантаження і ускладнювало обґрунтування побудов. У цій роботі в просторі узагальнених функцій повільного зростання $S'(\mathbb{R}^3)$ побудовано розривний розв'язок для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору при будь-якому способі навантаження середовища. Проблему зведено до задачі Рімана за частиною змінних у просторі $S'(\mathbb{R}^3)$ і запропоновано метод її розв'язування. З використанням побудованого розривного розв'язку і властивостей функцій із $S'(\mathbb{R}^3)$ отримано двовимірні сингулярні інтегральні співвідношення, які узагальнюють інтегральні співвідношення, отримані в [4–6], і дозволяють задачі про міжфазні дефекти в неоднорідному трансверсально-ізотропному просторі зводити безпосередньо до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з ядрами, що виражаються через елементарні функції. На основі останніх виписані двовимірні СІР для деяких задач про тріщину і включення при будь-якому способі навантаження.

1. Постановка задач і зведення проблеми до задачі Рімана в $S'(\mathbb{R}^2)$. Нехай у площині $z = 0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів розташовані дефекти загальної природи (типу тріщин, відшарованих і невідшарованих включень), які займають область Ω. Головна вісь симетрії кожного півпростору розміщена перпендикулярно до площини $z = 0$. Приймаємо, що на берегах півпросторів в залежності від виду дефекту є відомими шість із наступних величин:

$$\{\zeta_k^{\pm}\}^6 = \{v_k\}^6\Big|_{z=\pm 0}\,, \qquad (x,y)\in\Omega\,,$$

$$\mathbf{v} = \{v_k(x,y,z)\}_{k=1,\ldots,6} = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w\}\,. \tag{1}$$

Для визначення функцій із (1) побудуємо в площині $z = 0$ інтегральні співвідношення, що зв'язують різниці (скачки) і суми

$$\boldsymbol{\chi}^{\pm} = \{\chi_k^{\pm}(x,y)\}^6, \quad \chi_k^{\pm} = \langle \chi_k(x,y)\rangle^{\pm} = \zeta_k^{+}(x,y) \pm \zeta_k^{-}(x,y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\,, \tag{2}$$

компонент вектора переміщень і тензора напружень. Компоненти вектора $\mathbf{v}$ виразимо через стрибки (2). Такий розв'язок, дотримуючись термінології з [10], назвемо розривним розв'язком для трансверсально-ізотропного кусково-однорідного простору.

Відносно компонент вектора переміщень $\mathbf{u} = \{u_j\}^3 = \{v_{j+3}\}^3$, виходячи з рівнянь рівноваги та узагальненого закону Гука [7], у класі диференційовних функцій одержимо при $z \neq 0$ таку систему диференціальних рівнянь:

$$D[\partial_1,\partial_2,\partial_3]\mathbf{u} = 0, \qquad z \neq 0\,, \tag{3}$$

де

$$D[\partial_1,\partial_2,\partial_3] = \{L_{kj}\}^3, \qquad \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x},\quad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},\quad \partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial z}\,,$$

$$L_{11} = a_{11}\partial_1^2 + a_{66}\partial_2^2 + a_{44}\partial_3^2, \qquad L_{22} = a_{66}\partial_1^2 + a_{11}\partial_2^2 + a_{44}\partial_3^2\,,$$

$$L_{33} = a_{44}\partial_1^2 + a_{44}\partial_2^2 + a_{33}\partial_3^2, \qquad L_{12} = (a_{66} + a_{12})\partial_{12}^2\,,$$

$$L_{13} = (a_{44} + a_{13})\partial_{13}^2, \qquad L_{23} = (a_{66} + a_{13})\partial_{23}^2, \qquad L_{jk} = L_{kj}\,,$$

$$a_{kj} = \theta(z)a_{kj}^{+} + \theta(-z)a_{kj}^{-}, \qquad a_{66} = (a_{11} - a_{12})/2\,.$$

Інші компоненти вектора $\mathbf{v}$ можна знайти за формулами

$$v_1 = a_{11}(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + a_{33}\partial_3 u_3, \qquad v_2 = a_{44}(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2)\,,$$

$$v_3 = a_{44}(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3)\,. \tag{4}$$

Виходячи з подань розв'язків рівнянь Ляме для однорідного трансверсально-ізотропного простору [20], запишемо розв'язки рівнянь (3) таким чином:

$$u_j = \partial_j(\psi_1 + \psi_2) + (-1)^j\partial_{2-j}\psi_3, \qquad j = 1,2\,,$$

$$u_3 = \partial_3(\text{æ}_1\psi_1 + \text{æ}_2\psi_2), \qquad z \neq 0\,, \tag{5}$$

де функції ψ_j, $j = 1,2,3$, задовольняють рівняння

$$P_j[\partial_1,\partial_2,\partial_3]\psi_j = 0, \qquad z \neq 0, \qquad P_j = \partial_3^2 + \xi_j^2(\partial_1^2 + \partial_2^2)\,. \tag{6}$$

Кусково-сталі $\xi_j^2 = \theta(z)(\xi_j^{+})^2 + (\xi_j^{-})^2\theta(-z)$, $j = 1,2,3$, є розв'язками рівнянь

$$a_{33}a_{44}\xi^4 + (a_{13}(a_{13} + 2a_{44}) - a_{11}a_{33})\xi^2 + a_{11}a_{44} = 0, \qquad a_{44}\xi^2 - a_{66} = 0\,,$$

а $\text{æ}_j = \theta(z)\text{æ}_j^{+} + \text{æ}_j^{-}\theta(-z)$, $j = 1,2$, можна записати як

$$\text{æ}_j = (a_{11} - a_{44}\xi_j^2)(\xi_j^2(a_{13} + a_{44}))^{-1} = (a_{11} + a_{44})(\xi_j^2 a_{33} - a_{44})^{-1}\,.$$

Нехай $S_p'(\mathbb{R}^3)$ – підпростір узагальнених функцій повільного зростання $g(x,y,z)\in S'(\mathbb{R}^3)$, для яких $c_z(g)\le p$; $c_z(g)$ – порядок сингулярності за змінною z. Тоді, виходячи з рівнянь (6), у підпросторі $S_1'(\mathbb{R}^3)$ одержимо диференціальне рівняння з розривними коефіцієнтами стосовно функцій ψ_j, $j = 1,2,3$:

$$P_j[\partial_1,\partial_2,\partial_3]\psi_j = f_j, \quad f_j = \sum_{k=0}^{1}\delta^{(k)}(z)\left\langle \partial_3^{1-k}\psi_j \right\rangle^-, \quad \psi_j \in S_1'(\mathbb{R}^3). \qquad (7)$$

Нехай $H_m(\mathbb{R}^2)$ − клас функцій $f_\omega(\alpha,\beta)\in S'(\mathbb{R}^2)$, аналітичних за параметром $\omega=\gamma+i\gamma_i$ у кожній скінченній точці комплексної площини, за винятком, можливо, лінії $\operatorname{Im}\omega=0$, таких, що задовольняють при $|\operatorname{Im}\omega|>\varepsilon>0$ і деякому цілому m оцінку $|f_\omega(\alpha,\beta)|\le A_\varepsilon(1+|\omega|)^m$, $A_\varepsilon<\infty$. Функція $f_\gamma(\alpha,\beta)\in S'(\mathbb{R}^3)$ допускає аналітичне зображення за змінною γ, якщо існує функція $f_\omega(\alpha,\beta)\in H_m(\mathbb{R}^2)$ така, що (в сенсі збіжності в просторі $S(\mathbb{R}^2)$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(f_{\gamma+i\varepsilon}(\alpha,\beta)-f_{\gamma-i\varepsilon}(\alpha,\beta)\right)=f_\gamma^+(\alpha,\beta)-f_\gamma^-(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta). \qquad (8)$$

