УДК 539.3

О. І. Яцків, Р. М. Швець, Б. Я. Бобик

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЦИЛІНДРА З ТОНКИМ ПРИПОВЕРХНЕВИМ ШАРОМ, ТЕПЛОФІЗИЧНІ ПАРАМЕТРИ ЯКОГО ЗМІНЮЮТЬСЯ В ЧАСІ

Розвинуто метод розв'язування крайових задач про дослідження термонапруженого стану циліндричних тіл з тонкими приповерхневими шарами при змінних в часі їх теплофізичних властивостях. Наявність тонкого приповерхневого шару в довгому суцільному циліндрі враховано в сформульованій крайовій задачі некласичною нестаціонарною граничною умовою зі змінними коефіцієнтами. Після заміни цієї умови класичною умовою першого роду вихідну задачу зведено до розв'язання з використанням сплайн-апроксимацій інтегро-диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами з інтегральним оператором типу Вольтерра. Ефективність методу частково перевірено на відомій задачі про нагрів довкіллям тонкої однорідної пластинки при змінному критерії Біо. Досліджено термонапружений стан циліндра за лінійних і експоненційних законів зміни в часі зведених поверхневих параметрів тепловіддачі та теплоємності. Для різних стадій нагріву проаналізовано, при яких сталих значеннях параметрів тепловий режим циліндра найменше відрізняється від теплового режиму при змінних параметрах. Отримані розв'язки і дані про їх властивості можуть бути використані при розв'язуванні задач межової параметричної ідентифікації.

Вступ. У різноманітних галузях науки й промисловості не втрачає актуальності проблема покращання властивостей існуючих матеріалів та створення нових, зі спеціальними фізико-механічними властивостями. Одним із способів вирішення цієї проблеми є цілеспрямована зміна властивостей тонких приповерхневих шарів елементів конструкцій, деталей машин чи механізмів, або нанесення на їх поверхню спеціальних покриттів [1, 7, 15, 38, 39, 58]. З іншого боку, сучасна фізика стверджує, що приповерхневі шари реальних тіл мають відмінні від основного матеріалу фізико-механічні властивості. Крім того, вони можуть додатково змінюватись під час виготовлення та експлуатації конструктивних елементів, особливо в умовах інтенсивного навантаження і дії різноманітних фізичних полів [3–5, 38, 39, 51]. Тому при визначенні термонапруженого стану необхідно враховувати приповерхневу неоднорідність тіл і зміну в часі теплофізичних та механічних властивостей їх тонких приповерхневих шарів.

При теплообміні тіл з довкіллям через тонкий приповерхневий шар визначальний вплив на розподіл температури в них, а опосередковано і на напружено-деформований стан, мають величини коефіцієнтів теплообміну і теплоємності шару [2, 15, 19, 43, 48, 51, 61]. Зміна цих параметрів в часі може бути зумовлена багатьма чинниками, наприклад: зміною температури тіла, перебігом фізичних і хімічних процесів у тонких приповерхневих шарах, зокрема, утворенням окалини та оксидних плівок, тертям, мікророзтріскуванням поверхні, заповненням газом чи рідиною поверхневих мікропор та мікронерівностей, забрудненням поверхні тощо [13, 38, 51, 56].

Дослідженню процесів теплопровідності, дифузії речовини та спричиненого ними термонапруженого стану в тілах канонічної форми (пластинка, циліндр, куля) з тонкими приповерхневими шарами чи покриттями зі сталими теплофізичними параметрами присвячено, зокрема, роботи [7, 15, 19, 26–28, 37, 42–49, 53, 58, 61]. Для моделювання наявності приповерхневих шарів пропонувались як строгі підходи із використанням тонких оболонок чи пластинок та застосуванням операторних методів для виведення некласичних нестаціонарних умов тепло- чи масообміну через тонкий шар [24, 26, 27], застосування асимптотичних розвинень шуканих величин за параметром [41], розвинення розв'язків у степеневі ряди з подальшим наближенням їх декількома членами ряду [61], так і підходи на основі задання на поверхні тіла умов так званої «зосередженої ємності» [2, 57]. Як результат у всіх випадках граничні умови поставлених задач є нестаціонарними, в них враховується кінетика процесів дифузії тепла чи речовини на поверхні тіла і теплофізичні властивості тонкого шару. Узагальнені гранично-контактні умови такого типу для випадку контакту тіл через неоднорідні (по товщині) міжфазні шари виведено в [21, 22], а умови теплообміну з довкіллям через багатошарові покриття – у [61]. Ширший огляд публікацій, присвячених моделюванню тонких приповерхневих шарів та іншим випадкам використання нестаціонарних граничних чи гранично-контактних умов такого типу, наведено в працях [43, 48].

Слід зазначити, що останнім часом набуває поширення й інший підхід до опису приповерхневих неоднорідностей в тілах, що базується на формулюванні приповерхневих явищ за допомогою локально-градієнтного підходу, коли враховується локальне зміщення маси [3, 4].

Урахування неоднорідності структури тіла та зміни в часі теплофізичних властивостей приповерхневих шарів вимагає побудови адекватних математичних моделей, формулювання на їх основі відповідних задач, які є некласичними, і розробки нових ефективних методів їх розв’язування.

Для розв’язання задач зі сформульованими нестаціонарними граничними умовами переважно використовували метод інтегрального перетворення Лапласа, однак через громіздкість викладок і труднощі з відшуканням оригіналів здебільшого розглядали асимптотичні наближення розв’язків для малих і великих значень часу [26, 27, 39]. Для задач дифузії тепла чи речовини в тілах з тонкими приповерхневими шарами сформульовано некласичну задачу Штурма – Ліувілля на власні значення і власні функції, записано умови узагальненої ортогональності і отримано розв’язки у вигляді розвинення в узагальнений ряд Фур’є [44, 48, 52]. Цей метод поширено на випадок багатошарових тіл з тонкими прошарками і покриттями [46, 47]. Одночасно було запропоновано загальний підхід до розв’язування як взаємозв’язаних задач термодифузії, так і задач з нестаціонарними гранично-контактними умовами, якими враховано наявність в тілі тонких приповерхневих або міжфазних шарів, що полягає у розщепленні некласичних зв’язаних чи нестаціонарних граничних умов і зведенні задачі до розв’язання інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра [45, 48, 53].

Задачі теплопровідності для тіл зі змінними поверхневими теплофізичними властивостями теж давно цікавлять дослідників. Існують експериментально-теоретичні підтвердження залежності від часу коефіцієнта тепловіддачі [13, 56]. Однак в основному розглядали однорідні тіла, відмінність властивостей приповерхневих шарів і основного матеріалу тіла не брали до уваги. Застосування аналітичних підходів до розв’язування задач зі змінним в часі коефіцієнтом тепловіддачі з поверхні навіть для одновимірних задач пов’язано зі значними труднощами, які полягають в тому, що важко домогтися одночасного виконання рівняння задачі і крайових умов зі змінним в часі параметром [13]. Тому для розв’язання таких задач використовували числові методи, також було розроблено ряд аналітично-числових підходів.

Одним з перших числових методів для розв’язування задач зі змінним в часі коефіцієнтом тепловіддачі було застосовано метод скінченних різниць [35]. В аналітично-числовому підході [9, 29] запропоновано перехід до нових змінних в задачі з отриманням граничних умов зі сталим коефіцієнтом, але при цьому вихідне рівняння задачі перетворювалось на нелінійне. Наближений розв’язок перетвореної задачі отримано для малих значень критерію Біо після нехтування нелінійним доданком у рівнянні.

У певний період розвитку теорії теплопровідності значного поширення набув операційний метод Лапласа розв’язування задач [12]. Формальний розв’язок задачі з його використанням отримано в [33]. В дослідженні [10] також застосовано інтегральне перетворення Лапласа за часом, після чого задачу зведено до інтегрального рівняння типу Вольтерра відносно температури поверхні, розв’язок якого побудовано методом послідовних наближень з використанням стадії регулярного теплового режиму нагріву тіла. Перетворення Лапласа з використанням двочастотних передавальних функцій для задач з коефіцієнтами тепловіддачі у вигляді раціональних комбінацій многочленів, тригонометричних функцій та експонент використано в [18]. У праці [54] інтегральне перетворення Лапласа застосовано разом з числовим методом скінченних різниць. В іншому підході [20] використано комбінацію методу апроксимації з методом послідовних наближень розв’язків задачі в області зображень за Лапласом.

