УДК 539.3

Г. Я. Попов[1], Б. Кебли[2]

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ КЛИНОВИДНОЙ ПЛИТЫ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Построено точное решение смешанной краевой задачи теории упругости для бесконечной клиновидной плиты $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi \le \omega$, $0 \le z \le h$ *с учетом действия собственного веса. На гранях плиты* $\varphi = 0$, $\varphi = \omega$ *выполняются условия скользящей заделки. На грани* $z = h$ *выполняются условия первой основной задачи теории упругости. На грани* $z = 0$ *могут быть выполнены два типа граничных условий. В случае действия на плиту только собственного веса получено простое элементарное решение. Это позволило рассматривать зависимость напряженного состояния плиты только от заданной в постановке задачи нагрузки. Для этого с помощью подходящих интегральных преобразований по переменным* φ *и* r *сформулированные краевые задачи сведены к векторной одномерной краевой задаче. Для получения ее точного решения применено векторное интегральное преобразование Ханкеля в сочетании с теорией матричных дифференциальных уравнений второго порядка.*

1. Рассматривается упругая (коэффициент Пуассона μ, модуль сдвига G) бесконечная клиновидная плита (удельный вес материала плиты γ), определяемая в цилиндрической системе координат соотношениями

$$0 \le r < \infty, \qquad 0 \le \varphi \le \omega, \qquad 0 \le z \le h. \tag{1}$$

Грань плиты $z = 0$ считается опирающейся на абсолютно жесткое основание, на котором выполняется либо гладкий контакт, либо полное сцепление:

а) $\qquad [u_z(r,\varphi,0),\ \tau_{zr}(r,\varphi,0),\ \tau_{z\varphi}(r,\varphi,0)] = 0$,

б) $\qquad [u_r(r,\varphi,0),\ u_\varphi(r,\varphi,0),\ u_z(r,\varphi,0)] = 0$, $\qquad$ (2)

а на грани $z = h$ имеют место условия первой основной задачи теории упругости:

$$\sigma_r(r,\varphi,h) = -p(r,\varphi), \quad \tau_{zr}(r,\varphi,h) = q_1(r,\varphi), \quad \tau_{z\varphi}(r,\varphi,h) = q_2(r,\varphi). \tag{3}$$

На гранях $\varphi = 0$ и $\varphi = \omega$ считаем выполненными условия скользящей заделки:

$$u_\varphi(r,\varphi,z)\big|_{\varphi=0,\omega} = 0, \quad \tau_{\varphi r}(r,\varphi,z)\big|_{\varphi=0,\omega} = 0, \quad \tau_{\varphi z}(r,\varphi,z)\big|_{\varphi=0,\omega} = 0. \tag{4}$$

Требуется решить в цилиндрической системе координат уравнения Ламе с объемными силами в области (1) и удовлетворить граничным условиям (2)–(4). Целью статьи является построение точного решения поставленных задач.

Следует отметить, что число публикаций, где исследуется напряженное состояние тонких клиновидних (секториальных) плит, весьма велико. Это связано с тем, что эта проблема приводится к более простым двумерным краевым задачам математической физики. Так, исследование напряженного состояния бесконечных клиновидних тонких плит занимает значительную часть монографии Я. С. Уфлянда [6]. Еще большее количество публикаций посвящены напряженному состоянию тонких клиновидних плит конечного радиуса. Отметим только работу Qian Min-gang'a, Yan Zong-da'a [7], в которой использован математический аппарат, близкий к используемому в настоящей работе. Количество публикаций, посвященных напряженному состоянию клиновидних плит и близких к ним по очертанию в плане в трехмерной (пространственной) постановке, весьма ограничено.

Имеется публикация [2], в которой получено точное решение первой основной задачи теории упругости для бесконечной клиновидной плиты. Однако, как отмечено в [3], полученное решение будет точным, если будет проведена некоторая дополнительная операция. В публикации R. Q. Xu [8] рассмотрена бесконечная клиновидная плита, усеченная двумя круговыми цилиндрическими сечениями $r = r_0$ и $r = r_1$, $r_0 > r_1$. При этом постановка существенно отличается от принятой здесь. Во-первых, учитывается слоистость плиты по толщине, во-вторых, материал плиты считается трансверсально изотропным, в-третьих, рассматривается не статика, а свободные колебания плиты.

2. Для построения точного решения поставленной задачи и компактной записи уравнений Ламе примем, что

$$u_r(r,\varphi,z) \equiv u(r,\varphi,z) \equiv u, \qquad u_\varphi(r,\varphi,z) \equiv v(r,\varphi,z) \equiv v,$$

$$u_z(r,\varphi,z) \equiv w(r,\varphi,z) \equiv w.$$

Частную производную по r будем отмечать штрихом, по φ – точкой, а по z – запятой и введем обозначения

$$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}, \quad D_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \partial_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \theta = u' + \frac{u + v^{\bullet}}{r} + w'. \tag{5}$$

В этих обозначениях уравнения Ламе [1] можно записать так:

$$D_r u + r^{-2}(u^{\bullet\bullet} - u - 2v^{\bullet}) + u' + \mu_0\theta' = 0,$$

$$D_r v + r^{-2}(v^{\bullet\bullet} - v + 2u^{\bullet}) + v'' + \mu_0 r^{-1}\theta^{\bullet} = 0,$$

$$D_r w + r^{-2}w^{\bullet\bullet} + w'' + \mu_0\theta' = \gamma G^{-1}. \tag{6}$$

