УДК 539.3

Г. С. Кіт, М. С. Черняк

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТІЛА З ТЕПЛОВИДІЛЬНИМИ СФЕРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Розв'язано задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з одним тепловидільним сферичним включенням, а також з осесиметричною системою сферичних включень, які мають однакові з матрицею пружні властивості і різні коефіцієнти лінійного теплового розширення. Досліджено розподіл переміщень і напружень в залежності від модулів зсуву і коефіцієнтів лінійного теплового розширення для одного та двох включень.

Міцність і руйнування крихких тіл під час нагріву суттєво залежить від наявності в них включень, в околі яких зростають температурні напруження. Це має, зокрема, велике значення для дослідження термопружного стану елементів (твелів), які виділяють тепло і представляють собою матрицю з розподіленими в ній частинками палива (включеннями). Твели є елементами конструкцій ядерних енергетичних установок різного функціонального призначення [1, 3, 6, 9, 10], в деяких з них використовують твели зі сферичними тепловидільними частинками [1, 7].

Розподіл напружень у тілі з включеннями залежить від багатьох факторів, зокрема механічних і теплофізичних характеристик матеріалів включень і матриці. Якщо включення розміщені близько одне від одного, то виникають трудноші під час аналізу напруженого стану через велику кількість параметрів, які необхідно врахувати при обчисленнях: модулі пружності, коефіцієнти Пуассона, теплопровідності та лінійного теплового розширення матеріалів, інтенсивність тепловиділення включень. Коли пружні властивості матеріалів включень і матриці однакові, з урахуванням тільки різних коефіцієнтів теплопровідності та лінійного теплового розширення (КЛТР) можна одержати точний розв'язок і зробити певні висновки про розподіл напружень у тілі. Включення, які мають однакові з тілом пружні властивості, але різні КЛТР, за термінологією праці [5], називають термічними.

Пропонована стаття присвячена визначенню температурного поля і напруженого стану безмежного тіла з одним тепловидільним сферичним включенням за різних теплофізичних і механічних параметрів, а також з системою сферичних термічних включень.

Напружений стан тіла з включенням. Розглянемо безмежне тіло, в якому міститься сферичне тепловидільне включення радіуса a, що виділяє тепло зі сталою питомою потужністю q. Механічні і теплофізичні властивості включення і тіла різні (позначимо їх індексами «1» і «2» відповідно). На межі включення і тіла виконуються умови ідеального теплового і механічного контактів.

За умовами задачі температура задовольняє рівняння у сферичній системі координат [8]

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rT_1) = -\frac{q}{\lambda_1}, \qquad \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rT_2) = 0\,, \tag{1}$$

де λ_1 – коефіцієнт теплопровідності. Врахувавши умови ідеального теплового контакту при $r = a$ та умову на нескінченності:

$$T_1\big|_{r=a} = T_2\big|_{r=a}\,, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}\,, \quad T_2 = 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty\,,$$

а також обмеження температури в центрі включення, з рівнянь (1) отримуємо значення температури

$$T_1 = -\frac{qr^2}{6\lambda_1} + C_1^T, \qquad T_2 = -\frac{C_2^T}{r},$$

$$C_1^T = \frac{qa^2}{6\lambda_1\lambda_2}(2\lambda_1 + \lambda_2), \qquad C_2^T = -\frac{qa^3}{3\lambda_2}, \tag{2}$$

або в безрозмірних величинах $\rho = \dfrac{r}{a}$, $\lambda^* = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$T_1(\rho) = \frac{qa^2}{6\lambda_1}(1 + 2\lambda^* - \rho^2), \qquad T_2(\rho) = \frac{qa^2}{3\lambda_1}\frac{\lambda^*}{\rho}. \tag{3}$$

Для розв’язання задачі термопружності використаємо рівняння рівноваги в переміщеннях [5]

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\Theta - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \alpha(3\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,T, \tag{4}$$