Поширення набули також наближені підходи на основі розбиття процесу теплопровідності в тілі на декілька послідовних стадій [29, 30], зокрема, було сформульовано гіпотезу «термічного шару» із застосуванням схеми наведеного в [30] наближеного методу еквівалентних джерел.

Крім того, були запропоновані різноманітні схеми заміни задачі зі змінним коефіцієнтом тепловіддачі задачею зі сталим коефіцієнтом з подальшим зведенням вихідної задачі до інтегральних рівнянь типу Вольтерра чи нелінійних інтегральних рівнянь і використанням для їх розв'язування тих чи інших наближених або числових методів [23, 40]. Сталий коефіцієнт теплообміну, який відповідає максимальному значенню змінного коефіцієнта на заданому інтервалі часу, використовували [8] для початкового наближення розв'язку задачі. Для уточнення розв'язку будували послідовність лінійних задач, в яких нестаціонарна складова коефіцієнта тепловіддачі перенесена в температуру довкілля.

Інтегральне рівняння для температури поверхні безмежної пластинки із залежним від часу коефіцієнтом теплообміну, яка нагрівається зовнішнім середовищем зі змінною в часі температурою, отримано також і в [32]. Розв'язок цього рівняння знайдено лише для стадії регулярного режиму нагріву пластинки, тобто для достатньо великих значень часу.

Зведення задач такого типу до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами здійснено при використанні розвинень в ряди за власними функціями зі сталими [17] та змінними в часі власними значеннями [60], а також при застосуванні поширеного на такі задачі методу скінченних інтегральних перетворень [59]. Як альтернативу класичному методу скінченних інтегральних перетворень для певних класів задач було розроблено метод узагальнених інтегральних перетворень [16]. Для розв'язання отриманої внаслідок його застосування нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь здійснено її редукцію і запропоновано використовувати поширені комп'ютерні математичні пакети. Цей метод апробовано на задачах, наведених в працях [9, 10], і проаналізовано його ефективність.

До наближено-аналітичних методів також належить метод координатних функцій, який базується на отриманні послідовності додаткових граничних умов задачі для обчислення невідомих коефіцієнтів цих функцій [36].

Значне місце в дослідженнях теплопровідності зі змінною тепловіддачею посідають задачі для тонкостінних елементів конструкцій, зокрема пластинок [11, 25, 34]. У книзі [25] виведено рівняння теплопровідності для тонкостінних елементів зі змінним в часі коефіцієнтом теплообміну і з використанням інтегрального перетворення Лапласа розв'язано низку задач теплопровідності і термопружності.

Після десятиліть розвитку аналітично-числових і числових методів розв'язування нестаціонарних задач дифузій тепла і речовини зі змінним в часі коефіцієнтом теплообміну отримано аналітичний розв'язок для плити при довільному законі зміни цього коефіцієнта [55]. Метод побудови цього розв'язку базується на поданні для нього спеціальної структури і використанні так званих «зсувних функцій» з подальшим розвиненням температури в ряд Фур'є. Отриманий розв'язок дозволяє здійснювати граничний перехід до випадку сталого коефіцієнта теплообміну.

Порівняно з широкою бібліографією для однорідних тіл теплопровідності в неоднорідних тілах при залежних від часу коефіцієнтах тепловіддачі з поверхні присвячено небагато публікацій. Теплообмін з довкіллям двошарової стінки при змінному коефіцієнті тепловіддачі розглянуто в [31]. З використанням функцій Ґріна задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, ядро якого апроксимується рядом з білінійних функцій з отриманням системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Теплообмін півпростору з тонким покриттям зі змінним в часі коефіцієнтом тепловіддачі з поверхні досліджували в [2]. Однак теплоємність покриття вважали сталою. Для розв'язання задачі використовували операційний метод Лапласа і метод послідовних наближень в області зображень.

Теоретичні дослідження термодифузійних процесів в тілах з тонкими приповерхневими шарами із залежними від часу і тепловіддачею з поверхні, і теплоємністю шару практично відсутні. Експериментальні ж дослідження показують, що в ряді важливих випадків обов'язково потрібно враховувати змінність теплоємності тонких приповерхневих шарів чи покрить [51]. Серед основних причин зміни теплоємності тонкого шару може бути як зміна мікроструктури, так і зміна його товщини.

Тому у цій роботі розглянемо теплообмін з довкіллям довгого суцільного циліндра з тонким приповерхневим шаром, який має теплофізичні властивості, відмінні від основного матеріалу циліндра. Зведені коефіцієнти тепловіддачі з поверхні і теплоємності тонкого шару змінюються в часі. Приймаємо лінійні та експоненційні закони їх зміни. Для розв'язання сформульованої задачі розвинуто запропонований раніше метод розщеплення за допомогою зв'язувальних функцій ускладнених граничних умов задачі на класичну і некласичну частини, розвинення розв'язків в ряди Фур'є за власними функціями класичних задач і отримання для визначення невідомих зв'язувальних функцій інтегральних чи інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра [45, 48, 53]. У випадку змінних теплофізичних властивостей приповерхневого шару отримано інтегро-диференціальні рівняння зі змінними в часі коефіцієнтами [50]. На основі сплайн-апроксимацій зв'язувальних функцій розроблено алгоритм розв'язування таких рівнянь. За визначеною температурою циліндра досліджено його напружений стан. Знайдений аналітично-числовий розв'язок задачі дає змогу досліджувати термонапружений стан неоднорідного циліндра на різних стадіях нагріву без використання допущень про малі теплофізичні параметри. Точність та ефективність розробленого методу частково перевірено порівнянням отриманих результатів з відомими в літературі дослідженнями для однорідних тіл [9, 29, 35, 55].

1. Постановка задачі теплопровідності та її розв'язання. Нехай довгий суцільний ізотропний циліндр радіуса r_1 з тонким приповерхневим шаром, який має змінні в часі теплофізичні властивості, відмінні від основного матеріалу циліндра, нагрівається довкіллям сталої температури T_C. Теплообмін циліндра з оточуючим середовищем відбувається за законом Ньютона. Механічні властивості шару й циліндра однакові. Приповерхневий шар моделюємо тонкою оболонкою при ідеальному тепловому контакті з циліндром. Запишемо рівняння осесиметричної нестаціонарної теплопровідності для циліндра [12–14]

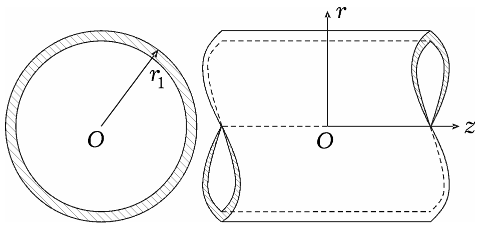

Рис. 1

$$\Delta T^*(r,\tau) = \alpha^2 \frac{\partial T^*(r,\tau)}{\partial \tau}, \qquad 0 \le r < r_1, \tag{1}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$; $T^*(r,\tau)$ – температура циліндра; α^2 – стала величина, обернена до коефіцієнта температуропровідності.

Поширеним є підхід, коли замість двошарової конструкції тіло–оболонка розглядають однорідне тіло, а вплив тонкої оболонки на його фізико-механічну поведінку враховують за допомогою ускладнених узагальнених граничних умов. Впродовж останніх десятиліть розвинуто різні методи отримання таких умов: операторний метод, який полягає в спрямуванні товщини оболонки до нуля з одночасним усередненням її теплофізичних характеристик [24, 26, 27], метод асимптотичних розвинень шуканих величин за параметром з розглядом різних наближень [41], метод розвинення визначальних характеристик фізичних полів в тонких шарах в степеневі ряди з утриманням декількох перших членів ряду [61], метод зосередженої ємності, коли в тілі виділяють області, в яких певна величина вздовж тієї чи іншої координати змінюється незначно, і її замінюють в цих областях середніми значеннями [57]. Особливістю зазначених методів є те, що внаслідок їх застосування на межі тіла отримують нестаціонарні граничні умови з оператором диференціювання за часом.