Эту систему следует решить в области (1) и удовлетворить граничным условиям (2)–(4), которые, если учесть известную [1] связь между смещениями и напряжениями

$$\sigma_z = A[u' + r^{-1}(u + v^{\bullet}) + \bar{\mu}w'], \quad A = 2G\mu\mu_0, \quad \bar{\mu} = (1-\mu)\mu^{-1},$$

$$\tau_{zr} = G[w' + u'], \qquad \tau_{z\varphi} = G[v' + r^{-1}w^{\bullet}],$$

$$\tau_{\varphi r} = G[r^{-1}u^{\bullet} + r(r^{-1}v)'], \tag{7}$$

преобразуются к виду

а) $\quad [w(r,\varphi,0),\ u'(r,\varphi,0),\ v'(r,\varphi,0)] = 0,$

б) $\quad [u(r,\varphi,0),\ v(r,\varphi,0),\ w(r,\varphi,0)] = 0,$ (8)

$$\left[u' + r^{-1}(u + v^{\bullet}) + \bar{\mu}w'\right]\Big|_{z=h} = -p(r,\varphi)A^{-1},$$

$$[w' + u']\big|_{z=h} = q_1(r,\varphi)G^{-1}, \qquad [v' + r^{-1}w^{\bullet}]\big|_{z=h} = q_2 G^{-1}, \tag{9}$$

$$[v(r,\varphi,z),\ u^{\bullet}(r,\varphi,z),\ w^{\bullet}(r,\varphi,z)]\big|_{\varphi=0,\omega} = 0. \tag{10}$$

3. Сперва рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда плита (1) загружена только собственным весом, т.е. необходимо решить уравнения (6) при граничных условиях (8) и (10), а вместо (9) с учетом (7) должны выполняться условия

$$[u' + r^{-1}(u + v^{\bullet}) + \bar{\mu}w']\big|_{z=h} = 0,$$

$$[w' + u']\big|_{z=h} = 0, \qquad [v' + r^{-1}w^{\bullet}]\big|_{z=h} = 0. \tag{11}$$

Для решения сформулированной краевой задачи предварительно построим частное решение неоднородных уравнений (6). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что таковым будет

$$u^{(\gamma)}(r,\varphi,z)=0,\qquad v^{(\gamma)}(r,\varphi,z)=0,\qquad w^{(\gamma)}(r,\varphi,z)=\frac{\gamma z^2}{2\mu_* G},$$

$$\mu_*=\mu_0+1=2(1-\mu)\mu_0\,. \tag{12}$$

Решение краевой задачи (6), (8***а***), (10) и (11) строим в виде

$$u=u^{(\gamma)}+u^0,\qquad v=v^{(\gamma)}+v^0,\qquad w=w^{(\gamma)}+w^0, \tag{13}$$

где u^0, v^0, w^0 – общее решение однородной $(\gamma=0)$ системы уравнений Ламе (6), соответствующие ему напряжения будем помечать тем же верхним индексом. В результате для этих функций должны выполняться такие граничные условия:

$$[\sigma_z^0, r_{zr}^0, \tau_{z\varphi}^0]|_{z=h}=[-\gamma h,0,0],\;\; [v^0, u^{0\bullet}, w^{0\bullet}]|_{\varphi=0,\omega}=0,\;\; [w^0, u^{0\prime}, v^{0\prime}]|_{z=0}=0\,. \tag{14}$$

Легко убедиться, что всем этим условиям, в том числе однородным уравнениям (6), удовлетворяет решение

$$u^0(r,\varphi,z)=v^0(r,\varphi,z)=0,\qquad w^0(r,\varphi,z)=-(G\mu_*)^{-1}\gamma hz\,. \tag{15}$$

Поскольку решение краевой задачи (6), (8***б***), (10) и (11) приводит к граничным условиям (14), в которых последнее условие заменяется на такое: $[u^0, v^0, w^0]|_{z=0}=0$, то и оно тоже удовлетворяется решением (15). Следовательно, попутно получено элементарное решение

$$u(r,\varphi,z)=v(r,\varphi,z)=0,\qquad w(r,\varphi,z)=-(G\mu_*)^{-1}pz \tag{16}$$

краевой задачи для уравнений (6) при $\gamma=0$ и заменой граничного условия (3) на условие

$$\sigma_z(r,\varphi,h)=-p,\qquad p=\text{const},\qquad \tau_{zr}(r,\varphi,h)=\tau_{z\varphi}(r,\varphi,h)=0\,. \tag{17}$$

Одновременно получено элементарное решение

$$u(r,\varphi,z)=v(r,\varphi,z)=0,\qquad w(r,\varphi,z)=(G\mu_*)^{-1}\gamma z(z/2-h),$$

$$\sigma_z=\gamma(z-h), \tag{18}$$

краевой задачи (6), (8), (10) и (11). Оно вытекает из соотношений (13), (12) и (15).

Наличие элементарных решений в рассматриваемых задачах объясняется следующим.