де $\Theta = \mathrm{div}\,\mathbf{u}$ − об’ємна деформація, λ, μ − сталі Ляме. Запишемо рівняння (4) для одновимірного випадку [2]

$$\frac{d\Theta}{dr} = m\frac{dT}{dr}, \qquad m = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu}, \tag{5}$$

де ν і α − коефіцієнти Пуассона і лінійного теплового розширення. Розв’язок рівняння (5)

$$\Theta_i = D + m_i T_i, \qquad i = 1, 2. \tag{6}$$

Невідомі сталі D визначаємо з граничних умов ідеального механічного контакту на межі включення $r = a$ та з умови на нескінченності:

$$u_1\big|_{r=a} = u_2\big|_{r=a}, \qquad \sigma_{rr}^1\big|_{r=a} = \sigma_{rr}^2\big|_{r=a}, \qquad \sigma_{rr}^2 = 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{7}$$

За відомою об’ємною деформацією (6) визначаємо переміщення з рівняння у сферичній системі координат

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 u_i) = \Theta_i(r).$$

Після двократного інтегрування цього рівняння знаходимо

$$u_1 = \frac{1}{3}D_1 a\rho + \frac{m_1 qa^3\rho}{6\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{\rho^2}{5}\right), \qquad u_2 = \frac{m_2 qa^3\lambda^*}{6\lambda_1} + \frac{D_3}{a^2\rho^2}. \tag{8}$$

За відомими компонентами u_i і співвідношеннями Дюамеля − Неймана

$$\sigma_{rr} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{rr} - \alpha(3\lambda + 2\mu)T,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} - \alpha(3\lambda + 2\mu)T$$

визначаємо компоненти тензора напружень

$$\sigma_{rr}^1 = \frac{2G_1}{3}\left[n_1 D_1 - \frac{m_1 qa^2}{\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{\rho^2}{5}\right)\right],$$

$$\sigma_{rr}^2 = -\frac{2G_2}{3}\left[\frac{m_2 qa^2\lambda^*}{\lambda_1\rho} + \frac{6D_3}{a^3\rho^3}\right],$$

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = \frac{2G_1}{3}\left[n_1 D_1 - \frac{m_1 qa^2}{\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{2\rho^2}{5}\right)\right],$$

$$\sigma_{\theta\theta}^2 = -\frac{2G_2}{3}\left[\frac{m_2 qa^2\lambda^*}{2\lambda_1\rho} + \frac{3D_3}{a^3\rho^3}\right], \tag{9}$$

де G − модуль зсуву, $n_i = \dfrac{1+\nu_i}{1-2\nu_i}$, $i = 1, 2$.

Для визначення коефіцієнтів D_j, $j = 1, 2, 3$, використаємо граничні умови (7), з яких отримаємо

$$D_1 = -\frac{2}{15}\frac{qa^2 m_1 (G_2 - G_1)(1 + 5\lambda^*)}{\lambda_1 (n_1 G_1 + 2G_2)}, \qquad D_2 = 0,$$

$$D_3 = -\frac{qa^5\left[5m_2\lambda^* G_1(n_1+2) + 10m_2\lambda^*(G_2 - G_1) - \frac{2}{3}m_1 G_1 (n_1+2)(1+5\lambda^*)\right]}{30\lambda_1 (n_1 G_1 + 2G_2)}. \tag{10}$$

Покладаючи у виразах (9) і (10) $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \infty$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$, $G_1 = G$, $G_2 = 0$, знаходимо термонапруження в однорідному сферичному твелі

$$\sigma_{rr} = K(r^2 - a^2), \qquad \sigma_{\theta\theta} = K(2r^2 - a^2), \qquad K = \frac{2G\alpha q(1+\nu)}{15\lambda(1-\nu)},$$

які збігаються з наведеними в [1].

На рис. 1 за формулами (3) побудовано графіки розподілу температури $T^* = \lambda_1 T(\rho)/qa^2$ при $\lambda^* = \lambda_1/\lambda_2 = 0.5, 1, 2$ (криві *1–3* відповідно). На графіках бачимо, що температура в тілі збільшується зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності матриці λ_2.