Нехай $\Omega_m'(\mathbb{R}^3)$ − підпростір узагальнених функцій $f\in S'(\mathbb{R}^3)$, для яких функції, що забезпечують аналітичне зображення (8) за змінною γ, належать до класу $H_m(\mathbb{R}^2)$. Нехай $\Omega_{\pm,m_\pm}'(\mathbb{R}^3)$ − підпростір функцій $f_\pm\in\Omega_{m_\pm}'(\mathbb{R}^3)$, для яких функції $f_\omega^\pm(\alpha,\beta)\in H_{m_\pm}(\mathbb{R}^2)$, що забезпечують аналітичне зображення (8) відповідно при $\pm\operatorname{Im}\omega<0$, мають вигляд

$$f_\omega^\pm(\alpha,\beta)=M_{m_\pm}, \qquad (9)$$

де

$$M_m(\omega,\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{m}\omega^k\varphi_k(\alpha,\beta), \quad \varphi_k\in S'(\mathbb{R}^2), \quad M_m\equiv 0, \quad m<0.$$

Справджуються такі твердження.

Теорема 1. *Нехай* $g(x,y,z)\in S_p'(\mathbb{R}^3)$, $g(x,y,z)=\partial_1^{n_1}\partial_2^{n_2}\partial_3^{p}g_0(x,y,z)$, *де* g_0 *− неперервна функція повільного зростання, яку можна подати у вигляді* $g_0=z^{n_0}g_*(x,y,z)$, $n_0\ge 0$, $g_*(x,y,0)\ne 0$. *Тоді* $f=F_3[g]\in\Omega_{p-n_0-1}'(\mathbb{R}^3)$, *де* F_n *− оператор* n*-вимірного перетворення Фур'є.*

Теорема 2. *Нехай* $g_\pm\in S_{\pm,p_\pm}'(\mathbb{R}^3)=S_\pm'(\mathbb{R}^3)\cap S_{p_\pm}'(\mathbb{R}^3)$, *де* $S_\pm'(\mathbb{R}^3)=\{g^\pm\in S'(\mathbb{R}^3)\,|\,\operatorname{supp}g_\pm=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_\pm\}$. *Тоді* $f_\pm=F_3[g_\pm]\in\Omega_{\pm,m_\pm}'(\mathbb{R}^3)$, $m_\pm=p_\pm-1$.

Враховуючи наведені теореми та застосовуючи до рівнянь (7) тривимірне перетворення Фур'є, отримаємо задачу Рімана за параметром γ для визначення трансформант функцій ψ_j, $j=1,2,3$, у підпросторах $\Omega_{\pm,1}'(\mathbb{R}^3)$:

$$p_j^+\Psi_j^+=-p_j^-\Psi_j^-+Q_j, \qquad j=1,2,3, \qquad (10)$$

де

$$\Psi_j^\pm=F_3[\theta(\pm z)\psi_j]\in\Omega_{\pm,0}'(\mathbb{R}^3), \qquad p_j^\pm=\theta(\pm z)P[-i\alpha,-i\beta,-i\gamma],$$

$$Q_j=\sum_{k=0}^{1}(-i\gamma)^k\nu_{jk}^0(\alpha,\beta), \qquad \nu_{jk}^0=F_2\left[\left\langle\partial_3^{1-k}\psi_j\right\rangle^-\right].$$

2. Про один метод розв'язування крайової задачі Рімана за однією змінною у просторі $S'(\mathbb{R}^3)$. Крайова задача Рімана за однією змінною в просторі $S'(\mathbb{R}^3)$ полягає в наступному:

знайти дві функції $f_\pm\in\Omega_{\pm,m_\pm}'(\mathbb{R}^3)$, що задовольняють крайову умову

$$(f_+,\varphi)=\left(f_-,G(\alpha,\beta,\gamma)\varphi\right)+(q,\varphi), \quad q\in S'(\mathbb{R}^3), \quad \varphi\in S(\mathbb{R}^3), \qquad (11)$$

де q − відома функція, що задовольняє умову $g = F_3^{-1}[q] \in S'_n(\mathbb{R}^3)$; $G \in \Theta_\mu$, $G \neq 0$; Θ_μ − клас мультиплікаторів в $S(\mathbb{R}^3)$, гельдерових за параметром γ, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

У наведених просторах мають місце узагальнення тверджень, доведених у [4].

Теорема 3. *Якщо* $f(\alpha,\beta,\gamma) \in \Omega'_p(\mathbb{R}^3)$, *то справджується зображення*

$$f = f_+ - f_-, \qquad f_\pm \in \Omega'_{\pm,p}(\mathbb{R}^3),$$

де $f_\pm$ *визначаються з точністю до функцій вигляду* $M_p(\alpha,\beta,\gamma)$ *із* (9).

Теорема 4. *Нехай* $f_\pm(\alpha,\beta,\gamma) \in \Omega'_{\pm,m_\pm}(\mathbb{R}^3)$. *Якщо виконується рівність*

$$(f_+,\varphi) = (f_-,\varphi), \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^3),$$

то $f_+ = f_- = M_p(\alpha,\beta,\gamma)$, $p \le \min\{m_+, m_-\}$, $M_p(\alpha,\beta,\gamma)$ − *функція вигляду* (9).

Нехай індекс коефіцієнта задачі (11) обмежений: $\mathrm{Ind}_\gamma G = k < \infty$. Тоді згідно з [2] має місце формула

$$G(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{\gamma - i}{\gamma + i}\right)^k \frac{X_+}{X_-}, \qquad X_\pm(\alpha,\beta,\gamma) = \lim_{\omega\to\alpha\pm i0} X(\alpha,\beta,\omega), \tag{12}$$

де

$$X(\alpha,\beta,\omega) = e^{K_{\alpha,\beta}(\omega)}, \qquad \mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\left(\frac{\tau - i}{\tau + i}\right)^{-k} G(\alpha,\beta,\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau - \omega},$$

$X_\pm \in \Theta_\mu$ − крайові значення функцій, обмежених на нескінченності, аналітичних за змінною γ відповідно в верхній і нижній півплощинах комплексної площини ω. Рівність (12), теореми 2, 3, а також те, що $(\gamma + i)^k \in \Theta_\mu$, дозволяють переписати умови (11) у вигляді

$$(f_+^0,\varphi) = (f_-^0,\varphi), \qquad f_\pm^0 = f_\pm(\alpha,\beta,\gamma)(\gamma \pm i)^k X_\pm^{-1} - q_k^\pm, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^3), \tag{13}$$

де

$$q_k = (\gamma + i)^k q X_+^{-1} = q_k^+ - q_k^-, \qquad q_k^\pm \in \Omega'_{\pm,n+k-1}(\mathbb{R}^3).$$

Очевидно, що функції $f_\pm^0$ належать відповідно півпросторам $\Omega'_\pm(\mathbb{R}^3)$. Нехай $k \ge 0$, тоді, якщо $m \ge n-1$ $(m = \min\{m_+, m_-\})$, то $f_\pm^0 \in \Omega'_{\pm,m+k}(\mathbb{R}^3)$ і, отже, згідно з теоремою 4 маємо $f_\pm^0 = M_{m+k}(\alpha,\beta,\gamma)$, де M_{m+k} − функції вигляду (9). Розв'язок задачі (11) в цьому випадку буде таким:

$$f_\pm(\alpha,\beta,\gamma) = (\gamma \pm i)^{-k} X_\pm (M_{m+k} + q_k^\pm) \in \Omega'_{\pm,m}(\mathbb{R}^3). \tag{14}$$

Якщо $m < n-1$, то згідно з теоремами 1 і 3 для існування розв'язків задачі (11) у підпросторах $\Omega'_{\pm,m}(\mathbb{R}^3)$ необхідно, щоб у зображенні $g_k = \partial_1^{n_1}\partial_2^{n_2}\partial_3^{k+n} g_0$, $g_k = F_3^{-1}[q_k]$, функція g_0 мала такий вигляд:

$$g_0(x,y,z) = z^{n_*} g_*(x,y,z), \quad g_*(x,y,0) \neq 0, \quad n_* = n - m - 1, \; g_* \in S(\mathbb{R}^3). \tag{15}$$

Розв'язок задачі (11) у цьому випадку також визначається формулами (14). Отже, доведено таке твердження.