Осесиметричну теплову взаємодію циліндра з довкіллям через оболонку теж задаємо за допомогою нестаціонарних узагальнених гранично-контактних умов [48], записаних для змінних в часі межових теплофізичних параметрів:

$$\frac{\partial T^*(r,\tau)}{\partial r} + B(\tau)[T^*(r,\tau) - T_C] + H(\tau)\frac{\partial T^*(r,\tau)}{\partial \tau} = 0, \qquad r = r_1, \tag{2}$$

де $B(\tau)$, $H(\tau)$ – змінні в часі зведені теплофізичні коефіцієнти, які характеризують теплообмін циліндра з довкіллям через тонкий приповерхневий шар.

У початковий момент часу задаємо однаковий за товщиною циліндра розподіл температури:

$$T^*(r,\tau) = T_0^*, \qquad \tau = 0. \tag{3}$$

На осі циліндра вимагаємо обмеженості температури та відсутності теплового потоку:

$$T^*(r,\tau) < \infty, \qquad \frac{\partial T^*(r,\tau)}{\partial r} = 0, \qquad r = 0. \tag{4}$$

Для розв'язання поставленої задачі при нестаціонарних граничних умовах зі змінними параметрами розвинемо розроблений раніше [45, 48, 53] метод розвинення розв'язків некласичних крайових задач в ряди Фур'є за власними функціями задач з класичними граничними умовами. За допомогою заміни

$$T(r,\tau) = T^*(r,\tau) - T_C \tag{5}$$

зведемо граничну умову (2) до стандартного однорідного вигляду:

$$\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} + B(\tau)\,T(r,\tau) + H(\tau)\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau} = 0, \qquad r = r_1, \tag{6}$$

а рівняння (1), початкову умову (3) та умови (4) на осі циліндра запишемо як

$$\Delta T(r,\tau) = \alpha^2 \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau}, \qquad 0 \le r < r_1, \tag{7}$$

$$T(r,\tau) = T_0^* - T_C = T^0, \qquad \tau = 0, \tag{8}$$

$$T(r,\tau) < \infty, \qquad \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} = 0, \qquad r = 0. \tag{9}$$

Щоб знайти розв'язок отриманої задачі, розщепимо граничну умову (6) за допомогою введення на межі $r = r_1$ невідомої зв'язувальної функції $\Phi(\tau)$ [48]:

$$T(r,\tau) = \Phi(\tau), \qquad r = r_1, \tag{10}$$

$$\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r} + H(\tau)\,\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau} = -B(\tau)\Phi(\tau), \qquad r = r_1. \tag{11}$$

Тут рівність (10) − класична умова I-го роду, а (11), яка є другою частиною умови (6), буде використана пізніше для знаходження невідомої межової зв'язувальної функції.

У випадку сталої початкової температури T^0 структуру розв'язку крайової задачі (7), (10), (8), (9), подану через функцію $\Phi(\tau)$, запишемо у вигляді розвинення в ряд Фур'є за власними функціями цієї задачі:

$$T(r,\tau) = \frac{r^2}{r_1^2}\Phi(\tau) + 2\sum_{n=1}^{\infty} E_n(\tau)\frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{\alpha\mu_n r_1 J_1(\alpha\mu_n r_1)}, \tag{12}$$

де

$$E_n(\tau) = T^0 e^{-\mu_n^2\tau} - \Phi(\tau)\frac{(\alpha\mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha\mu_n r_1)^2} + 2\mu_n^2\int_0^{\tau}\Phi(t)e^{-\mu_n^2(\tau-t)}\,dt,$$

μ_n − нулі функції Бесселя $J_0(\alpha\mu r)$. Якщо тепер визначити $\Phi(\tau)$ з невикористаної частини (11) умови (6), то структура розв'язку (12) вихідної задачі про нагрів довкіллям циліндра з тонким приповерхневим шаром є його поданням у вигляді розвинення в ряд Фур'є за власними функціями класичної крайової задачі теплопровідності з граничною умовою першого роду.

Підставляючи вираз для температури (12) в невикористану умову (11), отримуємо для визначення функції $\Phi(\tau)$ інтегро-диференціальне рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерра, коефіцієнти якого є змінними:

$$H(\tau)\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} + \left(B(\tau) + \frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha\mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha\mu_n r_1)^2}\right)\Phi(\tau) -$$

$$-\frac{2}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} 2\mu_n^2\int_0^{\tau}\Phi(t)e^{-\mu_n^2(\tau-t)}\,dt = \frac{2}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} T^0 e^{-\mu_n^2\tau}. \tag{13}$$

Рівняння (13) розв'язуємо чисельно [6]. Для цього апроксимуємо функцію $\Phi(\tau)$ на рівних часових проміжках кубічними сплайнами

$$s_i(t) = a_{i0} + a_{i1}(t - t_{i-1}) + a_{i2}(t - t_{i-1})^2 + a_{i3}(t - t_{i-1})^3, \quad i = 1,\ldots,N.$$

Оптимальність розбиття часового інтервалу і вибір кількості членів ряду в (13) для забезпечення задовільної точності обчислення температури у випадку сталих коефіцієнтів досліджено у праці [48]. Для визначення коефіцієнтів сплайнів використовуємо рівняння (13) та умови сумісності сплайнів у внутрішніх вузлах розбиття часового інтервалу [6]:

$$s_i(t_i) = \Phi(t_i), \qquad i = 0,\ldots,N,$$

$$s_i(t_i - 0) = s_{i+1}(t_i + 0), \qquad i = 1,\ldots,N-1,$$

$$s_i'(t_i - 0) = s_{i+1}'(t_i + 0), \qquad i = 1,\ldots,N-1,$$

$$s_i''(t_i - 0) = s_{i+1}''(t_i + 0), \qquad i = 1,\ldots,N-1,$$

$$s_1''(t_0) = s_N''(t_N) = 0.$$

Сплайни забезпечують високу точність апроксимації одночасно і функції, і її похідних. Побудова апроксимаційних сплайнів зводиться до розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь з тридіагональною матрицею, яку розв'язуємо методом прогонки [6]. Переважання діагональних елементів матриці забезпечує існування єдиного розв'язку такої системи і його стійкість щодо похибок округлень.

Після того, як знайдено з інтегро-диференціального рівняння (13) температуру поверхні циліндра $\Phi(\tau)$, підставляємо її в структуру розв'язку задачі теплопровідності (12) і визначаємо розподіл температури в циліндрі.

2. Напружений стан циліндра. Знайдемо напруження в циліндрі, спричинені температурним полем. У квазістатичному випадку задачі термопружності рівняння рівноваги в переміщеннях мають вигляд [14]

$$\Delta\mathbf{u} + (1-2\nu)^{-1}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 2(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}\alpha_T\,\mathrm{grad}\,T, \qquad r \in [0, r_1], \tag{14}$$

де $\mathbf{u}$ – вектор переміщень в циліндрі, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу циліндра, α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Впливом тонкого приповерхневого шару, як механічного об'єкта, на напружений стан циліндра нехтуємо. Вважаємо, що циліндр ізотропний і його поверхня вільна від навантаження:

$$\sigma_{rr} = 0, \qquad r = r_1. \tag{15}$$

У випадку осесиметричної задачі колові переміщення $u_\theta = 0$. Решту розв'язків рівнянь рівноваги в переміщеннях (14) шукаємо у вигляді подання Папковича – Нойбера [14]

$$u_r = \Lambda_r + \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial r}(\Lambda - r\Lambda_r - z\Lambda_z),$$

$$u_z = \Lambda_z + \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}(\Lambda - r\Lambda_r - z\Lambda_z), \tag{16}$$

де $\Lambda_z(z,\tau) = K_1(\tau)z$, $\Lambda_r(r,\tau) = K_2(\tau)r$, а складова подання $\Lambda(r,\tau)$ є довільним частковим розв'язком рівняння

$$\Delta\Lambda(r,\tau) = 4(1+\nu)\alpha_T T(r,\tau).$$

Її можна вибрати, наприклад, у такому вигляді:

$$\Lambda(r,\tau) = 4(1+\nu)\alpha_T\left\{\frac{\Phi(\tau)}{r_1}\left[\frac{r^4}{16\,r_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(\alpha\mu_n)^3}\left(1 - \frac{4}{(\alpha\mu_n r_1)^2}\right)\frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{J_1(\alpha\mu_n r_1)}\right] - \right.$$

$$\left. -2\sum_{n=1}^{\infty}\left(T^0\frac{1}{(\alpha\mu_n)^3 r_1} + \frac{1}{\alpha^2\mu_n r_1}\int_0^{\tau}\Phi(\tau)e^{\mu_n^2 t}\,dt\right)\frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{J_1(\alpha\mu_n r_1)}e^{-\mu_n^2\tau}\right\}. \tag{17}$$

Довільні функції часу $K_1(\tau)$ та $K_2(\tau)$ конкретизуємо, задовольняючи граничні умови задачі.