На рис. 2 – рис. 4 наведено графіки напружень σ^*_{rr} (суцільні лінії) і $\sigma^*_{\theta\theta}$ (штрихові лінії), $\sigma^* = \lambda_1\sigma/q\alpha_1 G_1$, обчислені за формулами (9) для значень $G_2/G_1 = 3, 1, 1/3$ і значень $\alpha_2 = 2\alpha_1$ (рис. 2), $\alpha_2 = \alpha_1$ (рис. 3), $\alpha_2 = 0.5\alpha_1$ (рис. 4). При розрахунках приймали $\lambda_1 = \lambda_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

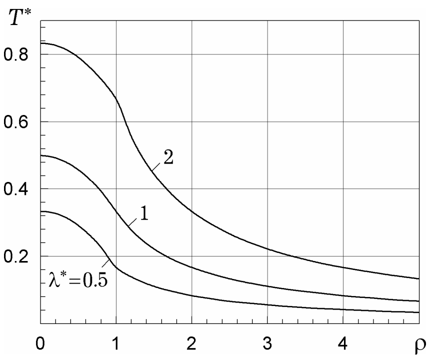

Рис. 1

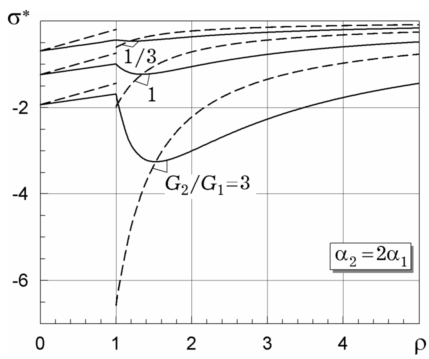

Рис. 2

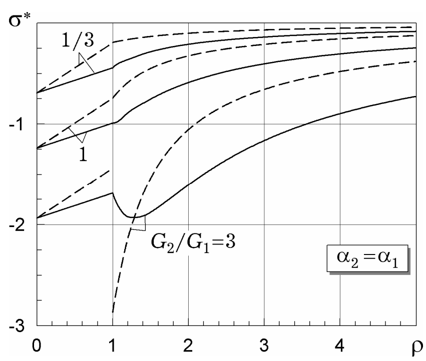

Рис. 3

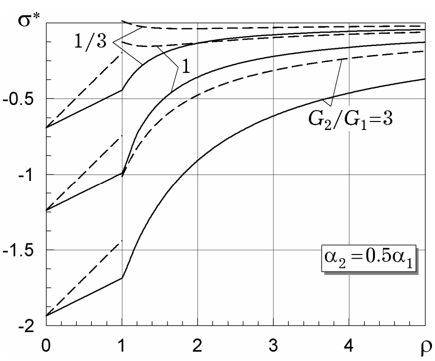

Рис. 4

Із аналізу графіків випливає, що радіальні напруження σ_{rr}^* є стискальними, і чим менший є модуль зсуву і чим більший є КЛТР включення по відношенню до матриці ($G_1 < G_2$, $\alpha_1 < \alpha_2$), тим більшими за модулем є значення напружень в області тепловиділення. Напруження $\sigma_{\theta\theta}^*$ також є стискальними, мають стрибок на межі включення і на безмежності прямують до нуля. У центрі включення $\sigma_{rr}^*(0) = \sigma_{\theta\theta}^*(0)$.

Зауважимо також, що, коли КЛТР включення більший від КЛТР матриці ($\alpha_1 > \alpha_2$), то радіальні напруження σ_{rr}^* монотонно зменшуються (рис. 4), а при $\alpha_1 < \alpha_2$ збільшуються за модулем в матриці, і при $G_1 < G_2$ їх максимальне значення є більшим, ніж в області тепловиділення (рис. 2).

