

ВИМУШЕНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ГНУЧКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ З П'ЕЗОАКТУАТОРАМИ

Розглядається задача про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружної балки з п'єзоелектричними актуаторами при врахуванні геометричної нелінійності в квадратичному наближенні. В'язкопружна поведінка пасивного (без п'єзо ефекту) і п'єзоактивного матеріалів описується в термінах миттєвих і комплексних модулів. Для розв'язання нелінійної задачі електров'язкопружності і теплопровідності використовується метод квазілінеаризації у поєднанні з чисельними методами дискретної ортогоналізації і скінченних різниць. Досліджено вплив геометричної нелінійності на динамічні характеристики, температуру вібророзігріву та активне демпфування балки за допомогою п'єзоактуатора.

Вступ. В останні роки для зниження рівня амплітуд коливань тонкостінних елементів типу балок, пластин і оболонок широко використовують п'єзоелектричні матеріали [19, 21, 23]. Одним з найпоширеніших способів активного гасіння вимушених коливань є нанесення на зовнішні поверхні тонкостінного елемента п'єзоелектричних шарів (актуаторів), до електродів яких подається відповідної амплітуди і фази різниця електричних потенціалів, для нейтралізації дії механічного збудження. Сучасний стан наукових розробок в області активного демпфування коливань тонкостінних елементів із пружних і в'язкопружних матеріалів в ізотермічній постановці задачі та з урахуванням температурних ефектів відображено в ряді монографій [12, 20, 21, 23] і багатьох журнальних працях [4, 8–10, 13–15, 18, 19, 22] та ін. У багатьох випадках тонкостінні елементи з п'єзоелектричними включеннями знаходяться під дією інтенсивних циклічних навантажень, які зумовлюють високий рівень механічних напружень, прогинів та дисипативного розігріву. При таких умовах експлуатації об'єкта стає необхідним в задачах про його термомеханічну поведінку враховувати ефекти фізичної і геометричної нелінійностей, а також вплив цих факторів на працездатність системи та електричні показники при її активному демпфуванні. Побудова електротермомеханічних моделей динамічної поведінки тонкостінних шаруватих елементів із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів, що враховують фізичну і геометричну нелінійності, а також розв'язки деяких задач містяться в працях [4, 6, 7, 11, 12] та ін. У статті [4], зокрема, розглядається можливість демпфування вимушених коливань балки із пасивного фізично нелінійного матеріалу за допомогою зовнішніх п'єзоактивних шарів (актуаторів).

У цій статті розглянемо вимушені коливання і дисипативний розігрів гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоелектричними шарами – актуаторами при електромеханічному гармонічному збудженні. Дослідимо вплив геометричної нелінійності на динамічні і температурні характеристики системи, коефіцієнт керування та критичні значення амплітуд навантаження, при яких температура вібророзігріву досягає точки Кюрі. Постановку та розв'язання задачі про термомеханічну поведінку одношарової балки із пасивного в'язкопружного матеріалу при врахуванні геометричної нелінійності наведено в статті [16].

1. Постановка задачі. Розглянемо тришарову гнучку балку ширини b і довжини l . Середній шар товщини h_0 виготовлено із пасивного ізотропного матеріалу. Зовнішні шари товщини h_1 виготовлено із п'єзокераміки з однаковими властивостями та товщинною поляризацією в протилежних напрямках. Шари жорстко скріплені між собою. Балка віднесена до прямокутної

системи координат $x y z$, так що $0 \leq x \leq \ell$, $|y| \leq b/2$, $|z| \leq H/2$ ($H = h_0 + 2h_1$). Матеріали шарів вважаємо в'язкопружними з незалежними від температури властивостями. Приймаємо, що верхній ($z \geq h_0/2$) і нижній ($z \leq h_0/2$) п'єзошари характеризуються значеннями п'єзомодулів $-d_{31}$ і d_{31} , відповідно. Зовнішні ($z = \pm H/2$) і внутрішні ($z = \pm h_0/2$) поверхні п'єзошарів покриті нескінченно тонкими електродами. Внутрішні електроди підтримуються при нульовому електричному потенціалі $\varphi(\pm h_0/2) = 0$. П'єзошари виконують роль актуаторів і конструктивно по ширині балки є або накладками довжини $\Delta_x = x_1 - x_0$ ($0 \leq x_0 \leq x \leq x_1 \leq \ell$), або її суцільними покриттями, електродовані поверхні яких нескінченно тонкими розрізами з координатами x_0, x_1 розділені на окремі ділянки.

Балка навантажена поперечним тиском $q_z(x, t) = q^0(x) + q'(x) \cos \omega t$, що складається з постійного навантаження $q^0(x)$ і гармонічного в часі t збудження з амплітудою $q'(x)$ і частотою ω , близькою до резонансної. До зовнішніх електродів актуатора площею $s_x = b\Delta_x$ підводиться різниця електричних потенціалів $\varphi(H/2) - \varphi(-H/2) = \text{Re}(2V_a e^{i\omega t})$ з частотою механічного навантаження, дія якого подавляється або підсилюється в залежності від амплітуди і фази електричного збудження. У випадку суцільних п'єзошарів електроди на ділянках $0 \leq x \leq x_0$ та $x_1 \leq x \leq \ell$ закорочено ($V_a = 0$).