Для визначення температурних напружень в циліндрі використовуємо співвідношення Дюгамеля − Неймана:

$$\sigma_{rr} = (2\mu + \lambda)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}u_r + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z} - (2\mu + 3\lambda)\alpha_T T(r,\tau),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (2\mu + \lambda)\frac{1}{r}u_r + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z} - (2\mu + 3\lambda)\alpha_T T(r,\tau),$$

$$\sigma_{zz} = (2\mu + \lambda)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{r}u_r + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} - (2\mu + 3\lambda)\alpha_T T(r,\tau),$$

де λ, μ − сталі Ляме.

Залежні від часу функції $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$, визначені з умови (15) та умови рівноваги поперечного перерізу циліндра $\int_0^{r_1} r\sigma_{zz}\,dr = 0$, мають вигляд

$$K_1(\tau) = \frac{(2\mu + \lambda)}{\mu(2\mu + 3\lambda)}\frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_1}, \qquad K_2(\tau) = \frac{(2\mu - \lambda)}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_1}.$$

Як результат отримуємо такі вирази для напружень:

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{4(1-\nu)}\left[\frac{1}{r_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\Big|_{r=r_1} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\right],$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{4(1-\nu)}\left[\frac{1}{r_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\Big|_{r=r_1} - \frac{\partial^2\Lambda}{\partial r^2}\right],$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\mu}{4(1-\nu)}\left[\frac{2}{r_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\Big|_{r=r_1} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r} - \frac{\partial^2\Lambda}{\partial r^2}\right]. \qquad (18)$$

Підставляючи у (18) вираз (17) для $\Lambda(r,\tau)$, отримаємо напруження в циліндрі через температуру поверхні $\Phi(\tau)$, співвідношення для яких не наводимо через громіздкість.

3. Перевірка ефективності розробленого методу на частковому прикладі: задача про нагрів тонкої однорідної безмежної пластинки. Теоретичний аналіз нагріву тіл при змінному в часі коефіцієнті теплообміну з довкіллям розпочався, мабуть, з дослідження [35]. В ньому числовим методом скінченних різниць знайдено температурне поле в однорідній безмежній пластинці. Пізніше було розроблено ряд наближених аналітично-числових підходів до розв’язання задач теплопровідності в однорідних тілах зі змінним критерієм Біо. Серед них відмітимо ті, в яких розв’язки порівнювались з отриманими в [35] результатами. Так, у праці [9] запропоновано наближений метод обчислення температурного поля в тілах канонічної форми зі змінним коефіцієнтом тепловіддачі з поверхні. Основою методу була заміна змінних, перетворення вихідного рівняння і граничних умов задачі з нехтуванням нелінійним членом у перетвореному рівнянні для малих значень критерію Біо. В [9] наведено порівняння отриманих результатів обчислень для безмежної пластинки з числовим розв’язком, отриманим у [35]. Поділ процесу нагріву тіла на декілька послідовних стадій з використанням наближеного методу осереднення функціональних поправок (а в подальших працях − методу еквівалентних джерел як його розвинення), запропоновано в дослідженнях [29, 30]. У [29] виконано порівняння отриманих числових результатів з наведеними і в [35], і в [9]. Пізніше у праці [17] для задач зі змінним параметром в граничній умові було розроблено метод узагальнених інтегральних перетворень. Ідея методу полягала у зведенні задачі до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами і використання для їх розв’язання відомих на той час комп’ютерних математичних пакетів. Ефективність цього методу також перевіряли на задачі про нагрів безмежної пластинки довкіллям з детальним порівнянням отриманих розв’язків з результатами праці [9].

У вступі згадано, що аналітичний метод розв’язування задач теплопровідності з граничними умовами теплообміну за законом Ньютона з довільною залежністю від часу коефіцієнта теплообміну запропоновано в [55]. Він обґрунтований на функціональному перетворенні крайової задачі за допомогою введення в структуру розв’язку «зсувних функцій» з подальшою реалізацією схеми відокремлення змінних і розвиненням шуканої температури в ряд Фур’є за власними функціями задачі зі сталим коефіцієнтом теплообміну. Ефективність методу перевірено на задачі про нагрів довкіллям тонкої плити, яку, як зазначено вище, розглядали раніше в дослідженнях [9, 16, 27, 34], виконано також порівняння отриманого в замкнутому вигляді розв'язку з наведеними в [29, 35].

Пропонуємо порівняльний аналіз ефективності розробленого тут для тіл з тонкими приповерхневими шарами методу розв'язання задач термопружності з ускладненими нестаціонарними граничними умовами за змінних межових теплофізичних параметрів. Порівняння є частковим, оскільки розглядаємо задачу для однорідного тіла, для тієї ж тонкої плити, що нагрівається довкіллям, аналіз підходів до розв'язання якої наведено вище. Розробленим методом задача зведена до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду. Аналітично-числовий розв'язок цієї задачі порівнюємо з відомими результатами, отриманими як числовим методом у праці [35], так і аналітичним методом у праці [55]. Залежність критерію Біо від часу експоненційна: $B(\tau) = 1.2 - e^{-\tau}$.

Результати розрахунків температури поверхонь пластинки методом скінченних різниць [35], аналітичним методом [55] і запропонованим у цій роботі аналітично-числовим методом (розв'язок рівняння (13) для випадку однорідної пластинки) наведено в табл. 1, 2. Обчислені відхилення $\delta_{I\text{-}II}$ і $\delta_{III\text{-}II}$ свідчать про те, що аналітично-числовий розв'язок, отриманий з використанням розробленого методу, має задовільну точність, яка є кращою, ніж числового, обчисленого у праці [35], з яким порівнювали свої результати багато дослідників.

Таблиця 1

	Температура на зовнішній поверхні			Відхилення, %	
τ	***I*** – [35]	***II*** – [55]	***III*** – (13)	$\delta_{I\text{-}II}$	$\delta_{III\text{-}II}$
0.5	0.5257	0.538	0.5394	2.3	0.3
1.0	0.6777	0.676	0.6831	0.3	1.1
1.5	0.7693	0.780	0.7870	1.4	0.9
2.0	0.8473	0.853	0.8588	0.7	0.7
2.5	0.8834	0.902	0.9070	2.1	0.6
3.0	0.9210	0.936	0.9390	1.6	0.3
3.5	0.9465	0.958	0.9601	1.2	0.2
4.0	0.9640	0.972	0.9739	0.8	0.2
				Середнє відхилення, %	
				1.3	0.5

Таблиця 2

	Температура внутрішньої поверхні			Відхилення, %	
τ	***I*** – [35]	***II*** – [55]	***III*** – (13)	$\delta_{I\text{-}II}$	$\delta_{III\text{-}II}$
0.5	0.4004	0.401	0.4025	0.1	0.4
1.0	0.5379	0.541	0.5437	0.6	0.5
1.5	0.6619	0.672	0.6748	1.5	0.4
2.0	0.7703	0.774	0.7768	0.5	0.4
2.5	0.8333	0.848	0.8500	1.7	0.2
3.0	0.8781	0.899	0.9005	2.3	0.2
3.5	0.9172	0.933	0.9344	1.7	0.2
4.0	0.9441	0.956	0.9570	1.2	0.1
				Середнє відхилення, %	
				1.2	0.3