Термічне включення. Розглянемо безмежне тіло з тепловидільним термічним сферичним включенням радіуса a, яке відрізняється від матриці тільки коефіцієнтами теплопровідності і лінійного теплового розширення. Для визначення температури введемо циліндричну систему координат і розв'яжемо рівняння теплопровідності

$$\Delta T_1(r,z) = -\frac{q}{\lambda_1}, \qquad \Delta T_2(r,z) = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Розв'язком цих рівнянь є функції

$$T_1(r,z) = -\frac{qR^2}{6\lambda_1} + C_1^T, \qquad T_2(r,z) = -\frac{C_2^T}{R}, \qquad R = \sqrt{r^2+z^2}, \tag{11}$$

де C_i^T задаються виразами (2).

Для розв'язання задачі термопружності використовуємо термопружні потенціали переміщень $\Phi_i(r,z)$, які визначаються з рівнянь [4]

$$\Delta\Phi_i(r,z) = m_i T_i(r,z), \qquad m_i = \frac{\alpha_i(1+\nu_i)}{1-\nu_i}, \qquad i = 1,2, \tag{12}$$

де $T_i(r,z)$ задаються виразами (11). Рівняння (12) мають розв'язки

$$\Phi_1(r,z) = \frac{qa^2 m_1 R^2}{12\lambda_1}\left[\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{R^2}{10a^2}\right],$$

$$\Phi_2(r,z) = \frac{qa^3\lambda^* m_2 R}{6\lambda_1} - \frac{D_3}{R}.$$

Переміщення і напруження визначаємо за формулами [4]

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \qquad u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \qquad \sigma_{rr} = 2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \Delta\Phi\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \Delta\Phi\right), \quad \sigma_{zz} = 2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \Delta\Phi\right), \quad \sigma_{rz} = 2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}. \tag{13}$$

Згідно з формулами (13)

$$u_r^1 = \frac{qa^2 m_1 r}{6\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{R^2}{5a^2}\right), \qquad u_r^2 = \frac{r}{R}\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1} + \frac{D_3}{R^2}\right),$$

$$u_z^1 = \frac{qa^2 m_1 z}{6\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{R^2}{5a^2}\right), \qquad u_z^2 = \frac{z}{R}\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1} + \frac{D_3}{R^2}\right),$$

$$\sigma_{rr}^1 = -\frac{2Gqa^2 m_1}{6\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3} - \frac{R^2+2rz}{5a^2}\right),$$

$$\sigma_{rr}^2 = -2G\left[\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1 R}\left(1-\frac{rz}{R^2}\right)+\frac{D_3}{R^3}\left(1-\frac{3rz}{R^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{zz}^1 = -\frac{4Gqa^2 m_1}{6\lambda_1}\left(\frac{1+2\lambda^*}{3}-\frac{R^2+r^2}{5a^2}\right),$$

$$\sigma_{zz}^2 = -2G\left[\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1 R}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)+\frac{D_3}{R^3}\left(1+\frac{z^2-2r^2}{R^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{rz}^1 = \frac{2Gqa^2 m_1 rz}{15\lambda_1 a^2},$$

$$\sigma_{rz}^2 = -\frac{2Grz}{R^3}\left[\frac{qa^3\lambda^* m_2 rz}{6\lambda_1 R^3}+\frac{3D_3}{R^2}\right]. \tag{14}$$

Для визначення коефіцієнта D_3 скористаємось граничною умовою $u_r^1(a,0) = u_r^2(a,0)$. Тоді

$$D_3 = \frac{qa^5}{6\lambda_1}\left[\frac{2(1+5\lambda^*)}{15}m_1 - \lambda^* m_2\right]. \tag{15}$$

Вирази (14) для переміщень і напружень збігаються з відповідними виразами (8) і (9), якщо в них покласти $G_1 = G_2 = G,\ \nu_1 = \nu_2$.

