

**ЗГИН ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ МОМЕНТАМИ ПЛАСТИНИ
РЕЙССНЕРА З НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ
ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ**

Досліджено напружено-деформований стан безмежної ізотропної пластини з тріщиною, береги якої вільні від зовнішнього навантаження. Пластина перебуває під дією зосереджених згинальних моментів. Припускається, що береги тріщини приходять у гладкий контакт по всій довжині тріщини уздовж двовимірної зони сталої ширини поблизу верхньої основи пластини. Внаслідок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подано у вигляді розв'язку двох пов'язаних задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластин за Рейсснером. На основі методів теорії функції комплексної змінної з використанням комплексних потенціалів отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Для випадку геометричної й фізичної симетрії задачі стосовно тріщини здійснено числовий аналіз розв'язку задачі та побудовано графічні залежності для контактної зусилля між берегами тріщини та коефіцієнтів інтенсивності моментів за різних параметрів задачі.

У ролі конструктивних елементів пластини часто застосовують у машинобудуванні та багатьох інших галузях техніки. Проте їхня дієздатність і експлуатаційні характеристики істотно залежать від наявності тріщиноподібних дефектів, які різко знижують допустиме навантаження. Для надійної експлуатації пластинчастих елементів важливо знати, яким чином такі дефекти впливають на міцність і механічні характеристики конструкції.

Оскільки пластинчасті елементи доволі часто повинні сприймати згинальні навантаження, то цілком актуальною проблемою є вивчення напружено-деформованого стану пластини за згину з урахуванням можливого контакту берегів тріщиноподібних дефектів. Формулювання задач згину пластин з тріщинами і методи їхнього розв'язування подано в монографіях [1, 11, 12] і статтях [18, 23, 24, 28] без урахування контакту берегів тріщиноподібних дефектів, хоча з фізичних міркувань зрозуміло, що він істотно впливає на напружено-деформований стан поблизу тріщини та пластини в цілому. У [5, 8, 9, 15–17, 19–22, 25–27, 29] розглянуто згин пластини з тріщиноподібними дефектами з урахуванням контакту їхніх берегів, але немає досліджень, пов'язаних зі згином зосередженими моментами пластини з тріщиною, береги якої контактують уздовж двовимірної зони постійної ширини з використанням теорії Рейсснера.

Мета праці – дослідити згин ізотропної пластини Рейсснера з тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів розв'язування задачі зведено до системи інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Для окремого випадку навантаження пластини здійснено числовий аналіз задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Формулювання задачі. Дослідимо задачу про згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ з тріщиною завдовжки 2ℓ зосередженими згинальними моментами $-M^*$ та M^* (їхні вектори паралельні до осі Ox) у точках з координатами (x_1, y_1) і (x_2, y_2) відповідно (див. рис. 1, де наведено схему навантаження пластини та розміщення тріщини). Вважаємо, що під впливом зовнішнього навантаження береги тріщини, які до деформування пластини були вільними від нього, приходять поблизу верхньої її основи уздовж усієї довжини тріщини у гладкий контакт, причому ширина області контакту є сталою і дорівнює h_1 .

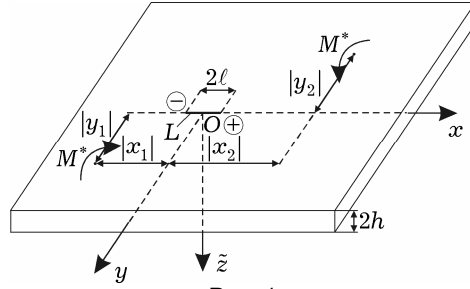


Рис. 1

Виберемо декартову систему координат $Oxy\bar{z}$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини. Початок координат O помістимо у центрі тріщини, спрямувавши вісь Ox уздовж тріщини. Відрізок дійсної осі Ox , для якого $|x| \leq l$, позначимо через L , а контактне зусилля між берегами тріщини – через N ($N > 0$). Надалі дотримуватимемося таких позначень: μ – модуль зсуву, E – модуль пружності, ν – коефіцієнт Пуассона, $\alpha = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

З урахуванням контакту берегів тріщини розв'язання задачі розбиваємо на дві пов'язані задачі: плоску задачу теорії пружності й задачу згину пластини з використанням теорії Рейснера.