Теорема 5. *Нехай* $\mathrm{Ind}_\gamma G(\alpha,\beta,\gamma) = k \ge 0$, $g = F_3^{-1}[q] \in S'_n(\mathbb{R}^3)$. *Тоді, якщо* $m \ge n-1$ $(m = \min\{m_+, m_-\})$, *то загальний розв'язок задачі* (11) *існує в підпросторах* $\Omega'_{\pm,m}(\mathbb{R}^3)$ *і визначається співвідношеннями* (14).

Якщо $m < n - 1$*, то для існування розв'язку задачі* (11) *в* $\Omega'_{\pm,m}(\mathbb{R}^3)$ *необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова* (15).

Аналогічно на підставі теорем 2–4 можна довести такі твердження.

Теорема 6. *Нехай* $\mathrm{Ind}_\gamma G(\alpha,\beta,\gamma) = k < 0$. *Тоді, якщо* $m \ge n - 1 - k$ $(m = \min\{m_+, m_-\})$, *то загальний розв'язок задачі* (11) *існує в підпросторах* $\Omega'_{\pm,m}(\mathbb{R}^3)$ *і визначається співвідношеннями* (14).

Якщо $m < n - k - 1$, *то для існування розв'язку в* $\Omega'_{\pm,m}(\mathbb{R}^3)$ *необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова* (15), *у якій* $n_* = n - k - m - 1$.

Наслідок 1. *Нехай* $m = n - 1$. *Тоді, якщо* $k \ge 0$, *задача* (11) *має розв'язок в підпросторах* $\Omega'_{\pm,m}(\mathbb{R}^3)$. *Якщо* $k < 0$, *задача* (11) *має розв'язок при виконанні умови* (15), *в якій* $n_* = -k$. *Загальний розв'язок задачі* (11) *визначається співвідношенням* (14) *і залежить від* $m + k$ $(m + k > 0)$ *довільних функцій із простору* $S'(\mathbb{R}^2)$.

3. Розв'язок крайової задачі (10) і побудова інтегральних співвідношень. Подання коефіцієнтів задачі

$$p_j^\pm = (\gamma - \omega_j^\pm r)(\gamma + \omega_j^\pm r), \qquad r^2 = \alpha^2 + \beta^2, \qquad \omega_j^\pm = i\xi_j^\pm,$$

та теорема 2 дозволяють звести крайову умову (10) до вигляду

$$g_j^+\Psi_j^+ - Q_j^+ = -g_j^-\Psi_j^- - Q_j^-, \qquad j = 1,2,3, \tag{16}$$

де

$$g_j^\pm = \frac{\gamma \pm \omega_j^\pm}{\gamma \pm \omega_j^\mp}, \qquad Q_j^\pm = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-ir)^{k-1}(\mp\omega_j^\mp)^k \nu_{jk}^0}{(\omega_j^+ + \omega_j^-)(\gamma \pm \omega_j^\mp r)}.$$

Згідно з [7] виконується умова $\mathrm{Im}\,\omega_j^\pm \ne 0$. Для визначеності будемо вважати, що $\mathrm{Im}\,\omega_j^\pm > 0$ $(\mathrm{Re}\,\xi_j^\pm > 0)$, тоді функції, що містяться у лівій і правій частинах рівності (16), належать відповідно до підпросторів $\Omega'_{\pm,1}(\mathbb{R}^3)$. Отже, застосовуючи теорему 4 і враховуючи властивість $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \Psi_j^\pm = 0$, запишемо розв'язок задачі (10) у вигляді

$$\Psi_j^\pm = \pm\sum_{k=0}^{1} \frac{(-ir)^{k-1}(\mp\omega_j^\mp)^k v_{jk}^0}{(\omega_j^+ + \omega_j^-)(\gamma \pm \omega_j^\pm r)}, \qquad j = 1,2,3. \tag{17}$$

Виразивши в (17) невідомі функції v_{jk}^0 через стрибки фізичних величин за допомогою формул (4) і (5), одержимо такі вирази для трансформант $V_j^\pm(\alpha,\beta,z) = \theta(\pm z)F_2[v_j]$ функцій (1):

$$V_1^\pm = \theta(\pm z)\Big\{\tilde\chi_1^- \sum_{k=1}^{2} q_{11}^{k,\pm} e_k^\pm - r^{-1}\big((-i\beta)\tilde\chi_2^- + (-i\alpha)\tilde\chi_3^-\big)\sum_{k=1}^{2} q_{12}^{k,\pm} e_k^\pm +$$

$$+ \big((-i\alpha)\tilde\chi_4^- + (-i\beta)\tilde\chi_5^-\big)\sum_{k=1}^{2} q_{13}^{k,\pm} e_k^\pm - r\tilde\chi_6^- \sum_{k=1}^{2} q_{14}^{k,\pm} e_k^\pm\Big\},$$

$$V_2^\pm = \theta(\pm z)\Big\{r^{-1}(-i\beta)\tilde\chi_1^- \sum_{k=1}^{2} q_{21}^{k,\pm} e_k^\pm + r^{-2}\tilde\chi_2^- \Big[(-i\beta)^2 \sum_{k=1}^{2} q_{22}^{k,\pm} e_k^\pm +$$

$$+ (-i\alpha)^2 q_{22}^{3,\pm} e_3^\pm\Big] - (-i\alpha)(-i\beta) r^{-2}\tilde\chi_3^- \Big[\sum_{k=1}^{2} q_{22}^{k,\pm} e_k^\pm - q_{22}^{3,\pm} e_3^\pm\Big] -$$

$$- (-i\alpha)(-i\beta)r^{-1}\tilde{\chi}_4^- \left[\sum_{k=1}^{2} q_{23}^{k,\pm} e_k^{\pm} + (-i\alpha)^2 q_{23}^{3,\pm} e_3^{\pm} \right] -$$

$$\left. - r^{-1}\tilde{\chi}_5^- \left[(-i\beta)^2 \sum_{k=1}^{2} q_{23}^{k,\pm} e_k^{\pm} - (-i\alpha)^2 q_{23}^{3,\pm} e_3^{\pm} \right] + (-i\beta)\tilde{\chi}_6^- \sum_{k=1}^{2} q_{24}^{k,\pm} e_k^{\pm} \right\},$$