Осесиметрична система термічних сферичних включень. Розглядаємо осесиметричну задачу про термопружну рівновагу безмежного тіла з N термічними сферичними тепловидільними включеннями радіусів a, центри яких розміщені в точках $(0, z_n)$ осі Oz циліндричної системи координат.

Температурне поле і термопружний потенціал переміщень поза включеннями запишемо у вигляді

$$T_2(r,z) = \frac{qa^3}{3\lambda_2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{R_n(r,z)}, \qquad \Phi_2(r,z) = \sum_{n=1}^{N}\Phi_2^n(r,z),$$

$$\Phi_2^n(r,z) = \frac{qa^3\lambda^* m_2 R_n(r,z)}{6\lambda_1} - \frac{D_3}{R_n(r,z)}, \quad R_n(r,z) = \sqrt{r^2+(z-z_n)^2}. \tag{16}$$

Згідно з формулами (13)

$$u_r^2 = r\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1 R_n}+\frac{D_3}{R_n^3}\right), \qquad u_z^2 = \sum_{n=1}^{N}\frac{z-z_n}{R_n}\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1}+\frac{D_3}{R_n^2}\right),$$

$$\sigma_{zz}^2 = 2G\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{m_2 C_2^T}{2R_n}\left(1+\frac{(z-z_n)^2}{R_n^2}\right)+\frac{D_3}{R_n^3}\left(1+\frac{3(z-z_n)^2}{R_n^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{rr}^2 = 2G\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{m_2 C_2^T}{2R_n}\left(1+\frac{r^2}{R_n^2}\right)+\frac{D_3}{R_n^3}\left(1+\frac{3r^2}{R_n^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^2 = 2G\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{m_2 C_2^T}{2R_n}+\frac{D_3}{R_n^3}\right),$$

$$\sigma_{rz}^2 = 2Gr\sum_{n=1}^{N}\frac{z-z_n}{R_n^3}\left[\frac{m_2 C_2^T}{2}-\frac{3D_3}{R_n^2}\right], \tag{17}$$

де D_3 задається виразом (15).

Два включення. Розглянемо два включення з однаковими радіусами a та однаковими КЛТР з центрами в точках $z_{1,2} = \pm c$ і обчислимо температуру, переміщення і напруження при $z = 0$. Тоді за формулами (16) і (17) при $R_1 = R_2 = R = \sqrt{r^2 + c^2}$ маємо

$$T_2(r,z) = \frac{2qa^3}{3\lambda_2 R},$$

$$u_z = 0, \qquad u_r = \frac{r}{R}\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{3\lambda_1} + \frac{2D_3}{R^2}\right),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2G}{R^3}\left[m_2 C_2^T (r^2 + 2c^2) + 2D_3\left(\frac{r^2 - 2c^2}{R^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{R^3}\left[m_2 C_2^T (2r^2 + c^2) + 2D_3\left(\frac{c^2 - 2r^2}{R^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{R}\left(m_2 C_2^T + \frac{2D_3}{R^2}\right), \qquad \sigma_{rz} = 0. \tag{18}$$

Формулами (18) описується також напружено-деформований стан півпростору з включенням, межа якого теплоізольована і ковзно (гладко) закріплена ($u_z = 0$, $\sigma_{rz} = 0$).

Розмістимо тепер в точці $z = c$ центр тепловидільного включення, а в точці $z = -c$ − центр теплопоглинального включення радіусів a і потужності q. Тоді при $z = 0$

$$u_r = 0, \qquad u_z = -\frac{2c}{R}\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1} + \frac{D_3}{R^2}\right),$$

$$\sigma_{zz} = 0, \qquad \sigma_{rr} = 0, \qquad \sigma_{\varphi\varphi} = 0,$$

$$\sigma_{rz} = \frac{4Gcr}{R^3}\left(\frac{qa^3\lambda^* m_2}{6\lambda_1} + \frac{3D_3}{R^2}\right). \tag{19}$$

Цими формулами описується також напружено-деформований стан півпростору з включенням, межа якого перебуває при нульовій температурі і закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою ($u_r = 0$, $\sigma_{zz} = 0$).