При моделюванні електромеханічної поведінки тришарової гнучкої балки приймаємо, що по всьому пакету шарів справджуються гіпотези плоских перерізів [2] для механічних величин. Відносно електричних змінних допускаємо, що складовими векторів індукції D_x, D_y і напруженості електричного поля E_x, E_y в площині кожного п'єзошару можна знехтувати порівняно з нормальними складовими D_z, E_z . Тоді з рівнянь електростатики $\partial D_z / \partial z = 0$ випливає, що індукція $D_z = C = \text{const}$ є постійною по товщині шару [6, 7]. Припускаємо, що деформації малі, але прогини балки такі, що в кінематичних співвідношеннях необхідно враховувати квадрати кутів повороту. При цьому рівняння руху є також нелінійними. При достатньо малій товщині п'єзошарів температуру в площині поперечного перерізу балки приймаємо постійною. В'язкопружні властивості пасивного і п'єзоактивного матеріалів описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності [5] типу $B * (...) = \int_{s=0}^t (...)$, які для гармонічних процесів деформування зводяться до операції множення комплексних величин [7]

$$B * f = (B' + iB'')(f' + if''). \quad (1)$$

Тут і далі одним і двома штрихами позначено дійсну і уявну величини; $i = \sqrt{-1}$; $|f| = (f'^2 + f''^2)^{1/2}$.

На основі прийнятих гіпотез тривимірні співвідношення в'язкопружної поляризованої уздовж осі z п'єзокераміки [7], наприклад, для нижнього шару мають вигляд

$$\sigma_x = c_{11}^E * e_x - b_{31} * E_z, \quad D_z = b_{31} * e_x + b_{33} * E_z, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Тут $c_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E}$; $b_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}$; $b_{33} = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}$; s_{11}^E , d_{31} , ε_{33}^T - відповідно ізо-

термічні оператори податливості, п'єзомодуля і діелектричної проникливості п'єзоматеріалу. Для верхнього п'єзощару в (2) необхідно d_{31} замінити на $-d_{31}$. Поведінка пасивного ізотропного матеріалу описується першим з рівнянь (2), в якому необхідно покласти $c_{11}^E = E$, $b_{31} = 0$ (E – в'язкопружний модуль Юнга). У подальшому символ «*» опускаємо.

Деформація e_x з поздовжнім u і нормальним w переміщеннями зв'язана такими співвідношеннями:

$$e_x = \varepsilon_x + z\alpha_x, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\vartheta_x^2, \quad \alpha_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, \quad \vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad (3)$$

де ϑ_x – кут повороту.

Із останніх двох співвідношень (2) з урахуванням (3) знаходимо

$$\varphi = -\frac{C}{b_{33}}z + \frac{b_{31}}{b_{33}}\left(\varepsilon_x z + \frac{1}{2}\alpha_x z^2\right) + C_1, \quad (4)$$

де C_1 – стала інтегрування.

Підставляючи (4) в електростатичні граничні умови

$$\varphi(\pm H/2) = \pm V_a, \quad \varphi(\pm h_0/2) = 0,$$

з урахуванням напрямку поляризації в п'єзощарах і другого співвідношення із (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \mp D_z = \mp C &= -b_{33} \frac{V_a}{h_1} \mp b_{31} \left(\varepsilon_x \pm \frac{h_0 + h_1}{2} \alpha_x \right), \\ \mp E &= -\frac{V_a}{h_1} - \frac{b_{31}}{b_{33}} \left(\frac{h_0 + h_1}{2} \mp z \right) \alpha_x. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут верхній і нижній знаки «+» і «-» відносяться до нижнього і верхнього п'єзощарів відповідно.

Вводячи замість механічних напружень (2) інтегральні величини зусилля і моменту

$$N_x = b \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x dz, \quad M_x = b \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x z dz$$

по пакету шарів з урахуванням залежностей (3), (5), маємо

$$N_x = C_{11} * \varepsilon_x, \quad M_x = D_{11} * \alpha_x + M_E, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} C_{11} &= bh_0(E + 2\delta c_{11}^E), \quad D_{11} = \frac{bh_0^3}{12}(E + 2\delta_0^3 c_{11}^E + 2\delta^3 \gamma_{33}), \quad \delta = \frac{h_1}{h_0}, \\ M_E &= -bh_0(1 + \delta)b_{31}V_a, \quad \delta_0^3 = 3\delta + 6\delta^2 + 4\delta^3, \quad \gamma_{33} = \frac{b_{31}^2}{b_{33}}. \end{aligned} \quad (7)$$

З огляду на прийняті гіпотези рівняння нелінійних коливань розглядуваної гнучкої балки запишемо так [3, 7]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho_* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \widehat{Q}_x}{\partial x} = \rho_* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_z F, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = \widehat{Q}_x + N_x \vartheta_x. \quad (8)$$

У рівняннях (8) $\widehat{Q}_x = Q_x - N_x \vartheta_x$; $F = bH$ – площа поперечного перерізу балки; Q_x – перерізує зусилля; $\rho_* = bh_0(\rho_0 + 2\rho_1\delta)$; ρ_0, ρ_1 – питомі густини пасивного і п'єзоактивного матеріалів відповідно.