$$V_4^{\pm} = \theta(\pm z)\left\{ -r^{-2}(-i\alpha)\tilde{\chi}_1^- \sum_{k=1}^{2} q_{31}^{k,\pm} e_k^{\pm} - (-i\alpha)(-i\beta)r^{-3}\tilde{\chi}_2^- \left[\sum_{k=1}^{2} q_{32}^{k,\pm} e_k^{\pm} + \right.\right.$$

$$\left. + q_{32}^{3,\pm} e_3^{\pm} \right] - r^{-3}\tilde{\chi}_3^- \left[(-i\alpha)^2 \sum_{k=1}^{2} q_{32}^{k,\pm} e_k^{\pm} - (-i\beta)^2 q_{32}^{3,\pm} e_3^{\pm} \right] +$$

$$+ r^{-2}\tilde{\chi}_4^- \left[(-i\alpha)^2 \sum_{k=1}^{2} q_{33}^{k,\pm} e_k^{\pm} + (-i\beta)^2 q_{33}^{3,\pm} e_3^{\pm} \right] +$$

$$\left. + (-i\alpha)(-i\beta)r^{-2}\tilde{\chi}_5^- \left[\sum_{k=1}^{2} q_{33}^{k,\pm} e_k^{\pm} - q_{33}^{3,\pm} e_3^{\pm} \right] - (-i\alpha)r^{-1}\tilde{\chi}_6^- \sum_{k=1}^{2} q_{34}^{k,\pm} e_k^{\pm} \right\},$$

$$V_6^{\pm} = \theta(\pm z)\left\{ r^{-1}\tilde{\chi}_1^- \sum_{k=1}^{2} q_{41}^{k,\pm} e_k^{\pm} + r^{-2}((-i\beta)\tilde{\chi}_2^- + (-i\alpha)\tilde{\chi}_3^-) \sum_{k=1}^{2} q_{42}^{k,\pm} e_k^{\pm} - \right.$$

$$\left. - r^{-1}((-i\alpha)\tilde{\chi}_4^- + (-i\beta)\tilde{\chi}_5^-) \sum_{k=1}^{2} q_{43}^{k,\pm} e_k^{\pm} + \tilde{\chi}_6^- \sum_{k=1}^{2} q_{44}^{k,\pm} e_k^{\pm} \right\}. \qquad (18)$$

Тут введено такі позначення:

$$e_k^{\pm} = e^{\pm i\omega_k^{\pm} rz}, \qquad q_{1,k}^{j,\pm} = (-i)^{k-1} \sum_{n=0}^{1} s_{2j-n,k}^{0} \left(a_{13}^{\pm} b_{j,1-n}^{1,\pm} \mp \omega_j^{\pm} a_{33}^{\pm} b_{j,1-n}^{2,\pm} \right),$$

$$q_{3,k}^{j,\pm} = i^{k-1} \sum_{n=0}^{1} s_{j+n,k}^{0} b_{j,1-n}^{1,\pm}, \quad q_{4,k}^{j,\pm} = i^{k} \sum_{n=0}^{1} s_{j+n,k}^{0} b_{j,1-n}^{2,\pm}, \quad j = 1,2, \quad k = 1,\ldots,4,$$

$$q_{m,k}^{3,\pm} = i^{k+2-m} (\pm a_{44}^{\pm} \omega_3^{\pm})^{3-m} \sum_{n=0}^{1} s_{n+1,k}^{*} b_{3,n}^{1,\pm}, \qquad m = 2,3, \qquad k = 2,3,$$

$$b_{j,k}^{n,\pm} = -i(\mp \omega_j^{\pm})^k (\mp æ_j^{\pm} \omega_j^{\pm})^{n-1} (\omega_j^{+} + \omega_j^{-})^{-1}, \qquad S_* = \{s_{jk}\}_{j=2,3;k=5,6},$$

$$S_*^{-1} = \{s_{jk}^{*}\}^2, \quad s_{1,k} = h_{k-1,1}^{1}, \quad k = 1,2, \quad s_{1,k} = h_{k-3,2}^{1}, \quad k = 3,4,$$

$$S^{-1} = \{s_{jk}^{0}\}^4, \quad S = \{s_{jk}\}^4, \quad s_{2,k} = h_{k-1,1}^{2}, \quad k = 1,2,$$

$$s_{2,k} = h_{k-3,2}^{2}, \quad k = 3,4, \quad s_{2,k} = h_{k-5,3}^{2}, \quad k = 5,6, \quad s_{3,k} = h_{k-1,1}^{3}, \quad k = 1,2,$$

$$s_{3,k} = h_{k-3,2}^{3}, \quad k = 3,4, \quad s_{3,k} = h_{k-5,3}^{3}, \quad k = 5,6,$$

$$s_{4,k} = h_{k-1,1}^{4}, \quad k = 1,2, \quad s_{4,k} = h_{k-3,2}^{4}, \quad k = 3,4,$$

$$h_{j,k}^{n+2} = b_{j,k}^{n,+} - b_{j,k}^{n,-}, \quad n = 1,2,$$

$$h_{3,k}^{2} = a_{44}^{+} \omega_3^{+} b_{3,k}^{1,+} + a_{44}^{-} \omega_3^{-} b_{3,k}^{1,-},$$

$$h_{j,k}^{2} = a_{44}^{+} \left(b_{j,k}^{2,+} - \omega_j^{+} b_{j,k}^{1,+} \right) - a_{44}^{-} \left(b_{j,k}^{2,-} + \omega_j^{-} b_{j,k}^{1,-} \right),$$

$$h_{j,k}^{1} = a_{13}^{+} b_{j,k}^{1,+} - a_{33}^{+} \omega_j^{+} b_{j,k}^{2,+} - a_{13}^{-} b_{j,k}^{1,-} + a_{33}^{-} \omega_j^{-} b_{j,k}^{2,-}, \qquad j = 1,2, \qquad k = 0,1.$$

Формули для визначення $V_3^{\pm}$, $V_5^{\pm}$ одержуємо відповідно з формул для $V_2^{\pm}$, $V_4^{\pm}$ шляхом перестановок $\tilde{\chi}_2^- \Leftrightarrow \tilde{\chi}_3^{\pm}$, $\tilde{\chi}_4^- \Leftrightarrow \tilde{\chi}_5^-$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

При переході у формулах (18) до оригіналів використаємо відому формулу [13]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha^2+\beta^2)e^{i\beta x+i\alpha y}dx\,dy=\int\limits_0^{\infty} tF(t)J_0\big(t\sqrt{x^2+y^2}\big)\,dt\,,$$

тоді розв'язки будуть містити лінійні комбінації таких операторів:

$$\mathcal{L}_n^{j,k}[f](x,y,z)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(t,\tau)\mathcal{K}_n^{j,k}(x-t,y-\tau,z)\,dx\,dy\,, \tag{19}$$

$$\mathcal{K}_n^{j,k}(x-t,y-\tau,z)=\frac{1}{2\pi}\partial_1^j\partial_2^k\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\xi_m^{\pm}|z|\rho}}{\rho^n}J_0(\rho r_0)\,d\rho\,, \tag{20}$$