Згідно з постановкою задачі на берегах тріщини маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -N/(2h), \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0, \quad x \in L, \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^- = M, \quad Q_y^+ = Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^- = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

$$M = \beta h N, \quad \partial_x [v_p] - \alpha h \partial_x [\varphi_y] = 0, \quad x \in L, \quad (3)$$

де σ_{xy} , σ_{yy} та v_p – відповідно компоненти тензора напружень та проекція вектора переміщення точки на вісь Oy у плоскій задачі; φ_y – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину [14]; M – згинальний момент; Q_y і H_{xy} – поперечна сила і крутний момент відповідно; $\partial_x = \partial/\partial x$, $[f] = f^+ - f^-$; символами «+» і «-» позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при $y \rightarrow \pm 0$; $\alpha = \{1 + (1 - \gamma)^2\}/2$, $\beta = 1 - \gamma/3$, а $\gamma = h_1/h$ – зведена ширина області контакту [5].

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини.

Побудова розв'язку задачі. При визначенні плоского напруженого стану введемо комплексні потенціали $\Phi_p(z)$ і $\Omega_p(z)$, які зникають на нескінченності, а для визначення напружено-деформованого стану пластини виконуються залежності [3]

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi_p(z) + \Omega_p(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_p'(z)}, \\ 2\mu\partial_x(u + iv) &= \alpha\Phi_p(z) - \Omega_p(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_p'(z)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Крайові умови (1) подамо у вигляді

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = 0, \quad x \in L,$$

звідки, врахувавши (4), отримаємо

$$\{\Phi_p(x) - \Omega_p(x)\}^+ - \{\Phi_p(x) - \Omega_p(x)\}^- = 0, \quad x \in L. \quad (5)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (5), матимемо

$$\Phi_p(z) = \Omega_p(z). \quad (6)$$

Беручи до відома (4) і (6), з крайової умови

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = -N/h, \quad x \in L,$$

одержимо

$$N = -2h\{\Phi_p^+(x) + \Phi_p^-(x)\}, \quad x \in L. \quad (7)$$

Враховуючи (4) і (6), та задовольняючи умову

$$\partial_x(u_p + iv_p)^+ - \partial_x(u_p + iv_p)^- = \partial_x[u_p + iv_p], \quad x \in L,$$

одержимо

$$\Phi_p^+(x) - \Phi_p^-(x) = \frac{2\mu}{1+\alpha} \partial_x[u_p + iv_p] = \tilde{g}'(x) = \tilde{g}'_1(x) + i\tilde{g}'_2(x), \quad x \in L. \quad (8)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (8) запишемо так:

$$\Phi_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}'(t) dt}{t-z}. \quad (9)$$

Тоді на основі (9) і формул Сохоцького – Племелі [4] одержимо

$$\Phi_p^+(x) + \Phi_p^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}'(t) dt}{t-x}, \quad x \in L. \quad (10)$$

Підставивши (10) у (7), матимемо

$$-\frac{N}{2h} = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tilde{g}'_2(t) dt}{t-x}, \quad x \in L, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tilde{g}'_1(t) dt}{t-x} = 0, \quad x \in L. \quad (12)$$

Розв'язавши сингулярне інтегральне рівняння (12) та врахувавши, що

$$\int_{-\ell}^{\ell} \tilde{g}'_1(t) dt = 0,$$

$$\tilde{g}'_1(t) = 0.$$

Для побудови розв'язку задачі згину введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ та функцію $\Omega(z, \bar{z})$, для яких справджуються залежності [2]:

$$M_x + M_y = -2D(1+\nu)\{\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\}, \quad (13)$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2D(1-\nu) \left\{ z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} + 4 \frac{\{2\Phi''(z) + i\partial_{z\bar{z}}^2 \Omega(z, \bar{z})\}}{k_*^2(1-\nu)} \right\}, \quad (14)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D\{2\Phi'(z) - i\partial_z \Omega(z, \bar{z})\}. \quad (15)$$