При жорсткому в поздовжньому і шарнірному в поперечному напрямках закріплення країв балки механічні граничні умови мають вигляд

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = \ell. \quad (9)$$

Усереднене за період коливань і в площині поперечного перерізу рівняння енергії розглядуваної балки запишемо як

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_z(b+H)}{\lambda F} (T - T_c) + \langle W \rangle, \quad (10)$$

де

$$\langle W \rangle = \frac{\omega b}{2\lambda F} \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma'_x e'_x - \sigma'_x e''_x + D'_z E''_z - D''_z E'_z) dz, \quad (11)$$

$\langle W \rangle$ – усереднена швидкість дисипації; $\alpha_z = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$; α_+ , α_- – коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm H/2$; λ , a – усереднені коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності; T_c – температура зовнішнього середовища.

Початкова та граничні теплові умови на краях балки мають такий вигляд:

$$T = T_0(t = 0), \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \pm \alpha_{0,\ell} (T - T_c), \quad x = 0, \ell, \quad (12)$$

де $\alpha_{0,\ell}$ – коефіцієнти теплообміну; T_0 – початкова температура.

2. Побудова розв'язку задачі. При побудові розв'язку поставленої задачі розв'язувальні рівняння електров'язкопружності (3), (6), (8) подамо відносно шуканих величин u , w , ϑ_x , N_x , \widehat{Q}_x , M_x , записавши співвідношення (3), (6) у такому вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = J_c * N_x - \frac{1}{2} \vartheta_x^2, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\vartheta_x, \quad \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = -J_D * M_x - J_D * M_E, \quad (13)$$

де

$$J_c = \frac{1}{C_{11}}, \quad J_D = \frac{1}{D_{11}}. \quad (14)$$

При навантаженнях типу

$$q_z = q^0(x) + q'(x) \cos \omega t - q''(x) \sin \omega t, \quad q'' = 0, \quad (15)$$

будемо нехтувати перехідними процесами, обмежившись розглядом квазі-стаціонарних вимушених коливань та обумовленого складовою $q^0(x)$ квазі-статичного напружено-деформованого стану. Наближений розв'язок нелінійних рівнянь (8), (13) будемо у вигляді гармонічного ряду за часом [6, 16]. Обмежимося побудовою розв'язку в одномодовому наближенні для змінних $A = \{w, \vartheta_x, \widehat{Q}_x, M_x\}$, що характеризують згин балки, та при утриманні до другої гармоніки включно в рядах для змінних $B = \{u, N_x, \varepsilon_x\}$ плоского деформування балки, так що

$$A = A^0 + A^1 \cos \omega t - A^2 \sin \omega t, \quad B = B^0 + \sum_{k=1}^2 (B^k \cos k\omega t - B^k \sin k\omega t). \quad (16)$$

Застосовуючи викладений у працях [6, 16] підхід, із розв'язувальних рівнянь (8), (9), (13) відносно коефіцієнтів подання (16) отримуємо таку систему нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d^1 u'}{dx} &= J_c^1 N_x^1 + J_c^1 N_x^1 - \vartheta_x^0 \vartheta_x^1, & \frac{d^1 u''}{dx} &= -J_c^1 N_x^1 + J_c^1 N_x^1 - \vartheta_x^0 \vartheta_x^1, \\ \frac{d^2 u'}{dx} &= J_c^2 N_x^2 + J_c^2 N_x^2 - \frac{1}{4} (\vartheta_x^1{}^2 - \vartheta_x^2{}^2), & \frac{d^2 u''}{dx} &= -J_c^2 N_x^2 + J_c^2 N_x^2 - \frac{1}{2} \vartheta_x^1 \vartheta_x^1, \\ \frac{d^1 w'}{dx} &= -\vartheta_x^1, & \frac{d^1 w''}{dx} &= -\vartheta_x^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d \mathfrak{G}'_x}{dx} &= J_D^1 M'_x + J_D'' M''_x - J_D^1 M'_E - J_D'' M''_E, \\
\frac{d \mathfrak{G}''_x}{dx} &= -J_D'' M''_x + J_D^1 M''_x + J_D'' M''_E - J_D^1 M''_E, \\
\frac{d N'_x}{dx} &= -\rho_* \omega^2 u', & \frac{d N''_x}{dx} &= -\rho_* \omega^2 u'', \\
\frac{d N'^2_x}{dx} &= -4\rho_* \omega^2 u'^2, & \frac{d N''^2_x}{dx} &= -4\rho_* \omega^2 u''^2, \\
\frac{d \hat{Q}'_x}{dx} &= -\rho_* \omega^2 w' - q'F, & \frac{d \hat{Q}''_x}{dx} &= -\rho_* \omega^2 w'', \\
\frac{d M'_x}{dx} &= \hat{Q}'_x + N'_x \mathfrak{G}_x^0 + N_x^0 \mathfrak{G}'_x + \frac{1}{2} N'^2_x \mathfrak{G}'_x + \frac{1}{2} N''^2_x \mathfrak{G}''_x, \\
\frac{d M''_x}{dx} &= \hat{Q}''_x + N''_x \mathfrak{G}_x^0 + N_x^0 \mathfrak{G}''_x + \frac{1}{2} N''^2_x \mathfrak{G}'_x + \frac{1}{2} N'_x \mathfrak{G}''_x, \\
\frac{d u^0}{dx} &= J_c^0 N_x^0 - \frac{1}{2} \mathfrak{G}_x^0 - \frac{1}{4} (\mathfrak{G}'_x{}^2 + \mathfrak{G}''_x{}^2), & \frac{d w^0}{dx} &= -\mathfrak{G}_x^0, \\
\frac{d \mathfrak{G}_x^0}{dx} &= J_D^0 M_x^0, & \frac{d N_x^0}{dx} &= 0, & \frac{d \hat{Q}_x^0}{dx} &= -q^0 F, \\
\frac{d M_x^0}{dx} &= \hat{Q}_x^0 + \frac{1}{2} (N'_x \mathfrak{G}'_x + N''_x \mathfrak{G}''_x) + N_x^0 \mathfrak{G}_x^0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Граничні умови записуються так:

$$\begin{aligned}
u = u' = u'' = u'^2 = u''^2 = 0, & \quad w = w' = w'' = 0, & M_x^0 = M'_x = M''_x = 0, \\
& & x = 0, \ell.
\end{aligned} \tag{18}$$

У рівняннях (17) компоненти комплексних податливостей $J_c^k = J_c^k - i J_c''^k$, $J_D^k = J_D^k - i J_D''^k$, $k = 0, 1, 2$, обчислюються із виразів (7), (14). При цьому для величин з індексом «1» комплексні характеристики електров'язкопружності обчислюються на частоті ω , а з індексом «2» – на частоті 2ω . Коефіцієнти J_c^0, J_D^0 відповідають рівноважним значенням пружних податливостей пасивного і п'єзоактивного матеріалів.

У термінах розв'язувальних змінних задачі (17), (18) дисипативна функція (11) для гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоелектричними актуаторами визначається співвідношенням

$$\begin{aligned}
\langle W \rangle &= \frac{\omega}{2\lambda F} \left\{ N_x'' \varepsilon'_x - N_x' \varepsilon''_x + 2(N_x'' \varepsilon'_x - N_x' \varepsilon''_x) + M_x'' \alpha'_x - M_x' \alpha''_x - \right. \\
&\quad \left. - (h_0 + h_1) b \left[(b_{31}'' \alpha'_x + b_{31}' \alpha''_x) V_a' + (b_{31}'' \alpha''_x - b_{31}' \alpha'_x) V_a'' \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2b}{h_1} b_{33}'' (V_a'^2 + V_a''^2) \right\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Нелінійну задачу (17), (18) розв'язуємо методом квазілінеаризації [17], а лінеаризовану систему звичайних диференціальних рівнянь на кожному наближенні інтегруємо методом дискретної ортогоналізації з використанням типової програми [3]. Для досягнення збіжності процесу, особливо в околі резонансних частот, застосовуємо підхід продовження за параметрами зовнішнього навантаження. Після розв'язання задачі електромеханіки обчислюємо дисипативну функцію (19) і задачу теплопровідності (10)–(12) розв'язуємо методом скінченних різниць з використанням явної схеми.

При активному гасінні механічних коливань гнучкої балки п'єзоактуаторами необхідно дослідити вплив геометричної нелінійності на динамічні характеристики балки та визначити амплітуду і фазу електричного потенціалу V_a для компенсації механічного навантаження. Обмежимо випадком гармонічного навантаження балки поперечним тиском постійної амплітуди $q'(x) = q_0$ ($q^0 = 0$) і будемо визначати компенсуючий показник актуатора лінійною залежністю [15]

$$V_a = k_a(\Delta)q_0, \quad (20)$$

де k_a – коефіцієнт керування; $\Delta = (x_1 - x_0)/\ell$ – безрозмірний параметр, що характеризує розмір актуатора.

Коефіцієнт k_a обчислюємо на основі розв'язку лінійної задачі за формулою

$$k_a = \frac{|w_{q \max}|}{|w_{E \max}|}. \quad (21)$$

Тут $|w_{q \max}|$ – максимальне значення амплітуди прогину балки на частоті лінійного резонансу при навантаженні $q_0 = 1$ Па ($V_a = 0$), а $|w_{E \max}|$ – аналогічна величина, обумовлена дією на електроди п'єзоактуатора потенціалів $\pm V_a = 1$ В ($q_0 = 0$). Протифазність дії електричного навантаження для компенсації поперечного тиску враховуємо застосуванням співвідношення $V_a \cos(\omega t + \pi) = -V_a \cos \omega t$.