де $r_0=\sqrt{(x-t)^2+(y-\tau)^2}$; $J_0(x)$ − функція Бесселя. Ядра (20) задовольняють умови $n-(j+k)\le 0$, $\operatorname{Re}\xi_m^{\pm}>0$, отже, компоненти вектора $\mathbf{v}$ не виходять із підпростору $S_1'(\mathbb{R}^3)$, а носії їх сингулярності знаходяться в площині $z=0$. Позбувшись квадратур у ядрах операторів (19) і ввівши позначення $\mathcal{R}_{j,\pm}^*=\mathcal{R}_{j,\pm}+\xi_j^{\pm}|z|$, $\mathcal{R}_{j,\pm}=\sqrt{r_0^2+(\xi_j^{\pm}z)^2}$, вирази для розривного розв'язку при $z\ne 0$ можемо подати в такому вигляді:

$$v_j(x,y,z)=\theta(z)v_j^+(x,y,z)+\theta(z)v_j^-(x,y,z)\,, \tag{21}$$

де

$$\begin{aligned}
v_1^{\pm}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\Bigg\{&\mp\chi_1^-\sum_{j=1}^{2}\frac{q_{11}^{j,\pm}}{\xi_j^{\pm}}\partial_3\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}-\sum_{j=1}^{2}q_{12}^{j,\pm}\left[\chi_2^-\partial_2\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}+\chi_3^-\partial_1\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}\right]\pm\\
&\pm\sum_{k=2}^{3}\chi_k^-\left[\sum_{j=1}^{2}q_{22}^{j,\pm}\partial_{4-k}\frac{y-\tau}{\mathcal{R}_{j,\pm}\mathcal{R}_{j,\pm}^*}+(-1)^k q_{22}^{3,\pm}\partial_{k-1}\frac{x-t}{\mathcal{R}_{3,\pm}\mathcal{R}_{3,\pm}^*}\right]\pm\\
&\pm\sum_{j=1}^{2}\frac{q_{13}^{j,\pm}}{\xi_j^{\pm}}\left[\chi_4^-\partial_{13}^2\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}+\chi_5^-\partial_{23}^2\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}\right]-\chi_6^-\sum_{j=1}^{2}\frac{q_{14}^{j,\pm}}{(\xi_j^{\pm})^2}\partial_3^2\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}\Bigg\}dt\,d\tau\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2^{\pm}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\Bigg\{&\chi_1^-\sum_{j=1}^{2}q_{21}^{j,\pm}\partial_2\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}-\sum_{k=4}^{5}\chi_k^-\left[\sum_{j=1}^{2}q_{23}^{j,\pm}\partial_{k-3,2}^2\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}+\right.\\
&\left.+(-1)^k q_{22}^{3,\pm}\partial_{1,6-k}^2\frac{1}{\mathcal{R}_{3,\pm}}\right]\mp\chi_6^-\sum_{j=1}^{2}\frac{q_{24}^{j,\pm}}{\xi_j^{\pm}}\partial_{23}^2\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}\Bigg\}dt\,d\tau\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_4^{\pm}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\Bigg\{&\chi_1^-\sum_{j=1}^{2}q_{31}^{j,\pm}\partial_2\frac{x-t}{\mathcal{R}_{3,\pm}\mathcal{R}_{3,\pm}^*}+\chi_6^-\sum_{j=1}^{2}q_{34}^{j,\pm}\partial_1\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}+\\
&+\sum_{k=2}^{3}\chi_k^-\left[\sum_{j=1}^{2}q_{32}^{j,\pm}\partial_{4-k}\frac{x-t}{\mathcal{R}_{j,\pm}^*}+(-1)^k q_{32}^{3,\pm}\partial_{k-1}\frac{y-\tau}{\mathcal{R}_{3,\pm}^*}\right]-\\
&-\sum_{k=4}^{5}\chi_k^-\left[\sum_{j=1}^{2}q_{33}^{j,\pm}\partial_{k-3}\frac{x-t}{\mathcal{R}_{j,\pm}\mathcal{R}_{j,\pm}^*}+(-1)^k q_{33}^{3,\pm}\partial_{6-k}\frac{y-\tau}{\mathcal{R}_{3,\pm}\mathcal{R}_{3,\pm}^*}\right]\Bigg\}dt\,d\tau\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_6^{\pm}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\Bigg\{&\chi_1^-\sum_{j=1}^{2}q_{41}^{j,\pm}\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}-\left[(y-\tau)\chi_2^-+(x-t)\chi_3^-\right]\sum_{j=1}^{2}\frac{q_{42}^{j,\pm}}{\mathcal{R}_{j,\pm}\mathcal{R}_{j,\pm}^*}+\\
&+\sum_{j=1}^{2}q_{43}^{j,\pm}\sum_{k=4}^{5}\chi_k^-\partial_{k-3}\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}\mp\chi_6^-\sum_{j=1}^{2}\frac{q_{44}^{j,\pm}}{\xi_j^{\pm}}\partial_3\frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}\Bigg\}dt\,d\tau\,.
\end{aligned}$$

Формули для $v_3^{\pm}$, $v_5^{\pm}$ одержимо відповідно із формул для $v_2^{\pm}$, $v_4^{\pm}$ шляхом перестановок $\chi_2^-\Leftrightarrow\chi_3^-$, $\chi_4^-\Leftrightarrow\chi_5^-$, $x\Leftrightarrow y$, $\partial_1\Leftrightarrow\partial_2$.

Дослідимо, використовуючи властивості функцій із $S'(\mathbb{R}^3)$ (на відміну [21], де розглядались класи гельдерових функцій), поведінку розривного розв'язку на носієві сингулярності, тобто поведінку операторів, що входять в (21), при $z \to \pm 0$. Вказані оператори є узагальненнями потенціалів простого та подвійного шарів і їх похідних на випадок трансверсально-ізотропного простору в $S'(\mathbb{R}^3)$. Запишемо їх у вигляді

$$\Phi^{\pm}_{n,k}[f](x,y,z) = \frac{\theta(\pm z)}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} f(t,\tau)\, \partial^k_n \frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}\, dt\, d\tau, \qquad k = 0,1,2, \quad n = 1,2,3\,,$$

$$\Phi^{\pm}_{4,k}[f](x,y,z) = \frac{\theta(\pm z)}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} f(t,\tau)\, \partial_k \frac{(y-t)^{k-1}(x-\tau)^{2-k}}{\mathcal{R}_{j,\pm}\mathcal{R}^*_{j,\pm}}\, dt\, d\tau, \qquad k = 1,2\,,$$

$$\Phi^{\pm}_{5,k}[f](x,y,z) = \frac{\theta(\pm z)}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} f(t,\tau)\, \partial^1_k \frac{x-t}{\mathcal{R}^*_{j,\pm}}\, dt\, d\tau, \qquad k = 1,2\,,$$

$$\Phi^{\pm}_{6,k}[f](x,y,z) = \frac{\theta(\pm z)}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} f(t,\tau)\, \partial^1_k \frac{y-\tau}{\mathcal{R}^*_{j,\pm}}\, dt\, d\tau, \qquad k = 1,2\,. \tag{22}$$

Справджується

Теорема 7. *Нехай $f(x,y)$ – інтегровна функція в сенсі простору $S'(\mathbb{R}^2)$. Тоді оператори $\partial^n_\ell \Phi^{\pm}_{3,1}[f],\ \Phi^{\pm}_{4,k}[f]$, $k = 1,2,\ \ell = 1,2,\ n = 0,1$, при виході із відповідних півпросторів у площину $z = 0$ будуть зазнавати стрибків. Для операторів $\Phi^{\pm}_{4,k}[f]$ величини цих стрибків співпадають. Вихід операторів $\Phi^{\pm}_{n,k}[f],\ n = 1,2,5,6,\ k = 1,2$, у площину $z = 0$ є неперервним.*