Тут $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, $k_*^2 = \frac{5}{2h^2}$, а функція $\Omega(z, \bar{z})$ – розв'язок рівняння Гельмгольца

$$4\partial_{z\bar{z}}^2 \Omega(z, \bar{z}) = k_*^2 \Omega(z, \bar{z}).$$

Залежності (13) і (14) перепишемо так:

$$M_y + iH_{xy} = 2m \operatorname{Re} \Phi(z) + n \{z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}\} + \rho \{2\overline{\Phi''(z)} + i\partial_{z\bar{z}}^2 \overline{\Omega(z, \bar{z})}\}, \quad (16)$$

де $m = -D(1+\nu)$, $n = D(1-\nu)$, $\rho = 4D/k_*^2$.

Комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ подамо у вигляді [11]

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \sum_{j=1}^2 \frac{a_j}{z - z_j}, \quad \Psi(z) = \Psi_*(z) + \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\bar{a}_j}{z - z_j} + \frac{a_j \bar{z}_j}{(z - z_j)^2} \right\}, \quad (17)$$

причому $a_j = (-1)^j M^*/(8\pi i D)$, $z_j = x_j + iy_j$, а $\Phi_*(z)$ і $\Psi_*(z)$ – голоморфні функції, які зникають на нескінченності.

На основі результатів робіт [6, 7] функції $\Phi_*(z)$ та $\Omega(z, \bar{z})$ виберемо у вигляді

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{g(t) dt}{t - z}, \quad g(t) = g_1(t) + ig_2(t), \quad (18)$$

$$\Omega(z, \bar{z}) = \frac{k_*}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{r K_1(k_* r)}{t - z} \omega(t) dt \right\}, \quad \omega(t) = \omega_1(t) + i\omega_2(t), \quad (19)$$

де $r = \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$; $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ – наперед невідомі дійсні функції; $K_j(x)$ – функції Макдональда j -го порядку, властивості яких описано у [13].

Похідні від функції $\Omega(z, \bar{z})$, які входять у вирази (15) і (16), подамо так:

$$\partial_z \Omega(z, \bar{z}) = \Omega_1(z, \bar{z}) - \frac{i}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\omega(t) dt}{(t - z)^2}, \quad (20)$$

$$\partial_{zz}^2 \Omega(z, \bar{z}) = \Omega_2(z, \bar{z}) - \frac{i}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\omega(t) dt}{(t - z)^3}, \quad (21)$$

де

$$\Omega_1(z, \bar{z}) = \frac{ik_*^2}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \left\{ \frac{r^2 \tilde{K}'_1(k_* r)}{(t - z)^2} \omega(t) + \frac{(t - \bar{z}) K_0(k_* r)}{r^2} \operatorname{Re} \{(t - \bar{z}) \omega(t)\} \right\} dt, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2(z, \bar{z}) = & \frac{k_*^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{i} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{r^2 \tilde{K}_2(k_* r)}{(t - z)^3} \omega(t) dt - \frac{k_*}{2} \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{r K_1(k_* r)}{t - z} \omega(t) dt \right\} + \right. \\ & \left. + k_* \int_{-\ell}^{\ell} \frac{t - x}{r^3} K_1(k_* r) (t - \bar{z}) \operatorname{Im} \{(t - \bar{z}) \omega(t)\} dt \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\tilde{K}_1(x) = K_1(x) - \frac{1}{x}, \quad \tilde{K}_2(x) = K_2(x) - \frac{2}{x^2}.$$

Враховувавши формули (17)–(23) і ввівши у розгляд функцію

$$V(z) = q \overline{\Phi_*(z)} + z \overline{\Phi'_*(z)} + \overline{\Psi_*(z)} + \frac{m_1}{k_*^2 \pi i} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\delta(t)}{(t - z)^3} dt,$$

залежності (15) і (16) перепишемо таким чином:

$$M_y + iH_{xy} = n \{ q \Phi_*(z) + V(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)} + im_1 k_*^{-2} \overline{\Omega_2(z, \bar{z})} + A(z, \bar{z}) \}, \quad (24)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \{ P(z) - i\Omega_1(z, \bar{z}) + B(z) \}. \quad (25)$$