3. Результати розрахунків та їх аналіз. Числові розрахунки проведено для прямокутної в поперечному перерізі балки, пасивний шар якої виготовлено із поліметилметакрилату [17] з такими фізичними параметрами:

$$E = E' + i E'', \quad E' = E \cdot (k\omega)^p, \quad E'' = E' \beta (k\omega)^q, \quad k = 1, 2, \\ E = 0.308 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \nu' = 0.35, \quad \gamma'' = 0, \quad \beta = 0.16, \\ q = -0.145, \quad p = 0.076, \quad \rho_0 = 2770 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda = 0.45 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°С)}.$$

П'єзоактуатори виготовлено із в'язкопружної п'єзокераміки типу ЦТСтБС-2 [1] з такими ізотермічними та незалежними від частоти фізико-механічними характеристиками:

$$s_{11}^E * = (12.5 - 0.02i) \cdot 10^{-12} [\text{м}^2/\text{Н}], \quad d_{31} * = (-1.6 + 0.0064i) \cdot 10^{-10} [\text{Кл/м}], \\ \rho_1 = 7520 \text{ кг/м}^3, \quad T_0 = T_c = 20^\circ \text{С}, \quad \nu'_E = 0.37, \quad \nu''_E = 0, \\ \epsilon_{33}^T * = (21 - i0.735) \cdot 10^2 \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad \lambda = 0.47 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°С)}.$$

Геометричні розміри балки такі:

$$\ell = 0.2 \text{ м}, \quad h_0 = 0.01 \text{ м}, \quad b = H = (h_0 + 2h_1).$$

З огляду на спосіб навантаження і конструктивну симетрію в розглянутій балці реалізуються переважно згинні коливання. Тому розрахунки проведено для частот навантаження, що близькі до першої резонансної частоти згинної моди коливань.

На рис. 1 в залежності від розміру Δ п'єзоактуатора – накладки наведено криві для першої резонансної частоти $\tilde{\omega} = \omega \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$ (суцільні з крапками лінії), розрахованих на цих частотах максимальних амплітуд прогинів $\tilde{w}_E = w_E \cdot 10^4 \text{ м}$ (штрихпунктирні лінії) при підведенні до електродів актуатора електричних потенціалів $\pm V'_a = 1 \text{ В}$ ($V''_a = 0, q^0 = q_0 = 0$) і коефіцієнта $\tilde{k}_a = k_a \cdot 10^2 \text{ В/Па}$ (суцільні лінії). Криві 1, 2, 3 розраховані на основі лінійної постановки задачі і відповідають товщинам п'єзошарів актуатора $h_1 = 0, 0.1 \cdot 10^{-4}, 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. П'єзоактуатори на поверхнях $z = \pm h_0/2$ балки розміщувались так, що їх центр співпадав з точкою ($x = 0.5\ell$) максимальних прогинів. У випадку суцільних п'єзошарів – актуаторів з розрізними електродами криві для прогинів \tilde{w}_E і коефіцієнта керування \tilde{k}_a в масштабі координат співпадають з результатами, отриманими для п'єзоактуаторів – накладок при розглядуваних значеннях товщин п'єзошарів. Незначна розбіжність має місце лише в залежності \tilde{k}_a від Δ для балки з товщиною п'єзошарів $h_1 = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ (штрихова крива 3). Крім того, власні частоти $\tilde{\omega}$ не залежать від параметра Δ п'єзоактуатора і відповідають значенню частот при $\Delta = 1$.

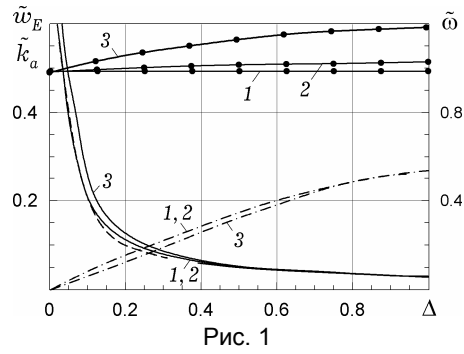


Рис. 1

Найбільш ефективним є актуатор таких розмірів, при яких електричне збудження викликає максимальні прогини балки. Аналіз кривих на рис. 1 і проведені розрахунки показують, що максимальні амплітуди прогинів балки і мінімальні значення коефіцієнта керування мають місце при повному покритті п'єзошарими поверхні шарнірно опертої балки ($\Delta = 1$).