Так как в рассматриваемых задачах выполнено условие скользящей заделки на гранях $\varphi=0,\omega$, а грань $z=h$ загружена только равномерно распределенной нормальной нагрузкой, то для плиты (1) выполняется гипотеза плоских сечений, параллельных основанию $z=0$, и решение сформулированных задач можно получить, используя теорию сопротивления материалов. Это и приводит к полученным элементарным формулам.

Таким образом, учесть действие собственного веса на напряженное состояние плиты (1) можно с помощью элементарного решения (18). Поэтому займемся решением поставленных краевых задач для однородных уравнений Ламе (8) при граничных условиях (8), (9) и (10), при которых гипотеза плоских сечений не имеет места.

4. Чтобы свести эти трехмерные краевые задачи к одномерным, будем последовательно исключать переменные φ и r подходящими интегральными преобразованиями. Для исключения переменной φ и удовлетворения краевым условиям (10) применим к уравнениям Ламе и краевым условиям (8) и (9) конечное $\cos$ - и $\sin$ - преобразования Фурье

$$\begin{Bmatrix} u_n(r,z) \\ w_n(r,z) \end{Bmatrix} = \int_0^{\omega} \cos\alpha_n\varphi \begin{Bmatrix} u(r,\varphi,z) \\ w(r,\varphi,z) \end{Bmatrix} d\varphi, \qquad \alpha_n = \frac{\pi n}{\omega}, \qquad n = 0,1,\dots,$$

$$v_n(r,z) = \int_0^{\omega} \sin\alpha_n\varphi v(r,\varphi,z)\,d\varphi, \qquad n = 1,2,\dots. \tag{19}$$

Тогда уравнения Ламе и граничные условия (9) и (8) примут вид

$$D_r u_r - (\alpha_n^2 + 1)r^{-2}u_n + u_n'' - 2\alpha_n r^{-2}v_n + \mu_0[D_r u_n -$$

$$- r^{-2}(u_n + \alpha_n v_n) + \alpha_n r^{-1}\partial_r v_n + \partial_r w_n'] = 0, \quad n = 0,1,\dots,$$

$$D_r v_n - (\alpha_n^2 + 1)r^{-2}v_n + v_n'' - 2\alpha_n r^{-2}u_n - \mu_0\alpha_n[r^{-1}\partial_r u_n +$$

$$+ r^{-2}(u_n + \alpha_n v_n) + r^{-1}w_n'] = 0, \qquad n = 1,2,\dots,$$

$$D_r w_n - (\alpha_n r^{-1})^2 w_n + w_n'' + \mu_0[u_n'' + (u_n + \alpha_n v_n)r^{-1} + w_n''] = 0,$$

$$n = 0,1,\dots, \tag{20}$$

$$u_n'(r,h) + \frac{u_n(r,h) + \alpha_n v_n(r,h)}{r} + \bar{\mu} w_n'(r,h) = -\frac{p_n(r)}{A},$$

$$w_n'(r,h) + u_n'(r,h) = \frac{q_{1n}(r)}{G},$$

$$v_n'(r,h) - \frac{\alpha_n}{r} w_n(r,h) = \frac{q_{2n}}{G}, \qquad \begin{Bmatrix} p_n(r) \\ q_{1n}(r) \end{Bmatrix} = \int_0^{\omega} \begin{Bmatrix} p(r,\varphi) \\ q_1(r,\varphi) \end{Bmatrix} \cos\alpha_n\varphi\,d\varphi,$$

$$q_{2n}(r) = \int_0^{\omega} q_2(r,\varphi)\sin\alpha_n\gamma\,d\varphi, \tag{21}$$

а) $\quad [w_n(r,0), u_n'(r,0), v_n'(r,0)] = 0,$

б) $\quad [u_n(r,0), v_n(r,0), w_n(r,0)] = 0.$ $\qquad (22)$

Исключение переменной r в полученных двумерных краевых задачах (20)−(22) подходящим интегральным преобразованиям не является простым. Поэтому эту операцию совершим в два этапа. Сперва рассмотрим более трудный случай, когда в полученной краевой задаче $n \neq 0$ и $n \geq 1$, а затем случай $n = 0$. Такое разбиение также диктуется следующим. Если будут решены краевые задачи (20)−(22), то искомые смещения согласно известным [5] формулам обращения для интегральных преобразований (19) можно найти по формулам

$$\begin{Bmatrix} u(r,\varphi,z) \\ w(r,\varphi,z) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{Bmatrix} u_0(r,z) \\ w_0(r,z) \end{Bmatrix} + \frac{2}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\alpha_n\varphi \begin{Bmatrix} u_n(r,z) \\ w_n(r,z) \end{Bmatrix},$$

$$v_n(r,\varphi,z) = \frac{2}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\alpha_n\varphi v_n(r,z). \tag{23}$$

Перейдем к построению решения краевых задач (20)−(22) для случая $n \neq 0$, $n \geq 1$. Как уже указывалось выше, их следует свести к одномерным с помощью интегрального преобразования по переменной r. Чтобы иметь такую возможность, необходимо преобразовать их путем введения новых неизвестных функций по формулам

$$W_n^{(1)}(r,z) = u_n(r,z) + v_n(r,z),$$

$$W_n^{(2)}(r,z) = u_n(r,z) - v_n(r,z),$$

$$W_n^{(3)}(r,z) = w_n(r,z),$$

$$2u_n(r,z) = W_n^{(1)}(r,z) + W_n^{(2)}(r,z), \quad 2v_n(r,z) = W_n^{(1)}(r,z) - W_n^{(2)}(r,z) \qquad (24)$$