Тут

$$A(z, \bar{z}) = \sum_{j=1}^2 \left\{ q \frac{a_j (\bar{z} - \bar{z}_j) + \bar{a}_j (z - z_j)}{(z - z_j)(\bar{z} - \bar{z}_j)} + \frac{a_j}{\bar{z} - \bar{z}_j} + \frac{\bar{a}_j (z_j - z)}{(\bar{z} - \bar{z}_j)^2} \right\},$$

$$B(z) = 2 \sum_{j=1}^2 \frac{a_j}{(z - z_j)^2}, \quad P(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\delta(t)}{(t - z)^2} dt, \quad (26)$$

де $q = -(1 + \nu)/(1 - \nu)$, $m_1 = 4/(1 - \nu)$, $\delta(t) \equiv \delta_1(t) + i\delta_2(t) = -2g(t) + i\omega(t)$, $\delta_1(t)$ і $\delta_2(t)$ – дійсні функції.

Скориставшись формулами (19), (22), (23) і властивостями функцій Макдональда, переконуємося, що функція $\Omega_1(z, \bar{z})$ при переході через вісь Ox неперервна, а для функцій $\Omega(z, \bar{z})$ і $\Omega_2(z, \bar{z})$ виконуються залежності

$$\begin{aligned} \Omega^+(x, x) - \Omega^-(x, x) &= \begin{cases} 2\omega_1(x), & |x| < \ell, \\ 0, & |x| > \ell, \end{cases} \\ \overline{\Omega_2^+(x, x)} - \overline{\Omega_2^-(x, x)} &= \begin{cases} -k_*^2\omega_1(x)/2, & |x| < \ell, \\ 0, & |x| > \ell. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

Надалі вважатимемо також, що виконуються умови

$$\delta(-\ell) = \delta(\ell) = 0. \quad (28)$$

Тоді на підставі виразу (26) для функції $P(z)$ і з огляду на (28) матимемо

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\delta'(t)}{t - z} dt,$$

звідки, скориставшись формулами Сохоцького – Племелі, можемо записати

$$P^+(x) - P^-(x) = -\delta'(x), \quad |x| < \ell. \quad (29)$$

Задовольнивши за допомогою формули (25) другу крайову умову (2) та врахувавши співвідношення (29), одержимо

$$\delta_2'(x) = 0. \quad (30)$$

Оскільки справджується формула (28), то з (30) випливає, що $\delta_2(x) = 0$, тому виконуються залежності

$$\omega_1(x) = 2g_2(x), \quad \omega_2(x) = -2g_1(x) - \delta_1(x). \quad (31)$$

Врахувавши (24) і (27), з першої і третьої крайових умов (2) одержимо задачу лінійного спряження для знаходження функції $V(z)$:

$$V^+(x) - V^-(x) = \begin{cases} qg_1(x) - im_2g_2(x), & |x| < \ell, \\ 0, & |x| > \ell, \end{cases}$$

розв'язавши яку, отримаємо

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{qg_1(t) - im_2g_2(t)}{t - z} dt, \quad m_2 = \frac{5 + \nu}{1 - \nu}. \quad (32)$$

Якщо скористатися залежністю

$$\begin{aligned} \partial_x(\varphi_x + i\varphi_y) &= -\left\{ \Phi_*(z) + \frac{m_1}{2} \overline{\Phi_*(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)} + V(\bar{z}) + \right. \\ &\quad \left. + im_1 \left\{ \frac{\overline{\Omega_2(z, \bar{z})}}{k_*^2} + \frac{\Omega(z, \bar{z})}{4} \right\} + \tilde{A}(z, \bar{z}) \right\}, \end{aligned}$$

де функцію $\tilde{A}(z, \bar{z})$ отримуємо з виразу (26) для функції $A(z, \bar{z})$, поклавши у ньому $q = 1$, то матимемо

$$\partial_x[\varphi_x + i\varphi_y] = -m_1g(x), \quad |x| \leq \ell. \quad (33)$$

