

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии прямоугоньных анизотропных пластин в пространственной постановке для одной плоскости упругой симметрии. Исходная задача описывается системой трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. После разделения переменных и использования метода сплайн-коллокации в двух координатных направлениях задача сводится к системе обычных дифференциальных уравнений высокого порядка с граничными условиями на краях. Полученная краевая задача решается устойчивым методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты для случая жесткой заделки и шарнирного опирания и различной геометрии пластин.

Прямоугоньные толстостенные пластины находят широкое применение во многих отраслях современной техники. Для обеспечения прочности и надежности при эксплуатации соответствующих элементов конструкций, важным является вопрос получения информации о напряженно-деформированном состоянии таких объектов. Проведение исследования на основании трехмерной теории упругости связано с большими трудностями вычислительного характера. Поэтому существует только незначительное количество публикаций, посвященных данному вопросу. Результатам теоретических и экспериментальных исследований по распределению перемещений и напряжений в прямоугоньных толстостенных пластинах, полученным на основе решения краевых задач в линейно-упругой постановке, посвящены работы [11, 12]. В них рассмотрены пластины с различными краевыми условиями на торцах.

В этой работе предложен эффективный численно-аналитический подход к исследованию напряженно-деформированного состояния прямоугоньных толстостенных анизотропных пластин с одной плоскостью упругой симметрии на основании теории упругости. Подход базируется на применении метода сплайн-аппроксимации в двух направлениях и метода коллокации, при помощи которых исходная трехмерная краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к соответствующей задаче для системы обычных дифференциальных уравнений высокого порядка [13–18]. Полученная система решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Решение двумерных краевых задач теории пластин и оболочек на основании метода сплайн-коллокации проводилось в [7–10].

Рассмотрим уравнения механики анизотропного тела [1–6].

Первая группа уравнений выражает условия равновесия объектов. Их называют *статическими уравнениями*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  удовлетворяют закон парности касательных напряжений:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{zy} = \sigma_{yz}. \quad (1')$$

Вторая группа уравнений связывает деформации элемента тела с функциями, которые выражают перемещения его точек. Они носят название *геометрических уравнений*:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2)$$

В случае анизотропного тела закон Гука примет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{14}\sigma_{xy} + \alpha_{15}\sigma_{yz} + \alpha_{16}\sigma_{xz}, \\ \varepsilon_y &= \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{24}\sigma_{xy} + \alpha_{25}\sigma_{yz} + \alpha_{26}\sigma_{xz}, \\ \varepsilon_z &= \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{34}\sigma_{xy} + \alpha_{35}\sigma_{yz} + \alpha_{36}\sigma_{xz}, \\ \varepsilon_{xy} &= \alpha_{14}\sigma_{xx} + \alpha_{24}\sigma_{yy} + \alpha_{34}\sigma_{zz} + \alpha_{44}\sigma_{xy} + \alpha_{45}\sigma_{yz} + \alpha_{46}\sigma_{xz}, \\ \varepsilon_{yz} &= \alpha_{15}\sigma_{xx} + \alpha_{25}\sigma_{yy} + \alpha_{35}\sigma_{zz} + \alpha_{45}\sigma_{xy} + \alpha_{55}\sigma_{yz} + \alpha_{56}\sigma_{xz}, \\ \varepsilon_{xz} &= \alpha_{16}\sigma_{xx} + \alpha_{26}\sigma_{yy} + \alpha_{36}\sigma_{zz} + \alpha_{46}\sigma_{xy} + \alpha_{56}\sigma_{yz} + \alpha_{66}\sigma_{xz}.\end{aligned}\quad (3)$$

Как видим, в соотношениях (3) присутствует двадцать одна независимая постоянная. На практике, как правило, рассматривают тела, для каждой точки которых существует одна плоскость упругой симметрии, касательная к координатной поверхности  $z = \text{const}$ . В этом случае количество независимых переменных становится равным тринадцати, и закон Гука для таких тел запишем как

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{14}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{24}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_z &= \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{34}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{xy} &= \alpha_{14}\sigma_{xx} + \alpha_{24}\sigma_{yy} + \alpha_{34}\sigma_{zz} + \alpha_{44}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yz} &= \alpha_{55}\sigma_{yz} + \alpha_{56}\sigma_{xz}, \\ \varepsilon_{xz} &= \alpha_{56}\sigma_{yz} + \alpha_{66}\sigma_{xz}.\end{aligned}\quad (4)$$