и предварительно учесть, что если ввести параметр $æ = 3 - 4\mu$, то через него можно выразить параметры, содержащиеся в равенствах (20)–(22), по формулам

$$\mu_0 = \frac{2}{æ - 1}, \quad 1 + \mu_0 = \frac{æ + 1}{æ - 1} = æ_*, \quad \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} = \frac{2}{æ + 1}, \quad \bar{\mu} = \frac{æ + 1}{3 - æ}. \qquad (25)$$

После указанных преобразований система уравнений (20) приобретет такой вид, что если ввести матричный дифференциальный оператор $L_n^{(2)}$, искомый вектор $\mathbf{W}_n(r,z)$ и вспомогательную матрицу $\mathbf{H}_n(r,s)$ по формулам

$$L_n^{(2)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{æ}{æ-1}\left(D_r - \frac{(\alpha+1)^2}{r^2}\right) + \partial_z^2 & \frac{1}{æ-1}\left[D_r - \frac{2\alpha}{r}\partial_r + \frac{\alpha^2-1}{r^2}\right] & \frac{2}{æ-1}\partial_z\left(\partial_r - \frac{\alpha}{r}\right) \\ \frac{1}{æ-1}\left[D_r + \frac{2\alpha}{r}\partial_r + \frac{\alpha^2-1}{r^2}\right] & \frac{æ}{æ-1}\left(D_r - \frac{(\alpha-1)^2}{r^2}\right) + \partial_z^2 & \frac{2}{æ-1}\partial_z\left(\partial_r + \frac{\alpha}{r}\right) \\ \frac{1}{æ+1}\partial_z\left(\partial_r + \frac{\alpha+1}{r}\right) & \frac{1}{æ+1}\partial_z\left(\partial_r - \frac{\alpha-1}{r}\right) & æ_*^{-1}\left(D_r - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) + \partial_z^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}_n(r,z) = \begin{pmatrix} W_n^{(1)}(r,z) \\ W_n^{(2)}(r,z) \\ W_n^{(3)}(r,z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_n(r,s) = \begin{pmatrix} J_{\alpha+1}(rs) & 0 & 0 \\ 0 & J_{\alpha-1}(rs) & 0 \\ 0 & 0 & J_\alpha(rs) \end{pmatrix}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad (26)$$

то ее можно записать в виде одного векторного уравнения

$$L_n^{(2)}\mathbf{W}(r,z) = 0, \qquad 0 < r < \infty, \qquad 0 < z < h. \qquad (27)$$

Здесь и всюду ниже для упрощения записей принято $\alpha_n \equiv \alpha$. Граничные условия (21), (22) в новых функциях запишутся в виде

$$\left[(W_n^{(1)} + W_n^{(2)})' + \frac{W_n^{(1)} + W_n^{(2)}}{r} + \frac{\alpha}{r}(W_n^{(1)} - W_n^{(2)}) + 2\bar{\mu}w_n'\right]\Bigg|_{z=h} = -\frac{2p_n(r)}{A},$$

$$\left[W_n^{(1)\prime} - \frac{\alpha}{r}w_n + w_n'\right]\Bigg|_{r=h} = \frac{q_{1n}(r) + q_{2n}(r)}{G},$$

$$\left[W_n^{(2)\prime} + \frac{\alpha}{r}w_n + w_n'\right]\Bigg|_{r=h} = \frac{q_{1n}(r) - q_{2n}(r)}{G}, \qquad (28)$$

а) $\qquad [w_n(r,0), W_n^{(1)\prime}(r,0), W_n^{(2)\prime}(r,0)] = 0,$

б) $\qquad [w_n(r,0), W_n^{(1)}(r,0), W_n^{(2)}(r,0)] = 0. \qquad (29)$

Чтобы привести двумерное уравнение (27) к одномерному относительно трансформанты

$$\mathbf{W}_{ns}(z) = \int_0^\infty r\mathbf{H}_n(r,s)\mathbf{W}(r,z)\,dr = \mathrm{col}\left\{W_{ns}^{(1)}(z), W_{ns}^{(2)}(z), W_{ns}^{(3)}(z)\right\} =$$

$$= \mathrm{col}\left\{\int_0^\infty rJ_{\alpha+1}(rs)W_n^{(1)}(r,z)\,dr, \int_0^\infty rJ_{\alpha-1}(rs)W_n^{(2)}(r,z)\,dr, \int_0^\infty rJ_\alpha(rs)w_n(r,z)\,dr\right\}, \quad (30)$$

применим к уравнению (27) векторное интегральное преобразование Ханкеля с ядром $\mathbf{H}_n(r,s)$, определяемым формулой из (26), т. е. выполним операцию

$$\int_0^\infty r\mathbf{H}_n(r,s)L_n^{(2)}\mathbf{W}_n(r,z)\,dr = L_s^{(2)}\mathbf{W}_{ns}(z) = 0, \qquad 0 < z < h, \quad (31)$$