Внаслідок виконання (33)

$$\partial_x[\varphi_x] = -m_1g_1(x), \quad \partial_x[\varphi_y] = -m_1g_2(x). \quad (34)$$

Врахувавши (8) і (34), на основі другої з умов (3) матимемо

$$\tilde{g}'_2(t) = -\frac{2\alpha hm_1\mu}{1 + x} g_2(t), \quad t \in L, \quad (35)$$

тому (11) можемо переписати так:

$$N = \frac{4\alpha h^2 m_1 \mu}{\pi(1+\alpha)} \int_L \frac{g_2(t) dt}{t-x}. \quad (36)$$

Беручи до уваги (17), (24), (25), (31), (32), (36), з крайових умов (2) і (3) отримаємо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $g_1(x)$, $g_2(x)$ і $g_3(x) = \delta_1'(x)$:

$$\sum_{k=1}^3 \int_{-\ell}^{\ell} R_{ik}(t, x) g_k(t) dt = -\pi P_i(x), \quad |x| < \ell, \quad i = 1, 2, 3, \quad (37)$$

де

$$\begin{aligned} R_{11}(t, x) &= R_{13}(t, x) = R_{22}(t, x) = R_{32}(t, x) = 0, \\ R_{12}(t, x) &= \frac{n_1 - 6\alpha\beta q + 2m_1 \tilde{K}_2(k_* |t-x|)}{t-x}, \\ R_{21}(t, x) &= \frac{2q + m_1 \{2\tilde{K}_2(k_* |t-x|) + k_* |t-x| K_1(k_* |t-x|)\}}{t-x}, \\ R_{23}(t, x) &= m_1 \tilde{K}_2(k_* |t-x|)/2, \quad R_{31}(t, x) = 4k_* \tilde{K}_1'(k_* |t-x|), \\ R_{33}(t, x) &= -2 \operatorname{sgn}(t-x) K_1(k_* |t-x|), \\ P_1(x) &= -\frac{M^*}{4\pi n} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{r_j^2} y_j \left[(\nu-1) \left(3 - 4y_j^2 \frac{1}{r_j^2} \right) - 3 - \nu \right], \\ P_2(x) &= -\frac{M^*}{2\pi D} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{r_j^2} (x-x_j) \left(1 - 2y_j^2 \frac{1}{r_j^2} \right), \\ P_3(x) &= -\frac{M^*}{\pi k_* D} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{r_j^2} \left(1 - 2y_j^2 \frac{1}{r_j^2} \right), \quad n_1 = 2 \frac{3+\nu}{1-\nu}, \quad r_j^2 = (x-x_j)^2 + y_j^2. \end{aligned}$$

Систему (37) доповнимо умовами

$$\int_{-\ell}^{\ell} g_1(t) dt = 0, \quad \int_{-\ell}^{\ell} g_2(t) dt = 0, \quad \int_{-\ell}^{\ell} \left[t g_1(t) - \frac{g_3(t)}{k_*^2} \right] dt = 0, \quad (38)$$

що відображають однозначність похідної усереднених кутів повороту нормалі φ_x , φ_y і прогину w при обході навколо контуру тріщини.

Зазначимо, що система (37) і (38) розпадається на дві незалежні системи інтегральних рівнянь: одна – для визначення функції $g_2(t)$, інша – для визначення функцій $g_1(t)$ і $g_3(t)$.

Зробивши заміни $T = t/\ell$ і $X = x/\ell$ та ввівши позначення

$$\lambda = \frac{1}{k_* \ell}, \quad g_k^*(T) = g_k(\ell T), \quad \tilde{P}_k(X) = P_k(\ell X), \quad k = 1, 2, 3, \quad (39)$$

систему рівнянь (37) і (38) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 \tilde{R}_{ik}(T, X) g_k^*(T) dT + \ell \int_{-1}^1 \tilde{R}_{i3}(T, X) g_3^*(T) dT &= -\pi \tilde{P}_i(X), \\ \int_{-1}^1 g_1^*(T) dT &= \int_{-1}^1 g_2^*(T) dT = \int_{-1}^1 \{T g_1^*(T) - \ell \lambda^2 g_3^*(T)\} dT = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

де ядра $\tilde{R}_{ik}(T, X)$, $i, k = 1, 2, 3$, отримуємо з виразів для ядер $R_{ik}(t, x)$, замінивши в них t , x і k_* відповідно на T , X і $1/\lambda$.