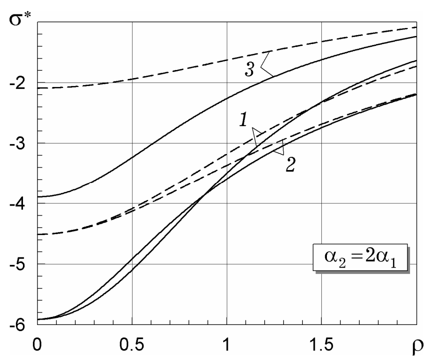

Рис. 5

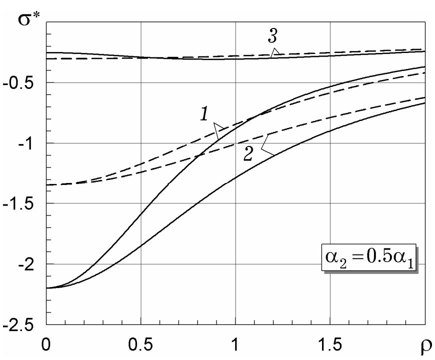

Рис. 6

На рис. 5, рис. 6 наведено графіки напружень σ_{zz}^*, σ_{rr}^* і $\sigma_{\theta\theta}^*$ (криві *1*–3 відповідно), $\sigma^* = \lambda_1\sigma/q\alpha_1 G$, пораховані за формулами (18) для значень

$c/a = 1.01$ (суцільні лінії) і $c/a = 1.5$ (штрихові лінії) та значень $\alpha_2 = 2\alpha_1$ (рис. 5), $\alpha_2 = 0.5\alpha_1$ (рис. 6). При обчисленнях приймали $\lambda_1 = \lambda_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Із аналізу графіків випливає, що всі напруження є стискальні і чим менший є КЛТР включення по відношенню до КЛТР матриці ($\alpha_1 < \alpha_2$), тим більшими за модулем є значення напружень. При збільшенні відстані між включеннями напруження зменшуються.

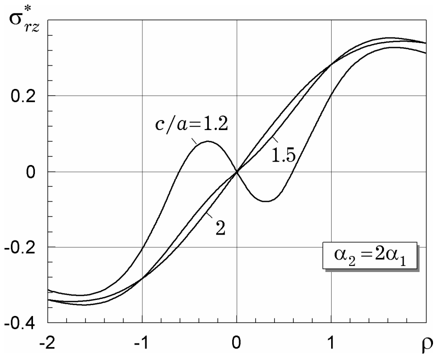

Рис. 7

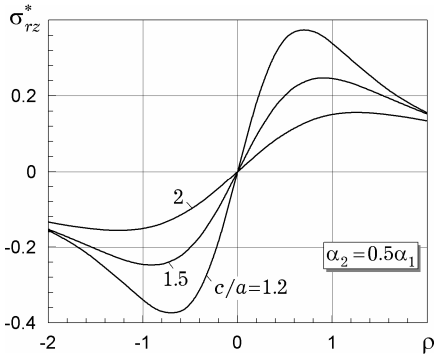

Рис. 8

На рис. 7, 8 наведено графіки напружень $\sigma^*_{rz} = \lambda_1 \sigma_{rz}/q\alpha_1 G$, пораховані за формулами (19) для значень $c/a = 1.2, 1.5, 2$ та значень $\alpha_2 = 2\alpha_1$ (рис. 7), $\alpha_2 = 0.5\alpha_1$ (рис. 8). При обчисленнях приймали $\lambda_1 = \lambda_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Напруження σ^*_{rz} при $\rho > 0$ в основному є додатні, а при $\alpha_2 > \alpha_1$ і $c/a < 1.35$ напруження спочатку від'ємні і при збільшенні ρ міняють знак (рис. 7). Максимум дотичних напружень зміщується в сторону зростання ρ зі збільшенням КЛТР матриці по відношенню до КЛТР включення. При збільшенні відстані між включеннями ($c/a > 1.5$) цей максимум зменшується.