где $L_s^{(2)}$ – одномерный дифференциальный оператор, имеющий вид

$$L_s^{(2)} = \begin{pmatrix} \partial_z^2 - æ(æ-1)^{-1}s^2 & (æ-1)^{-1}s^2 & -2s(æ-1)^{-1}\partial_z \\ (æ-1)^{-1}s^2 & \partial_z^2 - æ(æ-1)^{-1}s^2 & 2s(æ-1)^{-1}\partial_z \\ (æ+1)^{-1}s\partial_z & -(æ+1)^{-1}s\partial_z & \partial_z^2 - æ_*^{-1}s^2 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Однако, чтобы краевая задача (27), (28) и (29) полностью перешла в одномерную относительно трансформант $W_{ns}^{(1)}(z)$, $W_{ns}^{(2)}(z)$, $w_{ns}(z)$, необходимо записать граничные условия (28), (29) тоже в виде указанных трансформант. Для этого согласно (30) их следует обынтегрировать с функциями Бесселя, входящими в матрицу $\mathbf{H}_n(r,s)$ из (26). В результате граничные условия (28), (29) переходят в следующие:

$$s[W_{ns}^{(1)}(h) - W_{ns}^{(2)}(h)] + 2\bar{\mu}w_{ns}(h) = -2A^{-1}p_{ns},$$

$$W_{ns}^{(1)\prime} - sw_{ns}(h) = G^{-1}q_s^+,$$

$$W_{ns}^{(2)}(h) + sw_{ns}(h) = G^{-1}q_s^-,$$

$$\{p_{ns}, q_s^+\} = \int_0^\infty rJ_{\alpha+1}(rs)\{p_n(r), (q_{1n} + q_{2n})\}\,dr,$$

$$q_s^- = \int_0^\infty rJ_{\alpha-1}(rs)[q_{1n}(r) - q_{2n}(r)]\,dr, \quad (33)$$

а) $\qquad [w_{ns}(0), W_{ns}^{(1)\prime}(0), W_{ns}^{(2)\prime}(0)] = 0,$

б) $\qquad [w_{ns}(0), W_{ns}^{(1)}(0), W_{ns}^{(2)}(0)] = 0. \quad (34)$

5. Займемся построением решения одномерных краевых задач (31), (33) и (34). Для этого следует построить [4] решение $Y_s(z)$ матричного дифференциального уравнения

$$L_s^{(2)}Y_s(z) = 0, \qquad 0 < z < h. \quad (35)$$

С этой целью покажем, что

$$L_s^{(2)}e^{\xi z}\mathbf{I} = \mathbf{M}_s(\xi)e^{\xi z}\mathbf{I}, \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_s(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2 - æ(æ-1)^{-1}s^2 & (æ-1)^{-1}s^2 & -2(æ-1)^{-1}s\xi \\ (æ-1)^{-1}s^2 & \xi^2 - æ(æ-1)^{-1}s^2 & 2(æ-1)^{-1}s\xi \\ (æ+1)^{-1}s\xi & -(æ+1)^{-1}s\xi & \xi^2 - æ_*^{-1}s^2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

При этом обратная к матрице $\mathbf{M}_s(\xi)$ будет иметь вид

$$\mathbf{M}_s^{-1}(\xi) = \frac{1}{(æ+1)(\xi^2 - s^2)^2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (æ+1)\xi^2 - æ s^2 & -s^2 & 2æ_*\xi s \\ -s^2 & (æ+1)\xi^2 - æ s^2 & -2æ_*\xi s \\ -\xi s & \xi s & æ_*[(æ-1)\xi^2 - (æ+1)s^2] \end{pmatrix}. \quad (37)$$

На основании (36) и (37) решением уравнения (35) будет матрица

$$\mathbf{Y}_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{\xi z}\mathbf{M}_s^{-1}(\xi)\,d\xi, \quad (38)$$

где C – замкнутый контур, охватывающий полюса матриц (37). Как видим, она имеет два двукратных полюса $\xi = s$ и $\xi = -s$.

Если в качестве контура C в (38) взять контур C_+, охватывающий полюс $\xi = s$, то получим решение $\mathbf{Y}_s^+(z)$, растущее при $z \to \infty$. Контур C_-, охватывающий полюс $\xi = -s$, приведет к решению $\mathbf{Y}_s^-(z)$, убывающему при $z \to \infty$. Если ввести интегралы

$$I_{s_\pm}^{(j)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\pm} \frac{\xi^j e^{\xi z}}{(\xi^2 - s^2)^2}\,d\xi = \operatorname*{Res}_{\xi=\pm s} \frac{\xi^j e^{\xi z}}{(\xi - s)^2(\xi + s)^2} = \begin{cases} f_+^{(j)\prime}(\xi)\big|_{\xi=s} \\ f_-^{(j)\prime}(\xi)\big|_{\xi=-s} \end{cases},$$

$$f_\pm^{(j)}(\xi) = \frac{\xi^j e^{\xi z}}{(\xi \pm s)^2}, \quad j = 0,1,2, \quad (39)$$