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль K_1^\pm , згинальних K_M^\pm і крутних K_H^\pm моментів та поперечних сил K_Q^\pm скористаємося залежностями (VII.25) і (VII.30) та (I.92) відповідно з монографій [2] і [12], які з ураху-

ванням (35) і (39) після деяких перетворень набудуть вигляду

$$\begin{aligned} K_1^\pm &= \pm \frac{2\alpha E h^2}{1-\nu} \sqrt{\ell} \lim_{T \rightarrow \pm 1} \{\sqrt{1-T^2} g_2^*(T)\}, \\ K_M^\pm &= \mp m \sqrt{\ell} \lim_{T \rightarrow \pm 1} \{\sqrt{1-T^2} g_2^*(T)\}, \quad K_H^\pm = \pm m \sqrt{\ell} \lim_{T \rightarrow \pm 1} \{\sqrt{1-T^2} g_1^*(T)\}, \\ K_Q^\pm &= \pm D \sqrt{\ell} \lim_{T \rightarrow \pm 1} \{\sqrt{1-T^2} g_3^*(T)\}, \end{aligned} \quad (41)$$

де верхній знак відповідає правій ($X = 1$), а нижній – лівій ($X = -1$) вершині тріщини.

Як впливає з формул (41), коефіцієнти K_1^\pm і K_M^\pm відрізняються один від одного сталим множником

$$K_1^\pm = \frac{3\alpha K_M^\pm}{h}.$$

З урахуванням формул (39) і (41) зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль (ЗКІЗ) $\tilde{K}_1^\pm = K_1^\pm \pi h \sqrt{\ell} / M^*$, згинальних (ЗКІЗМ) $\tilde{K}_M^\pm = K_M^\pm \pi \sqrt{\ell} / M^*$ і крутних моментів $\tilde{K}_H^\pm = K_H^\pm \pi \sqrt{\ell} / M^*$ та поперечних сил $\tilde{K}_Q^\pm = K_Q^\pm \pi \sqrt{\ell^3} / M^*$ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1^\pm &= 3\alpha \tilde{K}_M^\pm, \quad \tilde{K}_M^\pm = \mp m \ell \pi / M^* \lim_{T \rightarrow \pm 1} \{\sqrt{1-T^2} g_2^*(T)\}, \\ \tilde{K}_H^\pm &= \pm m \ell \pi / M^* \lim_{T \rightarrow \pm 1} \{\sqrt{1-T^2} g_1^*(T)\}, \\ \tilde{K}_Q^\pm &= \pm D \ell^2 \pi / M^* \lim_{T \rightarrow \pm 1} \{\sqrt{1-T^2} g_3^*(T)\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Систему рівнянь (40) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [10]. У результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно вузлових значень $g_k^*(T_s)$, $k = 1, 2, 3$. Значення функції $g_k^*(\pm 1)$, через які виражаються коефіцієнти інтенсивності моментів і поперечних сил, визначаються так:

$$g_k^*(\pm 1) = \mp \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (-1)^{s+(1\mp 1)S/2} g_k^*(T_s) \operatorname{tg}^{\mp 1}[(2s-1)\pi/(4S)],$$

де $T_s = \cos\left(\frac{2s-1}{2S}\pi\right)$, S – кількість вузлів методу механічних квадратур.

Зазначимо, що у випадку згину пластини зосередженими моментами у симетричних відносно лінії тріщини точках, коли $z_1 = \bar{z}_2 = x_0 + iy_0$, функції $\tilde{P}_k(X)$ у системі (40) визначатимуться таким чином:

$$\tilde{P}_1(X) = -\frac{M^* Y_0}{\pi n R \ell} \left\{ 1 + \nu + \frac{2(1-\nu)(X-X_0)^2}{R} \right\}, \quad \tilde{P}_2(X) = \tilde{P}_3(X) = 0, \quad (43)$$

де $X_0 = x_0/\ell$, $Y_0 = y_0/\ell$ й $R = (X-X_0)^2 + Y_0^2$.