4. Числові результати для задачі про нагрів довкіллям довгого циліндра з тонким приповерхневим шаром зі змінними межовими теплофізичними параметрами. Обчислення виконано для випадку рівності нулеві початкової температури циліндра T^0 для таких безрозмірних величин:

$$\tilde{T}(\rho,\tilde{\tau}) = T_C^{-1}T^*(r,\tau), \qquad \tilde{\sigma}(\rho,\tilde{\tau}) = \sigma(r,\tau)\left(2G\alpha_T\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)T_C\right)^{-1},$$

$$\tilde{B}(\tau) = r_1 B(\tau), \quad \tilde{H}(\tau) = (\alpha^2 r_1)^{-1}H(\tau), \quad \rho = r\cdot r_1^{-1}, \quad \tilde{\tau} = \tau\cdot(\alpha^2 r_1^2)^{-1}.$$

Для сплайн-апроксимації температури поверхні циліндра при розв'язуванні інтегро-диференціального рівняння (13) часовий проміжок розбиваємо на рівні інтервали. Це розбиття і кількість членів ряду у рівнянні (13) вибираємо так, щоб наступне наближення розв'язку відрізнялось від попереднього не більше, ніж на наперед задану величину, якою задаємо точність розв'язання задачі. Аналогічно вибираємо мінімальну кількість членів рядів у виразах для температури і напружень всередині циліндра.

Отримані результати досліджень наведено на графіках зміни в часі температури і напружень на поверхні та в центрі циліндра при різних законах залежності від часу зведених коефіцієнтів теплообміну приповерхневого шару $B(\tau)$ та його теплоємності $H(\tau)$.

На рис. 2 – рис. 4 показано зміну температури поверхні циліндра і колових напружень на ній, а також радіальних напружень в центрі циліндра для різних лінійних законів зміни $B(\tau)$ і сталого параметра H. Розглядали зростання і спадання $B(\tau)$ за часом. Порівнювали термонапружений стан циліндра при змінному коефіцієнті $B(\tau)$ і при його сталих значеннях. Виявлено, якщо стале значення параметра співпадає з початковим значенням $B(\tau)$, то відповідні криві зміни температури і напружень для цих випадків відрізняються незначно. Збільшення ж початкового значення зведеного коефіцієнта теплообміну збільшує максимальні значення напружень.

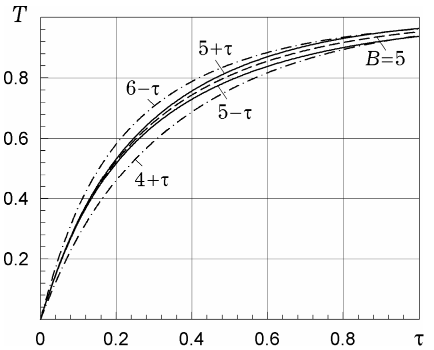

Рис. 2

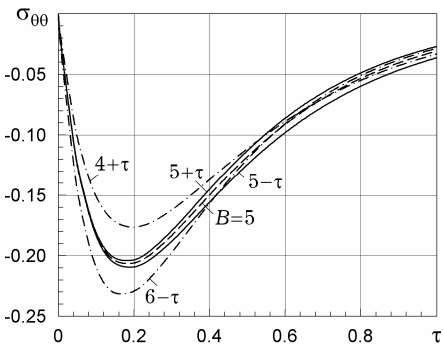

Рис. 3

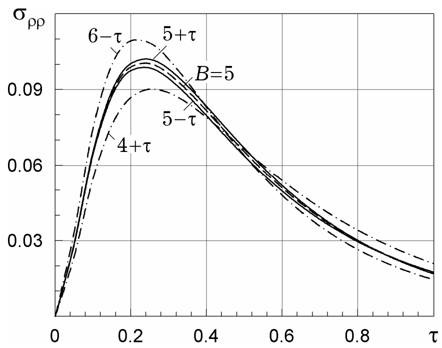

Рис. 4

Проаналізовано також вплив різних лінійних законів зміни в часі зведеного коефіцієнта теплоємності приповерхневого шару $H(\tau)$ при сталому значенні B, що продемонстровано на рис. 5 – рис. 7. Величина початкового значення $H(\tau)$ істотно впливає на нагрів і напружений стан циліндра. Однак, на відміну від випадку, коли був змінним зведений коефіцієнт теплообміну $B(\tau)$, збільшення зведеної теплоємності приповерхневого шару $H(\tau)$ спричинює зменшення температури і напружень. Щодо порівняння випадків змінного та сталого параметра $H(\tau)$, то виявлена для $B(\tau)$ закономірність підтверджується і в цьому випадку: якщо сталий параметр H співпадає з початковим значенням зміни за лінійним законом $H(\tau)$, то відмінність у зміні в часі термонапруженого стану циліндра є незначною.

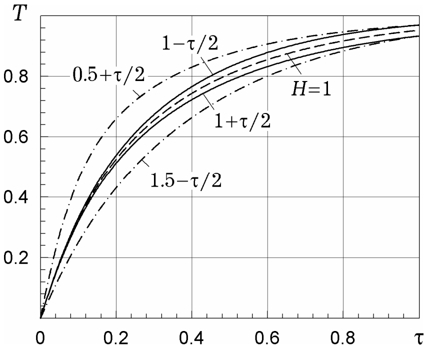

Рис. 5

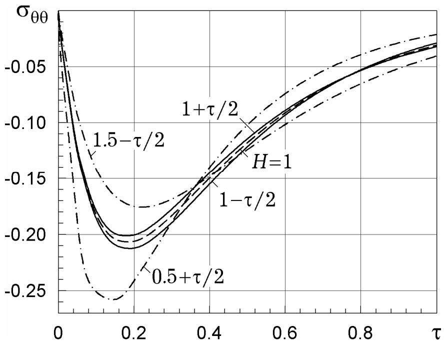

Рис. 6

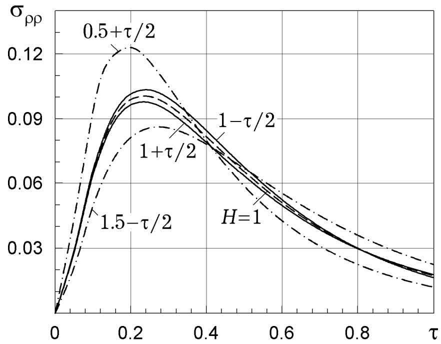

Рис. 7

У багатьох дослідженнях для коефіцієнта теплообміну вибирали експоненційний закон залежності від часу [8–10, 20, 29, 35, 40, 55, 56]. На рис. 8 – рис. 10 показано вплив $B(\tau)$ на нагрів циліндра і на його напружений стан для різних експоненційних законів зміни цього параметра за сталого параметра H.

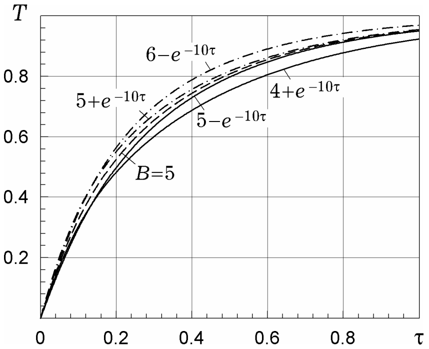

Рис. 8

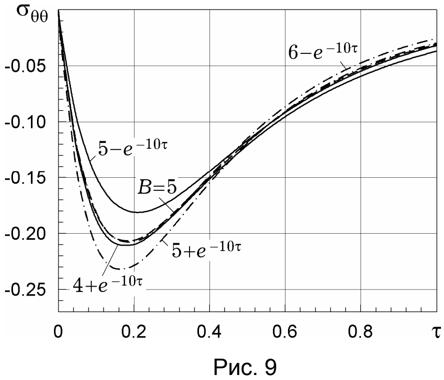

Рис. 9

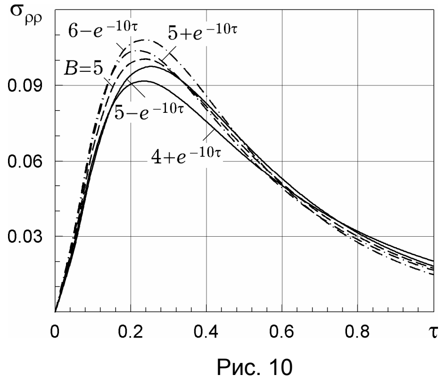

Рис. 10

Бачимо, що для експоненційного закону зміни параметра $B(\tau)$ наближення сталим параметром, що дорівнює його початковому значенню, є гіршим порівняно з наближенням сталим параметром, що дорівнює значенню $B(\tau)$ в кінці часового інтервалу, що розглядається $(\tau = 1.0)$. Така ж закономірність проявляється і при наближенні сталим значенням експоненційно залежної від часу зведеної теплоємності шару.