то названные решения можно выразить на основании (38) и (37) через эти интегралы по формуле

$$\mathbf{Y}_s^\pm(z) =$$

$$= \begin{pmatrix} (æ+1)_{s_\pm}^{(2)}(z) - æ s^2 I_{s_\pm}^{(0)}(z) & -s^2 I_{s_\pm}^{(0)}(z) & 2sæ_* I_{s_\pm}^{(1)}(z) \\ -s^2 I_{s_\pm}^{(0)}(z) & (æ+1)I_{s_\pm}^{(2)}(z) - æ s^2 I_{s_\pm}^{(0)}(z) & -2sæ_* I_{s_\pm}^{(1)}(z) \\ -sI_{s_\pm}^{(1)}(z) & sI_{s_\pm}^{(1)}(z) & æ_*[(æ-1)I_{s_\pm}^{(2)}(z) - (s+1)s^2 I_{s_\pm}^{(0)}(z)] \end{pmatrix}.$$

После вычисления интегралов (39) и отбрасывания общих множителей во всех элементах полученных матриц эти формулы переходят в следующие:

$$\mathbf{Y}_s^+(z) = e^{sz}\begin{pmatrix} (2æ+1+sz)s^{-1} & -(sz-1)s^{-1} & 2æ_* z \\ -(sz-1)s^{-1} & (2æ+1+sz)s^{-1} & -2æ_* z \\ -z & z & 2æ_*(æ - sz)s^{-1} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$\mathbf{Y}_s^-(z) =$$

$$= e^{-sz}\begin{pmatrix} -(2æ+1-sz)s^{-1} & -(1+sz)s^{-1} & -2æ_* z \\ -(1+sz)s^{-1} & (æ+1)(sz-1)s^{-1} & æ_* z \\ z & -z & -2æ_*(æ+sz)(æ+1)s^{-1} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Располагая двумя линейно независимыми решениями матричного уравнения (35), можем записать общее решение одномерных краевых задач (31), (33) и (34) в виде [4]

$$\mathbf{W}_{ns}(z) = \mathbf{Y}_s^+(z)\begin{Bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \\ C_3(s) \end{Bmatrix} + \mathbf{Y}_s^-(z)\begin{Bmatrix} C_4(s) \\ C_5(s) \\ C_6(s) \end{Bmatrix}. \qquad (42)$$

Если затем воспользоваться представлениями (40) и (41), то приходим к формулам

$$W_{ns}^{(1)}(z) = e^{sz}\left[(2æ + 1 + sz)s^{-1}C_1(s) - (sz-1)s^{-1}C_2(s) + 2æ_* zC_3(s)\right] -$$

$$- e^{-sz}\left[(2æ + 1 - sz)s^{-1}C_4(s) + (1+sz)s^{-1}C_5(s) + 2æ_* zC_6(s)\right],$$

$$W_{ns}^{(2)}(z) = -e^{sz}\left[(sz-1)s^{-1}C_1(s) - (2æ + 1 + sz)s^{-1}C_2(s) + 2æ_* zC_3(s)\right] +$$

$$+ e^{-sz}\left[(æ+1)(sz-1)s^{-1}C_5(s) - (1+sz)s^{-1}C_4(s) + æ_* zC_6(s)\right],$$

$$w_{ns}(z) = -e^{sz}\left[z(C_1 - C_2) + 2æ_* s^{-1}(sz - æ)C_3(s)\right] +$$

$$+ e^{-sz}z\left[(C_4 - C_5) - 2æ_*(æ + sz)s^{-1}C_6\right]. \qquad (43)$$

Содержащиеся здесь шесть произвольных констант, зависящих от параметра s, следует находить из шести граничных условий для каждой из рассматриваемых краевых задач согласно (33) и (34). Выполнив соответствующие операции, например, в случае краевых условий (33) при $q_{1n}(r) = q_{2n}(r) = 0$ и (34$\boldsymbol{a}$), найдем, что

$$C_1(s) = -2A^{-1}p_{ns}(æ-3)(æ+1)e^{-s_*}C_1^*(s_*)\Delta^{-1}(s_*),$$

$$C_2(s) = 2A^{-1}p_{ns}(æ-3)e^{-s_*}C_2^*(s_*)\Delta^{-1}(s_*),$$

$$C_3(s) = -2A^{-1}p_{ns}(æ-3)(æ-1)e^{-s_*}C_3^*(s_*)\Delta^{-1}(s_*),$$

$$C_4(s) = -C_1(s),$$

$$C_5(s) = -2A^{-1}p_{ns}(æ-3)(æ+1)e^{-s_*}C_5^*(s_*)\Delta^{-1}(s_*),$$

$$C_6(s) = C_3(s), \qquad s_* = hs, \qquad (44)$$

$$C_1^*(s_*) = 8(æ+1)(2s_* + 1 - æ) + p_2^{1,1}(s_*)e^{-2s_*} + p_2^{1,2}(s_*)e^{-4s_*},$$

$$C_2^*(s_*) = -8[2s_* + 1 - æ + (æ+1)^2] + p_2^{2,1}(s_*)e^{-2s_*} + p_2^{2,2}(s_*)e^{-4s_*},$$

$$C_3^*(s_*) = 8(æ+1)(2s_* + æ + 1) + p_2^{3,1}(s_*)e^{-2s_*} + p_2^{3,2}(s_*)e^{-4s_*},$$

$$C_4^*(s) = -C_1^*(s),$$

$$C_5^*(s_*) = 4[2s_*(1+2æ) + 1 - æ - 2æ^2] + p_2^{5,1}(s_*)e^{-2s_*} + p_2^{5,2}(s_*)e^{-2s_*},$$

$$C_6^*(s) = C_3^*(s),$$

$$\Delta(s_*) = 8(æ-1)(æ+1)^2[s_*(æ+1) + 3 - æ]p_2^{0,1}(s_*)e^{-2s_*} +$$

$$+ p_3^{0,2}(s_*)e^{-4s_*} + p_2^{0,3}e^{-6s_*}. \qquad (45)$$

Формулы для многочленов второй $p_2^{j,k}(s_*)$ и третьей $p_3^{j,k}(s_*)$ степени из-за громоздкости не выписываем.