З другого зі співвідношень (43) випливає, що $g_1^*(T) = g_3^*(T) = 0$, а з (42) отримаємо $\tilde{K}_H^\pm = \tilde{K}_Q^\pm = 0$.

Для визначення функції $g_2^*(T)$, подавши її у вигляді

$$g_2^*(T) = \frac{M^* \tilde{g}_2^*(T)}{n \ell \pi \sqrt{1-T^2}},$$

одержимо систему рівнянь

$$\int_{-1}^1 \frac{n_1 - 6\alpha\beta q + 2m_1 \tilde{K}_2(|T - X|/\lambda)}{(T - X)\sqrt{1 - T^2}} \tilde{g}_2^*(T) dT =$$

$$= \frac{\pi Y_0}{R} \left\{ 1 + \nu + \frac{2(1 - \nu)(X - X_0)^2}{R} \right\}, \quad X \in [-1, 1],$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\tilde{g}_2^*(T)}{\sqrt{1 - T^2}} dT = 0.$$

Величину ЗКІЗМ у цьому випадку обчислимо за допомогою формули

$$\tilde{K}_M^\pm = \mp q \tilde{g}_2^*(\pm 1).$$

Числовий аналіз задачі. Деякі результати числового аналізу задачі для значень $\nu = 0.3$ і $z_1 = \bar{z}_2 = x_0 + iy_0$ наведено на рис. 2 – рис. 5. Суцільні лінії побудовано при $\gamma = 0.1$, а штрихпунктирні – при $\gamma = 0$ (контакт вздовж лінії).

На рис. 2 подано графіки зведеного контактного зусилля $\tilde{N} = hN\ell/M^*$ уздовж тріщини при $\lambda = 1/(k_*\ell) = 0.1$. Криві 1–5 на рис. 2а, обчислені при $Y_0 = y_0/\ell = 1$, відповідають значенням $X_0 = x_0/\ell = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$. Криві 1–5 на рис. 2б, обчислені при $X_0 = 1$, відповідають значенням $Y_0 = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2$.

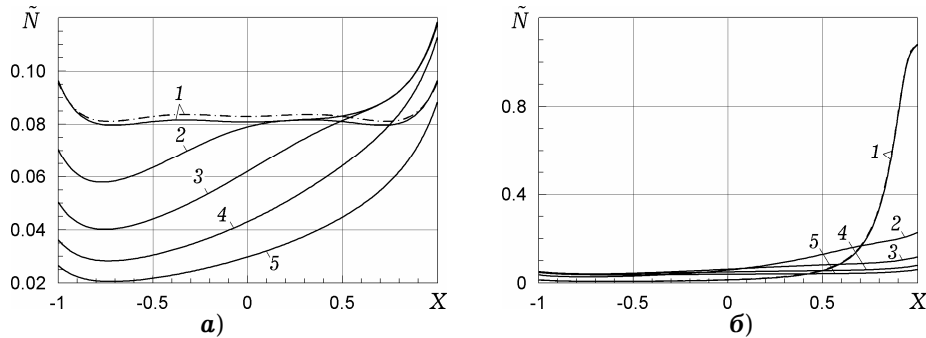


Рис. 2

Як видно з рис. 2, зі зростанням параметрів X_0 і Y_0 значення \tilde{N} на кінцях тріщини зменшується. Крім того, при цих значеннях параметрів задачі найбільше значення зведеного контактного зусилля досягається на ближчій до точки прикладання зосередженого моменту вершині тріщини.

Графіки залежностей ЗКІЗМ $\tilde{K}_M^\pm = K_M^\pm \pi \sqrt{\ell}/M^*$ зображено на рис. 3 – рис. 5. Ліві частини рисунків (а) відповідають лівому ($x = -\ell$), а праві (б) – правому ($x = \ell$) вістрям тріщини. Суцільні і штрихпунктирні лінії обчислено з урахуванням контакту берегів тріщини, а штрихові – без його урахування.