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  этой системы определяются из соотношений

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \frac{1}{E_x}, & \alpha_{12} &= -\frac{\nu_{yx}}{E_x} = -\frac{\nu_{xy}}{E_y}, & \alpha_{13} &= -\frac{\nu_{xz}}{E_z} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}, \\ \alpha_{14} &= -\frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = -\frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}}, & \alpha_{22} &= \frac{1}{E_y}, & \alpha_{23} &= -\frac{\nu_{zy}}{E_y} = -\frac{\nu_{yz}}{E_z}, \\ \alpha_{24} &= -\frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = -\frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}}, & \alpha_{33} &= \frac{1}{E_z}, \\ \alpha_{34} &= -\frac{\eta_{xy,z}}{E_z} = -\frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}}, & \alpha_{44} &= \frac{1}{G_{xy}}, & \alpha_{55} &= \frac{1}{G_{yz}}, \\ \alpha_{56} &= -\frac{\mu_{zx,yz}}{G_{yz}} = -\frac{\mu_{yz,zx}}{G_{xz}}, & \alpha_{66} &= \frac{1}{G_{xz}}.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь  $E_x, E_y, E_z$  – модули упругости по направлениям  $x, y, z$  соответственно;  $G_{yz}, G_{xz}, G_{xy}$  – модули сдвига для плоскостей, параллельных координатным плоскостям  $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$ ;  $\nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}$  – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие при растяжении вдоль осей координат;  $\mu_{zx,yz}, \mu_{yz,zx}$  – коэффици-

енты, которые характеризуют сдвиги в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, обусловленные касательными напряжениями, которые действуют в плоскостях, касательных к другим координатным плоскостям;  $\eta_{xy,x}$ ,  $\eta_{xy,y}$ ,  $\eta_{xy,z}$  – коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют сдвиги в координатных плоскостях, обусловленные нормальными напряжениями;  $\eta_{x,xy}$ ,  $\eta_{y,xy}$ ,  $\eta_{z,xy}$  – коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют удлинения, обусловленные касательными напряжениями;  $X, Y, Z$  – компоненты вектора массовых сил.

Далее из систем (1), (2), (4) путем элементарных преобразований получаем разрешающую систему трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, описывающую напряженно-деформированное состояние пластины:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} a_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} a_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} a_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} a_5 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} a_6 + \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} a_7 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} a_8 + a_9 X + a_{10} Y, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} b_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} b_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} b_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} b_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} b_5 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} b_6 + \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} b_7 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} b_8 + b_9 X + b_{10} Y, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ &+ c_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_7 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_8 Z.\end{aligned}\quad (6)$$

Коэффициенты  $a_i, b_i, c_i$  в системе (6) определяются механическими характеристиками материала с учетом соотношений (5).

На практике формулы для анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии получаются из формул для ортотропного тела путем поворота системы координат на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OZ$ .

При этом коэффициенты матриц упругой податливости  $a_{ij}$  и  $a'_{ij}$  в обоих случаях связаны между собой такими соотношениями:

$$\begin{aligned}a'_{11} &= \cos^4 \alpha a_{11} + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha a_{12} + \sin^4 \alpha a_{22} + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha a_{66}, \\ a'_{22} &= \sin^4 \alpha a_{11} + \cos^4 \alpha a_{22} + a_{66} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\ a'_{33} &= a_{33}, \quad a'_{44} = a_{44} \cos^2 \alpha + a_{55} \sin^2 \alpha, \quad a'_{55} = a_{44} \sin^2 \alpha + a_{55} \cos^2 \alpha, \\ a'_{66} &= (a_{11} + a_{22} - 2a_{12}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + a_{66} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2, \\ a'_{12} &= (a_{11} + a_{22} - a_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{12} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha), \\ a'_{13} &= a_{13} \cos^2 \alpha + a_{23} \sin^2 \alpha, \quad a'_{14} = 0, \quad a'_{15} = 0, \\ a'_{16} &= [2(a_{22} \sin^2 \alpha - a_{11} \cos^2 \alpha) + (a_{66} + 2a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha, \\ a'_{23} &= a_{13} \sin^2 \alpha + a_{23} \cos^2 \alpha, \quad a'_{24} = 0, \quad a'_{25} = 0, \\ a'_{26} &= [2(a_{22} \cos^2 \alpha - a_{11} \sin^2 \alpha) - (a_{66} + 2a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha, \\ a'_{34} &= 0, \quad a'_{35} = 0, \quad a'_{36} = 2(a_{23} - a_{13}) \sin \alpha \cos \alpha, \\ a'_{45} &= (a_{44} - a_{55}) \sin \alpha \cos \alpha, \quad a'_{46} = 0, \quad a'_{56} = 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Таким образом, зная коэффициенты  $a_{ij}$  в случае ортотропного тела и угол поворота  $\alpha$ , можем сформулировать корректно поставленную задачу для анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии.