Если учесть (44), (45) и ввести обозначение

$$A_n = 2A^{-1}p_{ns}(æ-3)(æ+1)e^{-s_*}s^{-1}\Delta^{-1}(s_*)\,,$$

то для трансформант искомых функций получим окончательные формулы в виде

$$W_{ns}^{(1)}(z) = -A_n\{2C_1^*(s_*)[(2æ+1)\,\mathrm{ch}\,sz + sz\,\mathrm{sh}\,sz] +$$

$$+(æ+1)^{-1}C_2^*(s_*)(sz-1)e^{sz} + 4ææ_*^{-1}C_3^*(s_*)sz\,\mathrm{sh}\,sz -$$

$$-C_5^*(s_*)(1+sz)e^{-sz}\}\,,$$

$$W_{ns}^{(2)}(z) = -A_n\{-2C_1^*(s_*)(sz\,\mathrm{sh}\,sz - \mathrm{ch}\,sz) -$$

$$-(æ+1)^{-1}C_2^*(s_*)(2æ+1+sz)e^{sz} - C_3^*(s_*)(æ-1)sz\,\mathrm{sh}\,sz +$$

$$+C_5^*(s_*)(æ+1)(sz-1)e^{-sz}\}\,,$$

$$w_{ns}(z) = A_n\{-2C_1^*(s_*)sz\,\mathrm{ch}\,sz + (æ+1)^{-1}C_2^*(s_*)sze^{sz} -$$

$$-4(æ-1)^{-1}C_3^*(s_*)(æ\,\mathrm{sh}\,sz - sz\,\mathrm{ch}\,sz) - C_5^*(s_*)sze^{-sz}\}\,. \qquad (46)$$

Формулы аналогичного типа можно получить и в случае краевых условий (33) при $q_{1n} = q_{2n} = 0$ и (34*б*). Если q_{1n} и q_{2n} отличны от нуля, то формулы будут немного сложнее.

Для искомых функций $W_n^{(1)}(r,z)$, $W_n^{(2)}(r,z)$ и $w_n(r,z)$, пользуясь формулами обращения для преобразования Ханкеля [5], получаем

$$W_n^{(1)} = \int_0^\infty sJ_{\alpha_n+1}(rs)W_{ns}^{(1)}(z)\,ds\,,$$

$$W_n^{(2)} = \int_0^\infty sJ_{\alpha_n-1}(rs)W_{ns}^{(2)}(z)\,ds\,,$$

$$w_n = \int_0^\infty sJ\alpha_n(rs)w_{ns}(z)\,ds\,.$$

Используя их, а также последние два равенства из (24), полностью определим в искомых смещениях (23) слагаемые в виде рядов. Осталось определить только функции $u_0(r,z)$ и $w_0(r,z)$.

6. Поэтому займемся построением решения краевых задач (20)−(22) в случае $n=0$. Искомыми функциями при этом будут $u_0(r,z)$, $w_0(r,z)$ и в силу (19) $v_0(r,z)=0$. Система уравнений (20) вырождается в систему из двух уравнений относительно указанных функций. Эту систему можно записать в виде одного векторного дифференциального уравнения и к нему следует добавить граничные условия

$$u_0'(r,h) + r^{-1}u_0(r,h) + \bar{\mu}w_0'(r,h) = -A^{-1}p_0(r)\,,$$

$$w_0'(r,h) + u_0'(r,h) = G^{-1}q_{10}(r)\,, \qquad (47)$$

а) $\quad w_0(r,0)=0, \qquad u_0'(r,0)=0\,,$

б) $\quad u_0(r,0)=0, \qquad w_0(r,0)=0\,, \qquad (48)$

вытекающие из (21), (22) при $n=0$.

Полученные двумерные краевые задачи будем решать по той же схеме, что и краевые задачи (27)–(29). Только здесь следует применить векторное интегральное преобразование Ханкеля с матричным ядром вида

$$\mathbf{H}_0(r,s) = \operatorname{diag}\{J_1(rs),\ J_0(rs)\}.$$

В результате для трансформант искомых функций

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{0s}(z) \\ w_{0s}(z) \end{array} \right\} = \int\limits_0^\infty r \left\{ \begin{array}{c} u_0(r,z)J_1(rs) \\ w_0(r,z)J_0(rs) \end{array} \right\} dr\,, \tag{49}$$