Криві зміни в часі температури й напружень для різних випадків експоненційної залежності від часу $H(\tau)$ при сталому параметрі B наведено на рис. 11 – рис. 13. Як і для лінійної залежності зведеної теплоємності від часу, її збільшення спричинює зменшення температури циліндра та напружень.

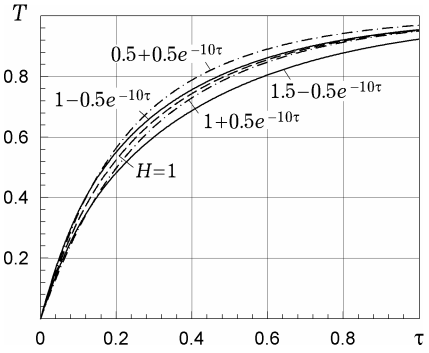

Рис. 11

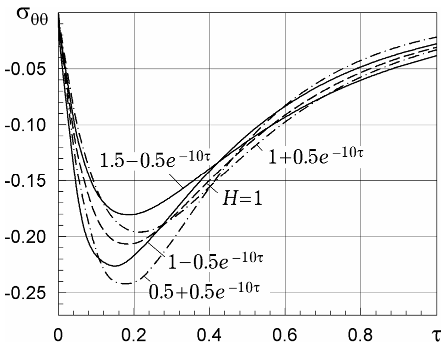

Рис. 12

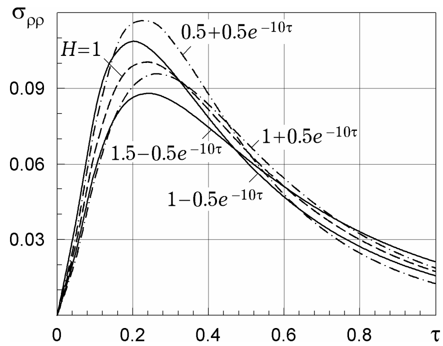

Рис. 13

На рис. 14 – рис. 16 наведено графіки, які характеризують термопружну поведінку циліндра, якщо обидва зведених теплофізичних параметри $B(\tau)$ і $H(\tau)$ змінюються в часі. При заданому експоненційному законі зміни $B(\tau)$ розглядаються випадки лінійної та експоненційної залежності параметра $H(\tau)$, а також наближення сталими величинами, які дорівнюють початковому значенню цього параметра, значенню в кінці інтервалу часу, що розглядається ($\tau = 1{,}0$) та середньому арифметичному цих сталих величин. Бачимо, що основні закономірності наближення кривих температури і напружень при змінному коефіцієнті зведеної теплоємності шару сталим коефіцієнтом такі ж, як і описані вище у випадку зведеного коефіцієнта теплообміну. Наближення ж середнім арифметичним початкового і кінцевого значень $H(\tau)$ є кращим на початковій стадії нагріву для експоненційного закону зміни $H(\tau)$, а на кінцевій стадії – для лінійного.

Окремо досліджували можливість найкращого наближення змінного зведеного коефіцієнта теплообміну $B(\tau)$ сталою величиною. Перебирали значення цього коефіцієнта з діапазону його зміни і для кожного з них розв'язували задачу термопружності. Отримані значення температури і напружень в циліндрі порівнювали з обчисленими при змінному коефіцієнті. Наприклад, коли $B(\tau) = 2 - e^{-10\tau}$ і $H = 1$, температура поверхні циліндра і напруження на часовому проміжку $[0, 1]$ найменше в середньому відрізнятимуться від обчислених при сталому значенні $B = 1.925$.

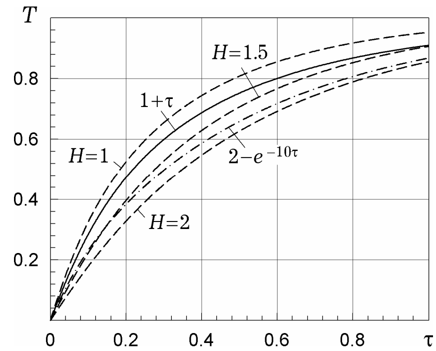

Рис. 14

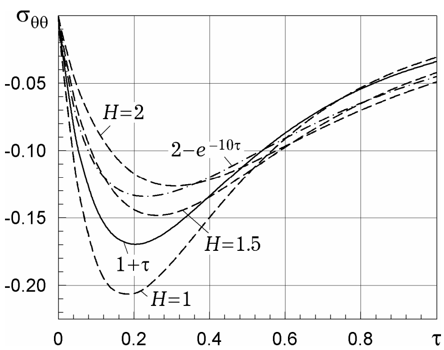

Рис. 15

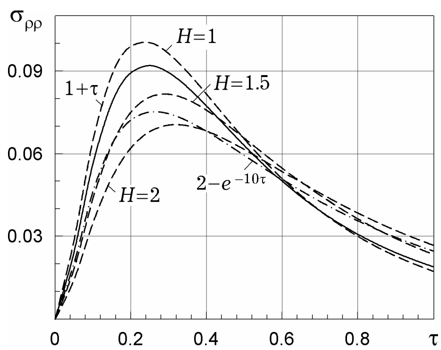

Рис. 16

5. Висновки. Розроблено метод розв'язування некласичних задач термопружності з нестаціонарними граничними умовами, якими задається теплова взаємодія з довкіллям тіл з тонкими приповерхневими шарами зі змінними в часі теплофізичними властивостями. Метод базується на розщепленні ускладнених некласичних умов на класичну і некласичну частини, розвиненні шуканих розв'язків в ряди Фур'є за власними функціями класичної задачі і отриманні для температури поверхні тіла інтегро-диференціальних рівнянь з інтегральними операторами типу Вольтерра, які розв'язуються за допомогою сплайн-апроксимацій. Ефективність методу частково перевірено на відомій в літературі задачі про нагрів довкіллям тонкої однорідної пластинки зі змінним коефіцієнтом теплообміну. Метод можна застосовувати до розв'язування задач, не накладаючи обмежень на величину межових теплофізичних параметрів за задання довільних законів їх зміни. Розробленим методом знайдено температурне поле і напруження в довгому ізотропному циліндрі, який нагрівається довкіллям, якщо його тонкий приповерхневий шар має відмінні від основного матеріалу теплофізичні властивості, що змінюються в часі. Досліджено термонапружений стан циліндра для випадків лінійного та експоненційного законів зміни зведених коефіцієнтів теплообміну і теплоємності шару. Проаналізовано похибку наближення змінних параметрів сталими залежно від закону їх зміни та стадій нагріву циліндра.

Запропонований метод може бути поширений на зв'язані задачі механотермодифузії для тіл з тонкими приповерхневими неоднорідностями зі змінними теплофізичними властивостями [45, 47, 53]. Інформація про властивості отриманого аналітично-числового розв'язку може бути використана для розв'язування обернених задач ідентифікації межових теплофізичних параметрів, які змінюються в часі, для тіл з тонкими приповерхневими шарами [49].

1. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. − Москва: Наука, 1983. − 487 с.
2. *Аттетков А. В., Власов П. А., Волков И. К.* Температурное поле полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой // Инж.-физ. журн. − 2001. − **74**, № 3. − С. 81−86.

Те саме: *Attetkov A. V., Vlasov P. A., Volkov I. K.* Temperature field of a half-space with a thermally thin coating in pulse modes of heat exchange with the environment // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2001. – **74**, No. 3. – P. 647–655.