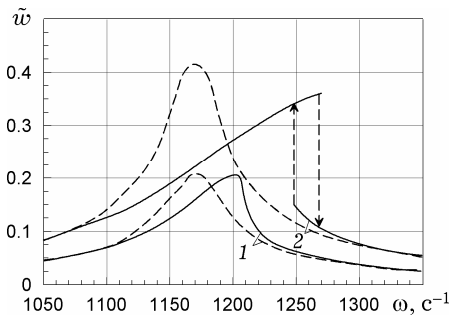


Рис. 2

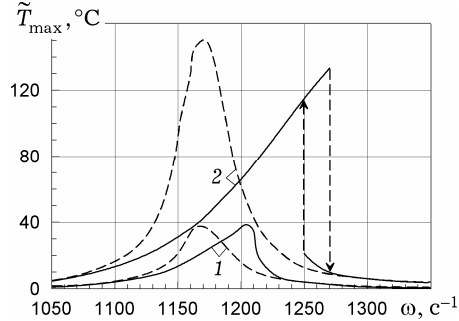


Рис. 3

На рис. 2 для балки з найбільш ефективним актуатором ($\Delta = 1$) і товщиною п'єзошарів $h_1 = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ наведено криві 1, 2 частотних залежностей відносних максимальних амплітуд $\tilde{w} = |w(0.5\ell)|/h_0$, розраховані в околі основної резонансної частоти згинної моди коливань для амплітуд поперечного тиску $q_0 = 0.25 \cdot 10^6, 0.5 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ($V_a = 0$) відповідно. При цьому штрихові лінії відповідають розрахункам лінійної задачі, а суцільні – з урахуванням геометричної нелінійності. Аналогічні криві 1, 2 частотних залежностей усталеної ($\tau = at/\ell^2 \geq 0.1$) максимальної по об'єму балки температури віброзігріву $\tilde{T}_{\text{max}} = T_{\text{max}} - T_0$, що відповідають розглядуваним умовам гармонічного навантаження балки і коефіцієнту теплообміну $\alpha = 0.25 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}$, показано на рис. 3.

Аналіз кривих на рис. 2 і рис. 3 та проведені числові розрахунки показують, що врахування геометричної нелінійності з ростом амплітуди навантаження приводить до збільшення основної резонансної частоти балки та формування амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) і температурно-частотних характеристик (ТЧХ) жорсткого типу [16]. При цьому на резонансних частотах нелінійної задачі (суцільні лінії) максимальні амплітуди прогинів і температури дисипативного розігріву дещо нижчі від аналогічних величин на частотах лінійного резонансу (штрихові лінії).

На рис. 4 кривими 1, 2 показано АЧХ відносних амплітуд прогинів \tilde{w} для лінійної (штрихові лінії) і нелінійної (суцільні лінії) задач при електричному збудженні коливань гнучкої балки, до електродів якої підводяться відповідно потенціали $V_a = 79.5, 159$ В. Значення V_a , розраховані за формулою (20), компенсують механічне гармонічне навантаження розглядуваних амплітуд $q_0 = 0.25 \cdot 10^6, 0.5 \cdot 10^6$ Па. Штрихпунктирні криві 1, 2 відповідають розподілу частотних залежностей відносних амплітуд $w_{qE} = \tilde{w} \cdot 10^2$ при сумісній протифазній дії $q_0 + V_a$ розглядуваних значень механічного і компенсуючого електричного навантажень. Відмітимо, що у випадку електричного збудження коливань балки компенсуючим електричним потенціалом криві 1, 2 (суцільні і штрихові лінії) повністю співпадають з кривими на рис. 2, а розподіл температури дисипативного розігріву характеризується кривими 1, 2 на рис. 3. Близькість кривих АЧХ на рис. 2 і рис. 3 у випадку геометрично нелінійної задачі (суцільні криві) свідчить про прийнятність розрахованої на основі лінійної задачі формули (20) при обчисленні коефіцієнта керування k_a актуатора гнучкої балки. Це означає, що врахування геометричної нелінійності не впливає на показник k_a . Аналіз штрихпунктирних кривих на рис. 4 показує, що амплітуди механічних коливань балки при підведенні до електродів актуатора електричних потенціалів проти-лежної фази зменшуються більше, ніж на два порядки. При цьому вплив геометричної нелінійності не проявляється, а температура дисипативного розігріву балки залишається близькою до початкової.

На рис. 5 на частоті механічного резонансу $\omega = 1170$ с⁻¹ наведено криві залежності максимальної амплітуди згинних коливань $\tilde{w} = |w(x = 0.5\ell)|/h_0$ від амплітуди поперечного тиску q_0 , які розраховані при лінійній (штрихова крива) та з урахуванням геометричної нелінійності (суцільні лінії) постановках задачі. Бачимо, що для гнучкої балки з розглядуваними фізико-механічними параметрами вклад геометричної нелінійності стає істотним для гармонічних навантажень, які обумовлюють амплітуди відносних прогинів $\tilde{w} \geq 0.1$.