Висновки. Досліджено розподіл температури і напружень у безмежному тілі зі сферичним включенням, що виділяє тепло зі сталою питомою потужністю, а також з осесиметричною системою термічних сферичних включень, які відрізняються від матриці тільки коефіцієнтами теплопровідності та лінійного теплового розширення (КЛТР). Одержано явні вирази для температури, переміщень і напружень всередині включення і поза ним. Радіальні напруження є стискальні, і чим менший модуль зсуву і чим більший КЛТР включення по відношенню до КЛТР матриці, тим більшими за модулем є значення напружень в області тепловиділення. Якщо ж КЛТР включення менший від КЛТР матриці, то радіальні напруження в матриці поблизу включення за модулем є більшими, ніж у включенні. Кільцеві напруження також є стискальними, мають стрибок на межі включення і зникають на безмежності.

Показано, що формулами для температури, переміщень і напружень при дзеркальному розташуванні відносно площини $z = 0$ осесиметричної системи термічних включень описується також напружено-деформований стан півпростору з включеннями, межа якого теплоізольована і гладко закріплена або перебуває при нульовій температурі і закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою.

1. *Власов Н. М., Федик И. И.* Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. – Москва: ЦНИИатоминформ, 2001. – 205 с.
2. *Галазюк В. А., Кіт Г. С.* Осесиметричний напружено-деформований стан тіла з плоскою пеленою теплових джерел // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 1. – С. 141–152.

3. *Галанин А. Д.* Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах. – Москва: Энергоатомиздат, 1990. – 529 с.
4. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Физматгиз, 1958. – 168 с.
   Melan E., Parkus H. Wärmespannungen infolge stationärer temperaturfelder. – Wien: Springer, 1953. – 114 s.
5. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
   Nowacki W. Thermoelasticity. – London: Pergamon, 1962. – 628 p.
6. *Самойлов А. Г.* Тепловыделяющие элементы ядерных реакторов. – Москва: Энергоатомиздат, 1985. – 219 с.
7. *Черников А. С., Пермяков Л. Н., Федик И. И., Гаврилин С. С., Курбаков С. Д.* Твэлы на основе сферических частиц с защитным покрытием для реакторов повышенной безопасности // Атомная энергия. – 1999. – **87**, вып. 6. – С. 451–462.
8. *Hetnarski M. R., Eslami M. R.* Thermal stresses – Advanced theory and applications. – Ser. Solid Mechanics and Applications. – Vol. 158 / Ser. Ed. G. M. L. Gladwell. – New York: Springer, 2008. – 559 p.
9. *Matthews J. R.* Thermal stress in a finite heat-generating cylinder // Nucl. Eng. Design. – 1970. – **12**. – P. 291–296.
10. *Valentin R. A., Carey J. J.* Thermal stresses and displacements in finite, heat-generating cylinders // Nucl. Eng. Design. – 1970. – **12**. – P. 277–290.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА С ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Решены задачи стационарной теплопроводности и термоупругости для тела с одним тепловыделяющим сферическим включением, а также с осесимметричной системой сферических включений, которые имеют одинаковые с матрицей упругие свойства и разные коэффициенты линейного теплового расширения. Исследовано распределение перемещений и напряжений в зависимости от модулей сдвига и коэффициентов линейного теплового расширения для одного и двух включений.

STRESS STATE OF A BODY WITH HEAT-GENERATING SPHERICAL INCLUSIONS

The problems of stationary heat conductivity and thermoelasticity for a body with one heat-generating spherical inclusion and with axially symmetric system of spherical inclusions are solved. The elastic properties of inclusions and matrix are identical, and coefficients of linear thermal expansions of inclusions and matrix are different. The distribution of displacements and stresses depending on shear moduli and coefficients of linear thermal expansion for one and two inclusions is studied.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.11.11