3. *Бойко З.* Приповерхнева неоднорідність напружено-деформованого стану суцільного циліндра за врахування дисипативних процесів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 19–28.
4. *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С., Грицина О. Р.* Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів // Доп. АН України. – 1991. – № 11. – С. 47–51.
5. *Бурак Я., Чапля Є., Нагірний Т., Чекурін В., Кондрат В., Чернуха О., Мороз Г., Червінка К.* Фізико-математичне моделювання складних систем. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
6. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
7. *Веселовский В. Б.* Решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных теплозащитных покрытий // Прикл. вопросы аэродинамики. – Киев: Наук. думка, 1987. – С. 95–100.
8. *Видин Ю.* В. Расчет теплопроводности твердых тел при переменных коэффициентах теплоотдачи // Тепломассообмен ММФ-2000: Тр. IV Минского междунар. форума. – Минск, 2000. – **3**. – С. 386–388.
9. *Иванов В. В., Саломатов В. В.* К расчету температурного поля в твердых телах при переменном коэффициенте теплообмена // Инж.-физ. журн. – 1965. – **9**, № 1. – С. 83–85.

   Те саме: *Ivanov V. V., Salomatov V. V.* On the calculation of the temperature field in solids with variable heat-transfer coefficients // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1965. – **9**, No. 1. – P. 63–64.
10. *Иванов В. В., Саломатов В. В.* Нестационарное температурное поле в твердых телах при переменном коэффициенте теплообмена // Инж.-физ. журн. – 1966. – **11**, № 2. – С. 266–268.

    Те саме: *Ivanov V. V., Salomatov V. V.* Unsteady temperature field in solid bodies with variable heat transfer coefficient // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1966. – **11**, No. 2. – P. 151–152.
11. *Ильченко О. Т.* Температурное поле двухслойной пластины при переменных во времени граничных условиях теплообмена // Инж.-физ. журн. – 1970. – **19**, № 6. – С. 1094–1099.

    Те саме: Il'chenko O. T. Temperature field of two-layered plate with time-varying heat-transfer conditions // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1970. – **19**, No. 6. – P. 1567–1570.
12. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 487 с.
13. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – Москва: Высш. шк., 1985. – 480 с.
14. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 304 с.
15. *Коваленко Е. В.* Контактные задачи для тел с покрытиями // Механика контактных взаимодействий: Сб. статей / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: Физматлит, 2001. – 670 с.
16. *Котта Р. М., Сантос К. А. К.* Задача нестационарной диффузии с переменными коэффициентами в граничных условиях // Инж.-физ. журн. – 1991. – **61**, № 5. – С. 829–837.

    Те саме: *Cotta R. M., Santos C. A. C.* Nonsteady diffusion with variable coefficients in the boundary conditions // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1991.– **61**, No. 5.– P. 1411–1418.
17. *Козлов В. Н.* Расчет поля температур неограниченной пластины при переменном значении коэффициента теплообмена // Инж.-физ. журн. – 1969. – **16**, № 1. – С. 125–128.

    Те саме: *Kozlov V. N.* Temperature field of an infinite plate in the case of a variable heat-exchange coefficient // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1969. – **16**, No. 1. – P. 95–97.
18. *Козлов В. Н.* Решение задач теплопроводности при переменном коэффициенте теплообмена // Инж.-физ. журн. – 1970. – **18**, № 1. – С. 133–138.

    Те саме: *Kozlov V. N.* Solution of heat-conduction problem with variable heat-exchange coefficient // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1970. – **18**, No. 1. – P. 100–104.
19. *Коляно Ю. М., Кушнир Р. М.* Температурные напряжения в нагреваемых источниками тепла пластинках с двусторонними покрытиями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 11. – С. 72–75.
20. *Любов Б. Я., Яловой Н. И.* Теплопроводность тела при переменном коэффициенте теплообмена // Инж.-физ. журн. – 1969. – **17**, № 4. – С. 679–687.

Те саме: *Lyubov B. Ya., Yalovoi N. I.* Heat conductivity of a body with variable heat exchange coefficient // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1969. – **17**, No. 4. – P. 1264–1270.

21. *Мартиняк Р. М., Швець Р. М.* Математична модель механічного контакту тіл через тонкий неоднорідний прошарок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 2. – С. 107–109.
    Те саме: *Martinyak R. M., Shvets' R. M.* A mathematical model of mechanical contact of bodies across a thin inhomogeneous layer // J. Math. Sci. – 1998. – **90**, No. 2. – P. 2000–2002.
22. *Мартиняк Р. М., Швець Р. М* Умови теплового контакту тіл через неоднорідні за товщиною прошарки // Доп. НАН України. – 1996. – № 9. – С. 74–76.
23. *Мотовиловец И. А., Козлов В. И.* Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1987. – 263 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 1.
24. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
25. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с.
26. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах // Физ.-хим. механика материалов. – 1967. – **3,** № 5. – С. 575–583.
    Те саме: *Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. P.* Effect of surface layers on diffusion processes and the resulting stress state in solids // Mater. Sci. – 1968. – **3**, No. 5. – P. 420–426.
27. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
28. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю., Іванків К. С.* Нестаціонарна задача теплопровідності для термочутливого циліндра з тонким покриттям // Вісн. Львів. унів. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 46. – С. 83–88.
29. *Постольник Ю. С.* Одномерный конвективный нагрев при зависящем от времени коэффициенте теплообмена // Инж.-физ. журн. – 1970. – **18**, № 2. – С. 316–322.
    Те саме: *Postolnik Yu. S.* One-dimensional convective heating with a time-dependent heat-transfer coefficient // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1970. – **18**, No. 2. – P. 233–238.
30. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П., Решетняк І. С.* Основи металургійної термомеханіки. – Дніпродзержинськ: Вид-во Дніпродзерж. держ. техн. ун-ту, 1998. – 360 с.
31. *Приходько И. М.* Теплопроводность двухслойной стенки при изменяющихся во времени коэффициенте теплообмена и температуре окружающей среды // Инж.-физ. журн. – 1970. – **18**, № 2. – С. 323–327.
    Те саме: *Prikhod'ko I. M.* Thermal conductivity of two-layer wall for a time-varying heat-transfer coefficient and ambient temperature// J. Eng. Phys. Thermophys. – 1970. – **18**, No. 2. – P. 239–242.
32. *Саломатов В. В., Гончаров Э. И.* Температурное поле неограниченной пластины при переменных значениях коэффициента теплообмена и температуры внешней среды // Инж.-физ. журн. – 1968. – **14**, № 4. – С. 743–745.
    Те саме: *Salomatov V. V., Goncharov E. I.* Temperature field of an infinite plate for variable values of the heat transfer coefficient and the temperature of the external medium // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1968. – **14**, No. 4. – P. 404–405.
33. *Сидляр М. М.* Нестационарное температурное поле бесконечного цилиндра при переменном коэффициенте теплоотдачи // Прикл. механика. – 1965. – **7**, № 1. – С. 11–13.
34. *Сідляр М. М.* Визначення нестаціонарного температурного поля в двошаровій пластинці у випадку змінного в часі коефіцієнта тепловіддачі // Прикл. механіка. – 1963. – **9**, № 3. – С. 309–314.
35. *Соколов В. Н.* Расчет нагрева тел методом сеток // Нагрев крупных слитков / Под ред. В. А. Куроедова. – Москва: Машгиз, 1954. – 116 с. – (ЦНИИТМаш, Кн. 66.)
36. *Стефанюк Е. В., Кудинов В. А., Аверин Б. В., Антимонов М. С.* Аналитические решения задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2008. – **2(17)**. – С. 171–184.
37. *Терлецкий Р. Ф., Турий О. П.* Моделирование термомеханического поведения слоистых тел с учетом излучения и поглощения тепловой энергии // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 19–31.
38. *Тушинский Л. И., Плохов А. В.* Исследование структуры и физико-механических свойств покрытий. – Новосибирск: Наука, 1986. – 200 с.
39. *Федірко В. М., Матичак Я. С., Погрелюк І. М., Притула А. О.* Опис дифузійного насичування титану неметалевими домішками з урахуванням їх сегрегації на поверхні // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 1. – С. 39–45.