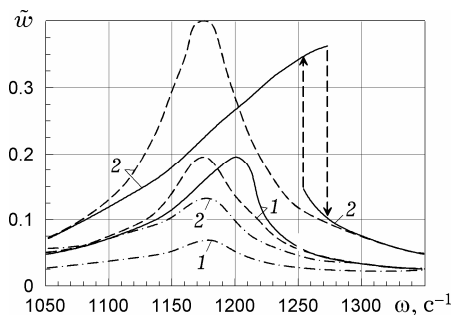


Рис. 4

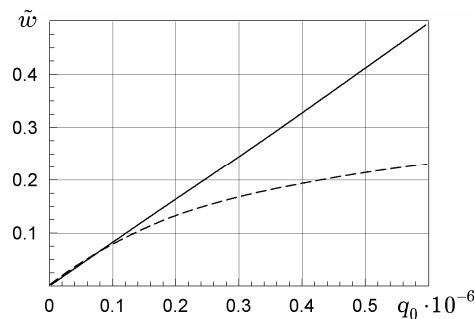


Рис. 5

4. Термічне руйнування. При вимушених резонансних коливаннях тонкостінних в'язкопружних елементів з п'єзоелектричними складовими втрата працездатності системи може відбутися при досягненні температури дисипативного розігріву критичного значення (точки Кюрі), при якій п'єзоматеріал деполаризується. Тому при проектуванні таких конструкцій однією з умов є визначення критичних механічних і електричних навантажень, при яких температура вібророзігріву досягає точки Кюрі. На рис. 6 для розглядуваної балки показано криві 1–3 залежності максимальної усталеної ($\tau = 0.1$) температури вібророзігріву $T_{\max}(0.5\ell)$ від амплітуди q_0 , розраховані на частоті $\omega = 1170 \text{ с}^{-1}$ відповідно при $\alpha_z = \alpha_{0,\ell} = 5, 15, 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$. Значення температури Кюрі $T_K = 180 \text{ °C}$ для п'єзокераміки ЦТСтБС – 2 показано штрихпунктирною лінією. Штрихові і суцільні криві відповідають розв'язкам лінійної і нелінійної задач.

Аналіз графіків на рис. 6 показує, що врахування геометричної нелінійності (суцільні лінії) та інтенсифікація теплообміну на поверхнях балки супроводжується збільшенням числового значення амплітуди гармонічного навантаження q_0 , при якому температура вібророзігріву досягає точки Кюрі. За умови, що п'єзоактуатор втрачає функціональну працездатність при досягненні температури Кюрі хоч в одній точці, критичне значення $q_0 = q_{\text{cr}}$ легко визначити із графіків для кожного значення коефіцієнта теплообміну.

Зауважимо, що при електричному збудженні коливань балки криві залежностей максимального прогину (рис. 5) і температури вібророзігріву (рис. 6) залишаються без змін, якщо кожному значенню q_0 поставити відповідні значення потенціалу V_a , розраховані за формулою (20).

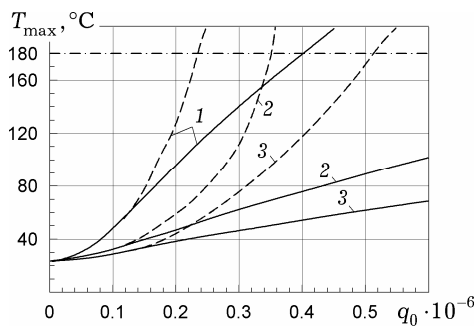


Рис. 6

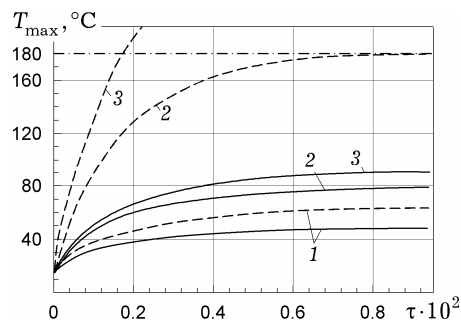


Рис. 7

Еволюцію в часі τ максимальної об'ємної температури вібророзігріву $T_{\max}(x = 0.5\ell)$ для балки з оптимальним п'єзоактуатором ($\Delta = 1$) і товщиною $h_1 = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ на частоті лінійного резонансу $\omega = 1170 \text{ с}^{-1}$ показано на рис. 7. Криві 1, 2, 3 розраховано відповідно для амплітуд $q_0 \cdot 10^{-6} = 0.2, 0.4, 0.5 \text{ Па}$ при $\alpha = 15 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$. Штрихові криві відповідають лінійній задачі, а суцільні – розраховані з урахуванням геометричної нелінійності. Штрихпунктиром показано температуру Кюрі. Видно, що час працездатності актуатора стрімко зменшується при перевищенні амплітуди навантаження критичних значень, при яких температура вібророзігріву досягає точки Кюрі. На дорезонансних частотах вимушених коливань балки врахування геометричної нелінійності сприяє зменшенню температури вібророзігріву.

Висновки. Наведено наближену постановку задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів балки з п'єзоелектричними актуаторами при врахуванні геометричної нелінійності в квадратичному наближенні. Досліджено її вплив на динамічні характеристики і температуру ди-

сипативного розігріву балки при механічному та електричному гармонічному навантаженнях. Обґрунтовано можливість гасіння механічних коливань при підведенні до електродів актуатора електричної напруги в протилежній фазі до механічного збудження. Показано, що врахування геометричної нелінійності не впливає на коефіцієнт керування у співвідношенні, що пов'язує амплітуду підведеного до актуатора електричного потенціалу V_a з амплітудою поперечного тиску на балку. Досліджено вплив геометричної нелінійності та умов теплообміну на величину критичних значень амплітуд навантаження, при яких температура вібророзігріву досягає точки Кюрі і п'єзоактуатор деполаризується та втрачає працездатність.