например, для краевой задачи с граничными условиями (47), (48*a*) при $q_{10}(r) = 0$ получим формулы

$$u_{0s}(z) = -\frac{2A^{-1}(æ-3)p_{0s}e^{-s_*}}{\Delta_*(s_*)}\left\{\frac{(æ\,\mathrm{sh}\,sz + sz\,\mathrm{ch}\,sz)}{s}[2s_* + æ + 1 + \right.$$

$$\left. + e^{-2s_*}(2s_* - æ - 1)] + (æ-1)æ_* z\,\mathrm{sh}\,sz(1-e^{-s_*})\right\},$$

$$p_{0s} = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\omega p(r,\varphi)rJ_0(rs)\,dr\,d\varphi\,,$$

$$w_{0s}(z) = \frac{2A^{-1}(æ-3)p_{0s}e^{-s_*}}{\Delta_*(s_*)}\left\{z\,\mathrm{sh}\,sz + (æ-1)\left(\frac{æ_*æ}{s}\,\mathrm{sh}\,sz + 2æ_* z\right)\right\},$$

$$\Delta_* = 4(s_*^2 + æ) + 2s_*(1+3æ) + 1 + 3æ^2 + 4æ(1-æ)s_*e^{-2s_*} -$$

$$- e^{-4s_*}[4(s_*^2 + æ) - 2s_*(1+3æ) + 1 + æ(4+3æ)]. \tag{50}$$

Аналогичные формулы можно получить и для краевой задачи с граничными условиями (33), (34*a*) при $q_{10}(r) = 0$. В случае $q_{10}(r) \neq 0$ формулы будут немного сложнее.

Обратив [5] трансформанты Ханкеля (49), получим следующие формулы:

$$u_0(r,z) = \int\limits_0^\infty sJ_1(rs)u_{0s}(z)\,ds, \qquad w_0(r,z) = \int\limits_0^\infty sJ_0(rs)w_{0s}(z)\,ds.$$

Подставив сюда выражения (50) либо аналогичные выражения для других краевых задач, получим окончательные формулы для искомых функций $u_0(r,z)$ и $w_0(r,z)$ и тем самым завершим построение точного решения поставленных краевых задач теории упругости.

1. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
2. *Попов Г. Я.* О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и об их применении к краевым задачам механики // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 12. – С. 46–73.
   То же: *Popov G. Ya.* New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 12. – P. 1400–1424.
3. *Попов Г. Я.* Точное решение первой основной задачи для толстой клиновидной плиты // Докл. РАН. – 2001. – **381**, № 6. – С. 782– 785.
4. *Попов Г. Я., Абдыманапов С. А., Ефимов В. В.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Рауан, 1999. – 113 с.
5. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
6. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
7. *Qian Min-gang, Yan Zong-da.* Solution of sector plate by Fourier–Bessel series // Appl. Math. Mech. – 1985. – **6**, No. 4. – P. 367–385.
8. *Xu R. Q.* Three-dimensional exact solutions for the free vibration of laminated transversely isotropic circular, annular and sectorial plates with unusual boundary conditions // Arch. Appl. Mech. – 2008. – **78**, No. 7. – P. 543–558.

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗМІШАНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕНОЇ КЛИНОПОДІБНОЇ ПЛИТИ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

Побудовано точний розв'язок змішаної крайової задачі теорії пружності для нескінченої клиноподібної плити $0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le \omega, 0 \le z \le h$ *з урахуванням власної ваги. На гранях плити* $\varphi = 0, \varphi = \omega$ *виконуються умови ковзного защемлення. На грані* $z = h$ *виконуються умови першої основної задачі теорії пружності. На грані* $z = 0$ *можуть виконуватись два типи граничних умов. У випадку, коли на плиту діє тільки власна вага, побудовано простий елементарний розв'язок. Це дозволило досліджувати напружений стан плити лише в залежності від навантаження, заданого у постановці задачі. Для цього за допомогою відповідних інтегральних перетворень за змінними* φ *та* r *сформульовані граничні задачі зведено до векторної одномірної крайової задачі. Для отримання її точного розв'язку застосовано векторне інтегральне перетворення Ганкеля у поєднанні з теорією матричних диференціальних рівнянь другого порядку.*

EXACT SOLUTION OF THE MIXED BOUNDARY-VALUE ELASTICITY PROBLEM FOR INFINITE SECTORIAL PLATE TAKING INTO ACCOUNT THE PROPER WEIGHT

The exact solution of the mixed elasticity boundary-value problem for the infinite sectorial plate $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi \le \omega, 0 \le z \le h$, *with regard of the proper weight is constructed. On the plate's faces* $\varphi = 0, \varphi = \omega$ *the conditions of the smooth contact are given. On the edge* $z = h$ *the conditions of the first main elasticity problem are satisfied. On the face* $z = 0$ *one of the two boundary conditions' types could be given. The simple elementary solution is obtained for case when only the proper weight is loading to the plate. It allowed to consider the plate's stress state depending only on the loading that is given in the problem's statement. For this aim the formulated boundary-value problem is reduced to the vector one-dimensional boundary-value problem with using appropriate integral transforms with respect to the variables* φ *and* r. *The Hankel's vector integral transform in combination with the theory of the second order matrix differential equations are applied for the exact solution construction.*

[1] Одесс. нац. ун-т им. И. И. Мечникова, Одесса,
[2] Алжир. нац. политехн. школа, Алжир

Получено
14.02.11