Те саме: *Fedirko V. M., Matychak Ya. S., Pohrelyuk I. M., Prytula A. O.* Description of the diffusion saturation of titanium with nonmetallic admixtures with regard for their segregation on the surface // Mater. Sci. – 2005. – **41**, No. 1. – P. 39–46.

40. *Федоткин И. М., Айзен А. М., Голощук И. А.* Применение интегральных уравнений к задачам теплопроводности при переменном коэффициенте теплообмена // Инж.-физ. журн. – 1975. – **28**, № 3. – С. 528–532.
    Те саме: *Fedotkin I. M., Aizen A. M., Goloshchuk I. A.* Application of integral equation to heat conduction priblems in which the heat transfer coefficient varies // J. Eng. Phys. Thermophys. –1975. – **28**, No. 3. – P. 392–395.
41. *Филиппов А. И., Коркешко О. И.* Исследование пространственно-временных распределений концентрации веществ на основе «схемы сосредоточенной емкости» // Инж.-физ. журн. – 1997. – **70**, № 2. – С. 205–210.
    Те саме: *Filippov A. I., Korkeshko O. I.* Study of space-time impurity distributions using a «lumped-capacitance» scheme // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1997. – **70**, No. 2. – P. 202–207.
42. *Чекурін В. Ф. Процюк Б. В.* До ідентифікації параметрів багатошарових покрить за термопружними переміщеннями поверхні нагрівання // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 1. – С. 7–15.
    Те саме: *Chekurin V. F., Procjuk B. V.* Indetification of the parameters of multilayer coatings according to the thermoelastic displacements of the surface of heating // Mater. Sci. – 2004. – **40**, No. 1. – P. 1–13.
43. *Шевчук В. А.* Нестаціонарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 2. – С. 179–185.
44. *Швецъ Л. П., Яцків О. І.* До побудови розв'язку крайової задачі дифузії із некласичними граничними умовами // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1998. – № 346. – С. 165–168.
45. *Швецъ Р. М., Яцків О. І.* Взаємозв'язана задача механотермодифузії для шаруватих тіл канонічної форми з тонкими прошарками // Доп. АН України. – 1993. – № 11. – С. 65–69.
46. *Швецъ Р. М., Яцків О. І.* Поширення методу власних функцій на крайові задачі механодифузії для багатошарових тіл із прошарками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 4. – С. 155–161.
    Те саме: *Shvets R. M., Yatskiv, O. I.* Extension of the method of eigenfunctions to the boundary-value problems of mechanical diffusion for multilayer bodies with interlayers // J. Math. Sci. – 2001. – **107**, No. 1. – P. 3691–3696.
47. *Швецъ Р. М., Яцків О. І., Бобик Б. Я.* Вплив тонких межових неоднорідностей на напружений стан циліндричних тіл за дії термодифузійних процесів // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 427–432.
48. *Швецъ Р. М., Яцків О. І., Бобик Б. Я.* Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестаціонарної граничної умови // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 186–194.
49. *Швецъ Р. М., Яцків О. І., Бобик Б. Я.* Ідентифікація межових теплофізичних параметрів циліндра за нестаціонарних умов теплообміну з довкіллям // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 198–207.
50. *Швецъ Р. М., Яцків О. І., Бобик Б. Я.* Термопружність циліндра з тонким приповерхневим шаром, теплофізичні характеристики якого змінюються з часом // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 100–102.
51. *Юанъ В. Д.* Теплопередача в слоистой движущейся полосе, сжатой между двумя вращающимися цилиндрами // Теплопередача. – 1985. – **107**, № 3. – С. 32–40.
    Те саме: *Yuen W. D.* On the heat transfer of a moving composite strip compressed by two rotating cylinders // J. Heat Transfer. – 1985. – **107**, No. 3. – P. 541–548.
52. *Яцків О. І.* Метод власних функцій в крайових задачах з узагальненими граничними умовами // Розробка та застосування мат. методів в наук.-техн. дослідженнях: Матеріали Всеукр. наук.-техн. конф., присвяч. 70-річчю від дня народження проф. П. С. Казимірського. – Львів, 1995. – Ч. 2. – С. 98.
53. *Яцків О. І., Швецъ Р. М.* Побудова розв'язку задачі механодифузії про двокомпонентне дифузійне насичення і напружений стан шаруватого циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 3. – С. 91–102.
54. *Becker N. M., Bivins R. L., Hsu Y. C., Murphy H. D., White A. B., Wing G. M.* Heat diffusion with time-dependent convective boundary condition // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1983. – **19**, No. 12. – P. 1871–1880.
55. *Han Taw Chen, Shao Lun Sun, Hui Chen Huang, Sen Yung Lee.* Analytic closed solution for the heat conduction with time dependent heat convection coefficient at one boundary // Comput. Model. Eng. & Sci. – 2010. – **59**, No. 2. – P. 107–126.

56. *Hung Thanh Nguyen, Frank Melandsø, Stefan Jacobsen.* Time dependent surface heat transfer in light weight aggregate cement based materials // Engineering. – 2010. – **2**, No. 5. – P. 307–317.
57. *Lauwerier H. A.* The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid // Appl. Sci. Res. – 1955. – **5**, No. 2. – P. 145–150.
58. *Mikata Y., Taya M.* Thermal stresses in a coated short fiber composite // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1986. – **53**, No. 3. – P. 681–689.
59. *Mikhailov M. D.* On the solution of the heat equation with time dependent coefficient // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1975. – **18**. – P. 344–345.
60. *Özisik M. N., Murray R. L.* On the solution of linear diffusion problems with variable boundary condition parameters // J. Heat Transfer. – 1974. – **96**, No. 1. – P. 48–51.
61. *Shevchuk V. A.* Modeling and computation of heat transfer in a system «body-multi-layer coating» // Heat Transfer Res. – 2006. – **37**, No. 5. – P. 412–423.

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРА С ТОНКИМ ПРИПОВЕРХНОСТНЫМ СЛОЕМ, ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОТОРОГО ИЗМЕНЯЮТСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Развит метод решения краевых задач исследования термонапряженого состояния цилиндрических тел с тонкими приповерхностными слоями, имеющими переменные во времени теплофизические свойства. Наличие тонкого приповерхностного слоя в длинном сплошном цилиндре учитывается в сформулированной краевой задаче с помощью неклассического нестационарного граничного условия с переменными коэффициентами. После замены этого условия классическим условием первого рода исходная задача сводится к отысканию решения интегро-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами с интегральным оператором типа Вольтерра, для решения которого используются сплайн-апроксимации. Эффективность метода частично проверена на известной задаче о нагреве средой тонкой однородной пластинки с переменным критерием Био. Исследовано термонапряженное состояние цилиндра при линейных и экспоненциальных законах изменения во времени приведенных поверхностных параметров теплоотдачи и теплоемкости. Для различных стадий нагрева проанализировано, при каких постоянных значениях параметров тепловой режим цилиндра будет меньше всего отличаться от режима при переменных параметрах. Полученные решения и данные об их свойствах могут быть использованы при решении задач граничной параметрической идентификации.

THERMOSTRESSED STATE OF LONG CYLINDER WITH THIN SURFACE LAYER HAVING TIME DEPENDENT THERMAL PROPERTIES

The method for solving boundary value problems of thermostressed state of cylindrical bodies with thin surface layers having time dependent thermal properties is developed. The presence of a thin surface layer in a long solid cylinder is taken into account in formulating the boundary-value problem by means of a nonclassical non-stationary boundary condition with variable coefficients. After replacing this condition by the first kind classical condition the initial problem is reduced to finding the solution of integro-differential equation with variable coefficients. This equation has Volterra-type integral operator and is solved by using the spline approximations. Efficiency of the method is partially verified on a well-known problem on heating by the environment of a thin homogeneous plate with variable Biot number. Thermostressed state of a long cylinder for linear and exponential laws of change in time of normalized surface parameters of surface heat transfer and heat capacity is investigated. It is analyzed for different stages of heating, at which constant values of parameters the thermal regime of the cylinder will be the least different from the mode with variable parameters. The obtained solutions and data on their properties can be used at solving the problems of boundary parametrical identification.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.10.11