Д о в е д е н н я. Оператори (22) зв'язані з операторами (19), наприклад:

$$\Phi^{\pm}_{3,1} = \mathcal{L}^{0,0}_0, \qquad \Phi^{\pm}_{4,1} = \mathcal{L}^{2,0}_2, \qquad \Phi^{\pm}_{4,2} = \mathcal{L}^{0,2}_2,$$

$$\partial_1\Phi^{\pm}_{3,1} = \mathcal{L}^{1,0}_0, \qquad \partial_2\Phi^{\pm}_{3,1} = \mathcal{L}^{0,1}_0. \tag{23}$$

Отже, для ядер операторів (22) справджується зображення (19). Безпосереднім інтегруванням, скориставшись табличними інтегралами [1], враховуючи властивості узагальнених функцій із $S'(\mathbb{R}^3)$, одержимо такі подання:

$$\mathcal{K}^{0,0}_0 = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sgn}(z)}{2\pi\xi^{\pm}_j}\partial_3 \dfrac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}, & z \neq 0, \\ \delta(x-t, y-\tau), & z = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{K}^{1,0}_0 = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sgn}(z)}{2\pi\xi^{\pm}_j}\partial^2_{31} \dfrac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}, & z \neq 0, \\ \delta'(x-t)\delta(y-\tau), & z = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{K}^{0,1}_0 = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sgn}(z)}{2\pi\xi^{\pm}_j}\partial^2_{32} \dfrac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}}, & z \neq 0, \\ \delta(x-t)\delta'(y-\tau), & z = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{K}^{2,0}_2 = -\frac{1}{2\pi}\begin{cases} \partial_1 \dfrac{x-t}{\mathcal{R}_{j,\pm}\mathcal{R}^*_{j,\pm}}, & z \neq 0, \\ \partial_1 \dfrac{x-t}{r_0^2} + 2\pi\delta(x-t, y-\tau), & z = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{K}_2^{0,2} = -\frac{1}{2\pi}\begin{cases}\partial_2 \dfrac{y-\tau}{\mathcal{R}_{j,\pm}\mathcal{R}^*_{j,\pm}}, & z \ne 0,\\[2ex] \partial_2 \dfrac{y-\tau}{r_0^2} + 2\pi\delta(x-t, y-\tau), & z = 0.\end{cases} \tag{24}$$

Інші функції із (20) будуть неперервними при переході площини $z = 0$:

$$\lim_{z\to\pm 0} \mathcal{K}_n^{j,k}(x-t, y-\tau, z) = \mathcal{K}_n^{j,k}(x-t, y-\tau, 0),$$

і, отже, будуть неперервними в сенсі простору $S'(\mathbb{R}^3)$ оператори (22), які не виписані в (23). Звідси безпосередньо з урахуванням подань (24) випливають твердження теореми. Теорему доведено. ◊

Враховуючи теорему 6, виконаємо в (21) граничний перехід $z \to \pm 0$ і складемо суми фізичних величин (1):

$$\chi_1^+ = q_{11}\chi_1^- + q_{13}\sum_{j=4}^{5}\partial_{j-3}\chi_j^- -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{12}\left[\chi_2^-\partial_2 \frac{1}{r_0} + \chi_3^-\partial_2 \frac{1}{r_0}\right] + q_{14}\frac{\chi_6^-}{r_0^3}\right\} dt\, d\tau,$$

$$\chi_2^+ = q_{22}\chi_2^- - q_{24}\partial_2\chi_6^- + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{21}\chi_1^-\partial_2\frac{1}{r_0} - q_{22}^-\left[\chi_2^-\partial_1\frac{x-t}{r_0^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \chi_3^-\partial_2\frac{x-t}{r_0^2}\right] - q_{23}^-\chi_4^-\partial_{12}^2\frac{1}{r_0} - \left[q_{23}\frac{1}{r_0^3} - q_{23}^-\partial_1^2\frac{1}{r_0}\right]\chi_5^-\right\} dt\, d\tau,$$

$$\chi_3^+ = q_{22}\chi_3^- - q_{24}\partial_1\chi_6^- + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{21}\chi_1^-\partial_1\frac{1}{r_0} - q_{22}^-\left[\chi_3^-\partial_2\frac{y-\tau}{r_0^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \chi_2^-\partial_1\frac{y-\tau}{r_0^2}\right] - q_{23}^-\chi_5^-\partial_{12}^2\frac{1}{r_0} - \left[q_{23}\frac{1}{r_0^3} - q_{23}^-\partial_2^2\frac{1}{r_0}\right]\chi_4^-\right\} dt\, d\tau,$$

$$\chi_4^+ = q_{33}\chi_4^- + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ -q_{31}\frac{x-t}{r_0^2}\chi_1^- + q_{32}^-\chi_2^-\partial_2\frac{x-t}{r_0} + \left[\frac{q_{32}}{r_0} - q_{32}^-\partial_2\frac{y-\tau}{r_0}\right]\chi_3^- - \right.$$

$$\left. - q_{33}^-\left[\chi_4^-\partial_1\frac{x-t}{r_0^2} - \chi_5^-\partial_2\frac{x-t}{r_0^2}\right] + q_{34}^-\chi_6^-\partial_1\frac{1}{r_0}\right\} dt\, d\tau,$$

$$\chi_5^+ = q_{33}\chi_5^- + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ -q_{31}\frac{y-\tau}{r_0^2}\chi_1^- + q_{32}^-\chi_3^-\partial_1\frac{y-\tau}{r_0} + \left[\frac{q_{32}}{r_0} - q_{32}^-\partial_1\frac{x-t}{r_0}\right]\chi_2^- + \right.$$

$$\left. + q_{33}^-\left[\chi_5^-\partial_2\frac{y-\tau}{r_0^2} + \chi_4^-\partial_1\frac{y-\tau}{r_0^2}\right] + q_{34}^-\chi_6^-\partial_2\frac{1}{r_0}\right\} dt\, d\tau,$$

$$\chi_6^+ = q_{44}\chi_6^- + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ \frac{q_{41}}{r_0}\chi_1^- - q_{42}\left[\frac{y-\tau}{r_0^2}\chi_2^- + \frac{x-t}{r_0^2}\chi_3^-\right] - \right.$$

$$\left. - q_{43}\left[\chi_4^-\partial_1\frac{1}{r_0} + \chi_5^-\partial_2\frac{1}{r_0}\right]\right\} dt\, d\tau,$$

$$q_{kn}^j = q_{kn}^{j,+} + q_{kn}^{j,-}, \qquad q_{kn} = q_{kn}^1 + q_{kn}^2, \qquad q_{kn}^\pm = q_{kn} \pm q_{kn}^3. \tag{25}$$

Інтегральні співвідношення (25) узагальнюють співвідношення, отримані в [3, 4] відповідно для кусково-однорідного ізотропного простору і кусково-однорідного анізотропного двовимірного середовища, та дозволяють задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі зводити безпосередньо до двовимірних систем СІР.