1. Болкисев А. М., Карлаш В. Л., Шульга Н. А. О зависимости свойств пьезоэлектрических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 7. – С. 70–74.
Te same: *Bolkisev A. M., Karlash V. L., Shul'ga N. A.* Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics // *Int. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, No. 7. – P. 650–653.
2. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – Київ: Вища шк., 2004. – 526 с.
3. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
4. Жук Я. А., Сенченков И. К. Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 5. – С. 80–91.
Te same: *Zhuk Ya. A., Senchenkov I. K.* Modelling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic elements with piezoelectric layers // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, No. 5. – P. 546–556.
5. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – Москва: Наука, 1970. – 280 с.
6. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
7. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 4.
8. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Влияние температуры диссипативного разогрева на активное демпфирование вынужденных колебаний неупругих тонких пластин при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі. – Київ: Наук. думка, 2007. – С. 127–152.
9. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Электромеханические колебания тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Успехи механики: В 6 т. – Киев: А.С.К., 2006. – Т. 2. – С. 185–217.
10. Карнаузов В. Г., Козлов В. И., Пятецкая Е. В. Активное демпфирование колебаний прямоугольной пластины при помощи распределенных сенсоров и актуаторов // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – С. 137–140.
11. Карнаузов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Моделирование вынужденных резонансных колебаний и диссипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 48–68.
12. Карнаузов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Житомир. інж.-технолог. ін-т, 2005. – 426 с.
13. Киричок И. Ф. Резонансные колебания и разогрев электромеханически нагруженных кольцевых пластин с пьезоактуаторами при учете деформации сдвига // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 2. – С. 124–132.
Te same: *Kirichok I. F.* Resonant vibration and heating of ring plates with piezoactuators under electromechanical loading and shear deformation // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, No. 2. – P. 215–222.
14. Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В. Вплив граничних умов і температури диссипативного розігріву на активне демпфування вимушених осесиметричних резонансних згинальних коливань круглих в'язкопружних пластин за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 2. – С. 94–107.

- Те саме: *Kurychok I. F., Karnaukhova T. V.* Influence of boundary conditions and temperature of dissipative heating on active damping of forced axisymmetric resonant bending vibrations of circular viscoelastic plates by piezoelectric sensors and actuators // *J. Math. Sci.* – 2011. – **178**, No. 5. – P. 480–495.
15. *Киричок І. Ф., Карнаухова Т. В.* Контроль вимушених коливань круглих в'язкопружних пластинок за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів з урахуванням вібророзігріву // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2009. – Вип. 9. – С. 67–78.
 16. *Сенченков І. К., Киричок І. Ф.* Вынужденные нелинейные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругой балки // *Прикл. механика.* – 1987. – **23**, № 1. – С. 91–97.
Те саме: *Senchenkov I. K., Kirichok I. F.* Forced nonlinear vibrations and dissipative heating of a viscoelastic beam // *Int. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, No. 1. – P. 80–86.
 17. *Стивенс К.* Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы // *Прикл. механика. Сер. Е. Тр. Амер. об-ва инж.-механиков.* – Москва: Мир, 1969. – № 4. – С. 168–173.
 18. *Blaguenon A. Lene F., Bernadou M.* Active control of a beam using a piezoceramic element // *Smart Mater. Struct.* – 1999. – **8**. – P. 116–124.
 19. *Brennan M., Elliot S., Pinnington R.* The dynamic coupling between piezoceramic actuators and a beam // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1997. – **102**, No. 4. – P. 1931–1942.
 20. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 384 p.
 21. *Intelligent structural systems* / Eds. H. S. Tzou, G. L. Anderson/ – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. – 453 p.
 22. *Karnaukhov V. G., Kirichok I. F., Karnaukhov M. V.* The influence of dissipative heating on active vibration damping of viscoelastic plates // *J. Eng. Math.* – 2008. – **61**, No. 2–4. – P. 399–411.
 23. *Tzou H. S.* Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 400 p.

ВЫНУЖДЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ГИБКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ С ПЬЕЗОАКТУАТОРАМИ

Рассматривается задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругой балки с пьезоэлектрическими актуаторами при учете геометрической нелинейности в квадратичном приближении. Вязкоупругое поведение пассивного (без пьезоэффекта) и пьезоактивного материалов описываются в терминах мгновенных и комплексных модулей. Для решения нелинейной задачи электровязкоупругости и теплопроводности используется метод квазилинеаризации в соединении с численными методами дискретной ортогонализации и конечных разностей. Исследовано влияние геометрической нелинейности на динамические характеристики, температуру виброразогрева и активное демпфирование балки с помощью пьезоактуатора.

FORCED RESONANCE VIBRATIONS AND DISSIPATIVE HEATING OF FLEXIBLE VISCOELASTIC BEAM WITH PIEZOACTUATORS

The problem of forced resonance vibrations and dissipative heating of viscoelastic beam with piezoelectric actuators with accounting geometrical nonlinearity in quadratical approximation is considered. Viscoelastic behavior of passive and piezoactive materials is described in terms of instantaneous and complex moduli. The method quasi-linearization coupled with discrete orthogonalization numerical method and method of finite differences is used to solve the nonlinear problem of electroviscoelasticity and heat conduction. Influence of geometrical nonlinearity on dynamic characteristics, temperature of vibration heating as well as active damping of beam with using layered piezoactuators is studied.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
21.06.11