Выполнены численные расчеты для случая шарнирного опирания и жесткой заделки пластины со сторонами  $a = b = 1$  и толщиной  $h = 0.1$  при  $X = 0, Y = 0, Z = 0$ . Материал, из которого сделана пластина, – стеклопластик СТЭТ. Его упругие характеристики (после обезразмеривания):

$$\begin{aligned} E_x &= 0.359 \cdot 10^6, & E_y &= 0.293 \cdot 10^6, & E_z &= 0,183 \cdot 10^6, \\ G_{xy} &= 0.076 \cdot 10^6, & G_{zx} &= 0.066 \cdot 10^6, & G_{yz} &= 0.063 \cdot 10^6, \\ \nu_{xy} &= 0.177, & \nu_{yz} &= 0.371, & \nu_{zx} &= 0.157. \end{aligned} \quad (8)$$

На гранях  $z = 0, z = h$  граничные условия имеют вид

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 1, \quad \sigma_{zx}|_{z=0} = \sigma_{zy}|_{z=0} = \sigma_{zz}|_{z=h} = \sigma_{zx}|_{z=h} = \sigma_{zy}|_{z=h} = 0.$$

На гранях  $x = 0, y = 0$  и  $x = 1, y = 1$  задаем условия или жесткой заделки, или шарнирного опирания.

Сравнение результатов в точке максимального прогиба из серединной плоскости  $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$  при заданных таким образом параметрах для различных значений углов поворота  $\alpha$  представлено в табл. 1.

Таблица 1

$\alpha, ^\circ$	$w(x_0, y_0, z_0)$	
	<i>Жесткая заделка</i>	<i>Шарнир</i>
0	71.7221961805555	185.998220486111
1	71.7222098550664	185.999621527778
15	72.1089774306551	191.7153125
30	73.1847039930556	205.847604166667
45	73.6756631944445	210.026779513889
60	73.1847039930555	205.847604166667
75	72.1089774306551	191.7153125
89	71.7222098550663	185.999621527779
90	71.7221961805555	185.998220486111

Количество точек коллокации в этом и всех последующих случаях брали равным 10, количество точек ортогонализации – 100. Как следует из анализа полученных результатов, функция прогиба симметрична и достигает своего максимума при  $\alpha = 45^\circ$ . Также при  $\alpha$ , близком к  $0^\circ$  и  $90^\circ$ , когда тело имеет свойства, близкие к ортотропным, видим существенную сходимость результатов, что еще раз подтверждает сходимость метода. Из табл. 1 следует, что при шарнирном опирании величина прогиба больше, чем при жесткой заделке.

В случае жесткой заделки были проведены расчеты для пластины с боковыми сторонами  $a = 1, b = 2$  и толщиной  $h = 0.1, 0.5$  (см. табл. 2.)

Таблица 2

$\alpha, ^\circ$	$w(x_0, y_0, z_0)$	
	$a = 1, b = 2, h = 0.1$	$a = 1, b = 2, h = 0.05$
0	120.734239583333	671.605381944444
1	120.744641493056	671.635173611111
15	124.043769097222	678.550581597222
30	132.138940972222	692.804782986111
45	140.289236111111	702.980373263889
60	143.554730902778	704.170512152777
75	141.886510416667	698.170512152777
89	140.256649305556	680.228159722222
90	140.247048611111	680.212360681111

Как видно из табл. 2, симметрии функции прогиба в данном случае уже не наблюдается, что объяснимо несимметричной геометрией пластины. Также следует заметить, что при увеличении длин боковых сторон пластины  $x, y$  при постоянной толщине прогиб увеличивается. И наоборот: при увеличении толщины пластины при одинаковой длине боковых сторон прогиб уменьшается. Отсюда можно сделать вывод, что величина прогиба существенно зависит от геометрии пластины.