Граничний перехід $\omega_j^- \to \omega_j^+$ у (25) дозволяє отримати інтегральні співвідношення для однорідного трансверсально-ізотропного простору:

$$\chi_1^+ = -\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{12}\left[\chi_2^-\partial_2 \frac{1}{r_0} + \chi_3^-\partial_2 \frac{1}{r_0}\right] + q_{14}\frac{\chi_6^-}{r_0^3}\right\} dt\, d\tau ,$$

$$\chi_2^+ = -\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{21}\frac{y-\tau}{r_0^3}\chi_1^- + q_{23}^-\chi_4^-\partial_{12}^2\frac{1}{r_0} + \left[q_{23}\frac{1}{r_0^3} - q_{23}^-\partial_1^2\frac{1}{r_0}\right]\chi_5^-\right\} dt\, d\tau ,$$

$$\chi_4^+ = \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{32}^-\chi_2^-\partial_2\frac{x-t}{r_0} + \left[q_{32}\frac{1}{r_0} - q_{32}^-\partial_2\frac{y-\tau}{r_0}\right]\chi_3^- + q_{34}^-\chi_6^-\partial_1\frac{1}{r_0}\right\} dt\, d\tau ,$$

$$\chi_6^+ = \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ \frac{q_{41}}{r_0}\chi_1^- - q_{43}\left[\chi_4^-\partial_1\frac{1}{r_0} + \chi_5^-\partial_2\frac{1}{r_0}\right]\right\} dt\, d\tau . \qquad (26)$$

Формули для $\chi_3^+(x,y), \chi_5^+(x,y)$ одержимо відповідно із формул для $\chi_2^+(x,y)$, $\chi_4^+(x,y)$ шляхом перестановок $\chi_2^- \Leftrightarrow \chi_3^-$, $\chi_4^- \Leftrightarrow \chi_5^-$, $x \Leftrightarrow y$, $\partial_1 \Leftrightarrow \partial_2$.

4. Постановка задач про міжфазні дефекти. Розглянемо такі задачі про міжфазні дефекти, які займають область Ω.

Задача А. До берегів тріщини прикладене довільне навантаження

$$v_k(x,y,\pm 0) = f_k^\pm(x,y), \quad \chi_k^\pm(x,y) = f_k^+ \pm f_k^-, \quad k = 1,2,3, \quad (x,y)\in\Omega ,$$

з рівнодійною $\mathbf{P}(P_1,P_2,P_3)$. Використовуючи перші три рівності із (25), відносно невідомих стрибків переміщень $\chi_k^-(x,y)$, $k = 4,5,6$, одержимо систему двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь

$$-q_{13}\sum_{j=4}^{5}\partial_{j-3}\chi_j^- - \frac{q_{14}}{2\pi}\iint_\Omega \frac{\chi_6^-}{r_0^3}\, dt\, d\tau = g_1(x,y) ,$$

$$q_{24}\partial_2\chi_6^- + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{23}^-\chi_4^-\partial_{12}^2\frac{1}{r_0} + \left[q_{23}\frac{1}{r_0^3} - q_{23}^-\partial_1^2\frac{1}{r_0}\right]\chi_5^-\right\} dt\, d\tau = g_2(x,y) ,$$

$$q_{24}\partial_1\chi_6^- + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{23}^-\chi_5^-\partial_{12}^2\frac{1}{r_0} + \left[q_{23}\frac{1}{r_0^3} - q_{23}^-\partial_2^2\frac{1}{r_0}\right]\chi_4^-\right\} dt\, d\tau = g_3(x,y). \qquad (27)$$

Тут введено позначення

$$g_1 = q_{11}\chi_1^- - \chi_1^+ - \frac{q_{12}}{2\pi}\iint_\Omega \left[\chi_2^-\partial_2\frac{1}{r_0} + \chi_3^-\partial_2\frac{1}{r_0}\right] dt\, d\tau ,$$

$$g_2 = q_{22}^+\chi_2^- - \chi_2^+ + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{21}\chi_1^-\partial_2\frac{1}{r_0} - q_{22}^-\left[\chi_2^-\partial_1\frac{x-t}{r_0^2} - \chi_3^-\partial_2\frac{x-t}{r_0^2}\right]\right\} dt\, d\tau ,$$

$$g_3 = q_{22}^+\chi_3^- - \chi_3^+ + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \left\{ q_{21}\chi_1^-\partial_1\frac{1}{r_0} - q_{22}^-\left[\chi_3^-\partial_2\frac{y-\tau}{r_0^2} - \chi_2^-\partial_1\frac{y-\tau}{r_0^2}\right]\right\} dt\, d\tau .$$

Розв'язки системи (27) повинні задовольняти умови змикання берегів тріщини

$$\iint_\Omega \partial_\ell\chi_k(x,y)\, dx\, dy = 0, \qquad k = 4,5,6 , \qquad (28)$$

∂_ℓ − похідна по дотичній до границі області Ω.

Задача Б. Абсолютно жорстке включення, що займає область Ω, зчеплене з півпросторами. До включення прикладене довільне навантаження, що зводиться до рівнодійної $\mathbf{Q} = (Q_1,Q_2,Q_3)$ і утворює головний момент $\mathbf{M} = (M_1,M_2,M_3)$. Розташування граней включення після деформації описується функціями

$$\chi_k^{\pm}(x,y) = \zeta_k^{+}(x,y) \pm \zeta_k^{-}(x,y)\,,$$

$$\zeta_k^{\pm}(x,y) = \zeta_k^0 + \vartheta_k^{\pm}(x,y), \qquad k = 4,5,6, \qquad (x,y) \in \Omega\,,$$

$$\zeta_4^0 = \delta_1 - \varphi_z y, \qquad \zeta_5^0 = \delta_2 + \varphi_z x, \qquad \zeta_6^0 = \delta_3 + \varphi_y x + \varphi_x y\,, \tag{29}$$

$\vartheta_k^{\pm}(x,y)$ задають форму включення відповідно при $z = \pm 0$; δ_k, $k = 1,2,3$, – поступальні переміщення включення в напрямку відповідних осей; φ_x, φ_y, φ_z – кути повороту включення навколо відповідних осей. Враховуючи умови $\chi_k^{-}(x,y) = 0$, $(x,y) \notin \Omega$, які відображають факт з'єднання півпросторів поза включеннями, поставлену задачу за допомогою співвідношень (25) можемо звести до такої системи трьох двовимірних інтегральних рівнянь відносно стрибків напружень $\chi_k^{-}(x,y)$, $k = 1,2,3$:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{-q_{31}\,\frac{x-t}{r_0^2}\,\chi_1^{-} + q_{32}^{-}\chi_2^{-}\partial_2\,\frac{x-t}{r_0} + \left[q_{32}\,\frac{1}{r_0} - q_{32}^{-}\partial_2\,\frac{y-\tau}{r_0}\right]\right\}\chi_3^{-} = g_1(x,y)\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{-q_{31}\,\frac{y-\tau}{r_0^2}\,\chi_1^{-} + \left[q_{32}\,\frac{1}{r_0} - q_{32}^{-}\partial_1\,\frac{x-t}{r_0}\right]\right\}\chi_2^{-} + q_{32}^{-}\chi_3^{-}\partial_1\,\frac{y-\tau}{r_0} = g_2(x,y)\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{q_{41}}{r_0}\,\chi_1^{-} + q_{42}\left[\frac{y-\tau}{r_0^2}\,\chi_2^{-} + \frac{x-t}{r_0^2}\,\chi_3^{-}\right]\right\} = g_3(x,y)\,. \tag{30}$$

Тут позначено

$$g_1 = \chi_4^{+} - q_{33}^{+}\chi_4^{-} - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{q_{33}^{-}\left[\chi_4^{-}\partial_1\,\frac{x-t}{r_0^2} + \chi_5^{-}\partial_2\,\frac{x-t}{r_0^2}\right] + q_{34}^{-}\chi_6^{-}\partial_1\,\frac{1}{r_0}\right\}dt\,d\tau\,,$$

$$g_2 = \chi_5^{+} - q_{33}^{+}\chi_5^{-} - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{q_{33}^{-}\left[\chi_5^{-}\partial_2\,\frac{y-\tau}{r_0^2} + \chi_4^{-}\partial_1\,\frac{y-\tau}{r_0^2}\right] + q_{34}^{-}\chi_6^{-}\partial_2\,\frac{1}{r_0}\right\}dt\,d\tau\,,$$

$$g_3 = \chi_6^{+} - q_{44}\chi_6^{-} + q_{43}\iint\limits_{\Omega}\left[\chi_4^{-}\partial_1\,\frac{1}{r_0} + \chi_5^{-}\partial_2\,\frac{1}{r_0}\right]dt\,d\tau\,.$$

Величини δ_k, $k = 1,2,3$, φ_x, φ_y, φ_z, визначаємо із таких шести рівнянь рівноваги:

$$\iint\limits_{\Omega}\chi_k(x,y)\,dx\,dy = Q_k, \qquad k = 1,2,3\,, \tag{31}$$

$$\iint\limits_{\Omega}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\chi_1(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} M_2 \\ M_1 \end{pmatrix},$$

$$\iint\limits_{\Omega}\big(x\chi_2(x,y) - y\chi_3(x,y)\big)\,dx\,dy = -M_3\,. \tag{32}$$

Задача В. Грані включення, описаного в *задачі Б*, знаходяться в умовах гладкого контакту з півпросторами. У цьому випадку стрибки та суми дотичних напружень перетворюються в нуль: $\chi_k^{\pm}(x,y) = 0$, $k = 2,3$, а стрибки і суми нормальних зміщень визначаються формулами (29) при $k = 6$. Використовуючи друге, третє та шосте із співвідношень (25), відносно невідомих стрибків нормальних напружень і дотичних зміщень $\chi_k^{\pm}(x,y)$, $k = 1,4,5$, отримаємо таку систем трьох двовимірних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{q_{21}\chi_1^-\partial_2\frac{1}{r_0}-q_{23}^-\chi_4^-\partial_{12}^2\frac{1}{r_0}-\left[q_{23}\frac{1}{r_0^3}-q_{23}^-\partial_1^2\frac{1}{r_0}\right]\chi_5^-\right\}dt\,d\tau=q_{24}\partial_2\chi_6^-,$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{q_{21}\chi_1^-\partial_1\frac{1}{r_0}-q_{23}^-\chi_5^-\partial_{12}^2\frac{1}{r_0}-\left[q_{23}\frac{1}{r_0^3}-q_{23}^-\partial_2^2\frac{1}{r_0}\right]\chi_4^-\right\}dt\,d\tau=q_{24}\partial_1\chi_6^-,$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{q_{41}}{r_0}\chi_1^- - q_{43}\left[\chi_4^-\partial_1\frac{1}{r_0}+\chi_5^-\partial_2\frac{1}{r_0}\right]\right\}dt\,d\tau=\chi_6^+-q_{44}\chi_6^-.$$

Для визначення невідомих $\delta_3, \varphi_x, \varphi_y$ необхідно використати першу з умов (31) та першу і другу з умов (32). Аналогічно до двовимірних систем СІР зводяться задачі про інші міжфазні дефекти.

Висновки. Отже, побудовано розривний розв'язок для кусково-однорідного трансверсально-ізотропному простору, який виражається через елементарні функції і дозволяє задачі про міжфазні дефекти довільної природи і форми зводити до двовимірних систем СІР. Крім того, наявність розривного розв'язку дозволяє визначати напружено-деформований стан у будь-якій точці простору.

1. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. – Москва: Наука, 1977. – 288 с.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Ефимов В. В., Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
4. *Кривий О. Ф.* Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 2. – С. 55–65.
5. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, № 4. С. 689–700.
6. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С. 36–45.
   Те саме: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44,** No. 6. – P. 626–634.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
8. *Моссаковский В. И., Рыбка М. Т.* Обобщение критерия Гриффитса – Снеддона на случай неоднородного тела // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28,** № 6. – С. 1061–1069.
9. *Назаров С. А.* Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности упругих полей и критерии разрушения при контакте берегов // Прикл. математика и механика. – 2005. – **69**, № 3. – С. 520–532.
10. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
11. *Свекло В. А.* Задача типа Бусинеска для анизотропного полупространства // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 5. – С. 908–913.
12. *Силованюк В. П.* Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2000. – 298 с.
13. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
14. *Эрдоган Ф.* Распределение напряжений в связных разнородных материалах, содержащих круглые и кольцеобразные трещины // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1965. – **32**, № 2. – С. 127–135.
15. *Barber J. R., Ting T. C. T.* Three-dimensional solutions for general anisotropy // J. Mech. Phys. Solids. – 2007. – **55.** – P. 1993–2006.
16. *Bigoni D., Serkov S. K., Valentini M., Movchan A. B.* Asymptotic models of dilute composites with imperfectly bonded inclusions // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35,** No. 24. – P. 3239–3258.

17. *Fabrikant V. I.* A new form of the Green function for a transversely isotropic body // Acta Mecanica. – 2004. – **167,** No. 2. – P. 101–111.
18. *Hasegawa H., Kisaki M.* The stress field caused by a circular cylindrical inclusion in a transversely isotropic elastic solid // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, No. 6. – P. 825–831.
19. *Herrmann K. P., Loboda V. V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – **69**. – P. 317–335.
20. *Hu H. C.* On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Acta Phys. Sinica. – 1953. – **9,** No. 2. – P. 130–144.
21. *Kryvyy O.* The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 387–398.
22. *Pan E.* Three-dimensional Green's functions in anisotropic elastic bimaterials with imperfect interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, No. 2. – P. 180–190.
23. *Phan A. V., Gray L. J., Kaplan T.* Residue approach for evaluating the 3D anisotropic elastic Green's function: multiple roots // Eng. Anal. with Boundary Elements. – 2005. – **9**, No. 6. – P. 570–576.
24. *Poonssawat P., Wijeyewickrema A. C., Karasudhi P.* Stress singularity analysis of a crack terminating at the interface of an anisotropic layered composite // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1998. – **65**, No. 4. – P. 829–836.
25. *Qu J., Xue Y.* Three-dimensional interface cracks in anisotropic bimaterials: the non-oscillatory case // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1998. – **65**, No. 6. – P. 1048–1055.
26. *Willis J. R.* The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium // Int. J. Eng. Sci. – 1968. – **6**, No. 5. – P. 253–263.
27. *Willis J. R.* The penny-shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1972. – **25**. – P. 368–385.
28. *Yuan F. G., Yang S., Yang B.* Three-dimensional Green's functions for composite laminates // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40,** No. 2. – P. 331–342.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА С МЕЖФАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

С использованием построенного разрывного решения для кусочно-однородного трансверсально-изотропного пространства получены двумерные сингулярные интегральные соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений и вектора смещений и позволяющие задачи о межфазных дефектах произвольной природы сводить к системам двумерных сингулярных интегральных уравнений, ядра которых записываются в явном виде.

SINGULAR INTEGRAL RELATIONS AND EQUATIONS FOR PIECEWISE-HOMOGENEOUS TRANSVERSALLY-ISOTROPIC SPACE WITH INTERFACIAL DEFECTS

Using the constructed discontinuous solution for a piecewise-homogeneous transversally-isotropic space we have obtained the 2D singular integral relations, which connect the jumps and sums of components of the stress tensor and the vector of displacements and allow reducing the problems about the interfacial defects to the systems of 2D singular integral equations, the kernels of which are written in the explicit form.

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано
22.12.09