Кроме того, был проведен сравнительный анализ значений функции прогиба  $w$  в точках  $p_1\left(0.3, 0.3, \frac{h}{2}\right)$ ,  $p_2\left(0.3, 0.7, \frac{h}{2}\right)$ ,  $p_3\left(0.7, 0.7, \frac{h}{2}\right)$ ,  $p_4\left(0.7, 0.3, \frac{h}{2}\right)$  при  $h = 0.1$  для пластины с боковыми сторонами  $a = 1, b = 1$  для случаев жесткой заделки (табл. 3) и шарнирного опирания (табл. 4).

Таблица 3

$\alpha, ^\circ$	$w(x_0, y_0, z_0)$			
	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$
0	41.77319791442	41.77319791442	41.77319791442	41.77319791442
1	41.75035330120	41.80075898695	41.75035330120	41.80075898695
15	41.85154101240	42.58949305551	41.85154101240	42.58949305551
30	42.43625118933	43.75318721238	42.43625118933	43.75318721238
45	42.76678567273	44.30446882167	42.76678567273	44.30446882167
60	42.43625118933	43.75318721238	42.43625118933	43.75318721238
75	41.85154101240	42.58949305551	41.85154101240	42.58949305551
89	41.75035330120	41.80075898695	41.75035330120	41.80075898695
90	41.77319791442	41.77319791442	41.77319791442	41.77319791442

Таблица 4

$\alpha, ^\circ$	$w(x_0, y_0, z_0)$			
	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$
0	124.3992572063	124.3992572063	124.3992572063	124.3992572063
1	127.5472437788	127.6697754460	127.5472437788	127.6697754460
15	131.1408337480	132.7830293878	131.1408337480	132.7830293878
30	139.910083781	141.137888861	139.910083781	141.137888861
45	142.234208671	143.937978441	142.234208671	143.937978441
60	139.910083781	141.137888861	139.910083781	141.137888861
75	131.1408337480	132.7830293878	131.1408337480	132.7830293878
89	127.5472437788	127.6697754460	127.5472437788	127.6697754460
90	124.3992572063	124.3992572063	124.3992572063	124.3992572063

Как видно из полученных результатов, функция прогиба в каждом из случаев для каждой из выбранных точек – симметрична и достигает своего максимума при  $\alpha = 45^\circ$ .

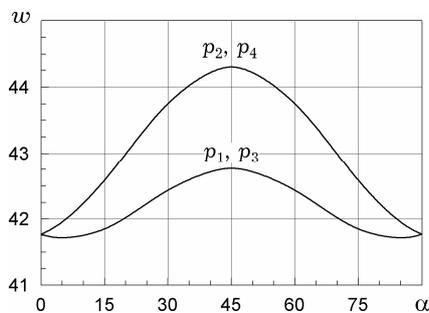


Рис. 1

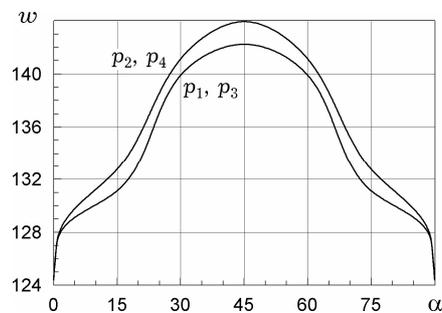


Рис. 2

Графики функций прогиба в точках  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , соответствующие значениям из табл. 3, табл. 4, представлены на рис. 1 (жестко закрепленная пластина) и рис. 2 (шарнирное опирание). Из представленных графиков следует, что функция прогиба пластины как функция пространственных координат  $x, y$  при произвольном значении угла поворота  $\alpha$  для симметрично закрепленной квадратной пластины симметрична относительно центра пластины и несимметрична относительно диагоналей.

Таким образом, предложенный численно-аналитический метод представляет собой эффективный алгоритм для исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных толстостенных пластин с одной плоскостью упругой симметрии.

1. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Соколова Л. В. О свободных колебаниях нетонких цилиндрических оболочек переменной толщины на основе метода сплайн-коллокации // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 169–179.
2. Ефимова Т. Л. Решение задач о свободных крутильных колебаниях толстостенных ортотропных неоднородных цилиндров // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 92–100.  
То же: *Efimova T. L.* Solution of problems of free torsional vibrations of thick-walled orthotropic inhomogeneous cylinders // *J. Math. Sci.* – 2010. – **168**, No. 4. – P. 613–623.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
4. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопrotивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.
5. Победра Б. Е., Шешенин С. В. Некоторые задачи об равновесии упругого параллелепипеда // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 1. – С. 74–86.
6. Суслова Н. Н. Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердого деформируемого тела. – Москва: ВИНТИ, 1980. – **13**. – С. 187–296.
7. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
8. Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Puzurev S. V. Solution describing the natural vibrations of rectangular shallow shells with varying thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, No. 4. – P. 432–441.  
То же: Будак В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. В. Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 4. – С. 89–98.
9. England A. H. Bending solutions for inhomogeneous and laminated elastic plates // *J. Elasticity.* – 2006. – **82**, No. 2. – P. 129–173.
10. Gregory Douglas R. A partially built-in plate under uniform load // *J. Elasticity.* – 2001. – **63**, No. 2. – P. 113–135.
11. Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Loza I. A. Solution of an axisymmetric problem of free vibrations of piezoceramic hollow cylinders of finite length by the spline collocation method // *J. Math. Sci.* – 2010. – **165**, No. 2. – P. 290–300.  
То же: Григоренко О. Я., Ефимова Т. Л., Лоза И. А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 112–120.
12. Grigorenko A. Ya., Mal'tsev S. A. Natural vibrations of thin conical panels of variable thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, No. 11. – P. 1221–1231.  
То же: Григоренко А. Я., Мальцев С. А. О свободных колебаниях тонких конических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 11. – С. 90–100.
13. Grigorenko A. Ya., Müller W. H., Wille R., Yaremchenko S. N. Numerical solution of the problem on the stress-strain state in hollow cylinders by means of spline-approximations // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 3. – С. 127–134.  
То же: Grigorenko A. Ya., Müller W. H., Wille R., Yaremchenko S. N. Numerical solution of the problem of the stress-strain state in hollow cylinders using spline approximations // *J. Math. Sci.* – 2012. – **180**, No. 2. – P. 135–145.
14. Grigorenko Ya. M., Avramenko O. A. Stress-strain analysis of closed nonthin orthotropic conical shells of varying thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 6. – P. 635–643.

- То же: Григоренко Я. М., Авраменко О. А. Исследование напряженно-деформированного состояния замкнутых нетонких ортотропных конических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С. 46–58.
15. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Vlaikov G. G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. – Kiev: Akadempriodika, 2009. – 550 p.
16. Grigorenko Ya. M., Kryukov N. N., Kholkina N. S. Spline-approximation solution of stress-strain problems for beveled cylindrical shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 12. – P. 1357–1364.  
То же: Григоренко Я. М., Крюков Н. Н., Холкина Н. С. Решение задач о напряженно-деформированном состоянии цилиндрических оболочек с косыми срезами на основе сплайн-аппроксимации // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 12. – С. 116–123.
17. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Influence of orthotropy on displacements and stresses in nonthin cylindrical shells with elliptic cross section // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 6. – P. 654–661.  
То же: Григоренко Я. М., Яремченко С. Н. Анализ влияния параметров ортотропии на перемещения и напряжения в нетонких цилиндрических оболочках с эллиптическим поперечным сечением // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 6. – С. 82–92.
18. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 9. – P. 998–1005.  
То же: Григоренко Я. М., Яремченко С. Н. Анализ напряженного состояния ортотропных эллиптических цилиндрических оболочек в уточненной постановке при изменении геометрических параметров // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 9. – С. 53–62.

#### **ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРЯМОКУТНИХ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН У ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ**

*Розглядається задача про напружено-деформований стан прямокутних анізотропних пластин в просторовій постановці для однієї площини пружної симетрії. Вихідна задача описується системою трьох диференціальних рівнянь другого порядку із частинними похідними. Після відокремлення змінних і використання методу сплайн-колокації у двох координатних напрямках задача зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку з граничними умовами на краях. Отримана крайова задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати для випадків жорсткого закріплення і шарнірного опирання та різної геометрії пластин.*

#### **DETERMINATION OF THE STRESS STATE OF ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATES IN THE SPATIAL STATEMENT**

*The problem on the stress-strain state of anisotropic rectangular plates for a single plane of elastic symmetry in a spatial statement is considered. The initial problem is described by a system of three differential equations of the second order partial derivatives. After separation of variables and the use of spline-collocation method in two coordinate directions the problem is reduced to a system of ordinary differential equations of higher order with boundary conditions at the edges. The resulting boundary-value problem is solved by the steady method of discrete orthogonalization. The results for the cases of rigid fixing and hinged support and different geometry of the plates are presented.*

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Получено  
13.05.11