Залежності \tilde{K}_M^\pm від параметра λ , наведені на рис. 3, отримано для значення $Y_0 = 1$. Криві 1–4 побудовано при $X_0 = 0, 0.5, 1.0, 1.5$. Бачимо, що зростання λ спричиняє незначне зростання \tilde{K}_M^\pm , причому графічні залежності ЗКІЗМ подібні до відповідних залежностей для випадку, коли пластина з тріщиною перебуває під дією згинальних моментів на безмежності [9].

Зазначимо, що обчислені за теорією Рейсснера величини ЗКІЗМ є більшими від значень ЗКІЗМ, передбачених класичною теорією згину пластин.

Залежності \tilde{K}_M^\pm від абсциси X_0 точки прикладання зосередженого моменту на рис. 4 теж побудовано при $Y_0 = 1$, однак для різних значень параметра $\lambda = 0.1, 0.3, 0.5$ (ім відповідають криві 1–3). Можна зробити

висновок, що ЗКІЗМ у ближчій до точок прикладання моментів вершині тріщини досягають максимального значення, коли $X_0 \approx 0.5$ (при наведених вище значеннях інших параметрів задачі), а у дальній вершині тріщини зменшуються зі зростанням параметра X_0 .

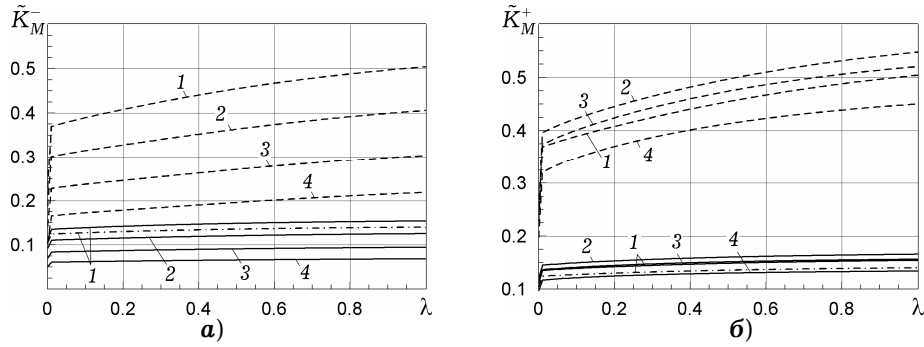


Рис. 3

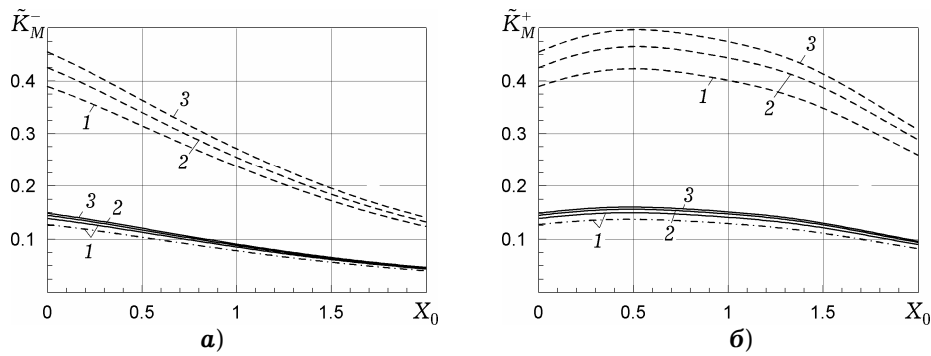


Рис. 4

Залежності \tilde{K}_M^+ від ординати Y_0 точки прикладання зосередженого моменту на рис. 5 обчислено при $\lambda = 0.1$. Кривим 1-4 відповідають значення $X_0 = 0, 0.5, 1.0, 1.5$. Числовий аналіз показав, що при $Y_0 \rightarrow \infty$ коефіцієнт $\tilde{K}_M^+ \rightarrow \tilde{K}_M^- = 0$, а коли точки прикладання зосередженого моменту наближаються до вістря тріщини ($Y_0 \rightarrow 0$ і $X_0 \rightarrow \pm 1$), то ЗКІЗМ для віддаленого вістря тріщини зменшується, а для ближчого – прямує до нескінченності.

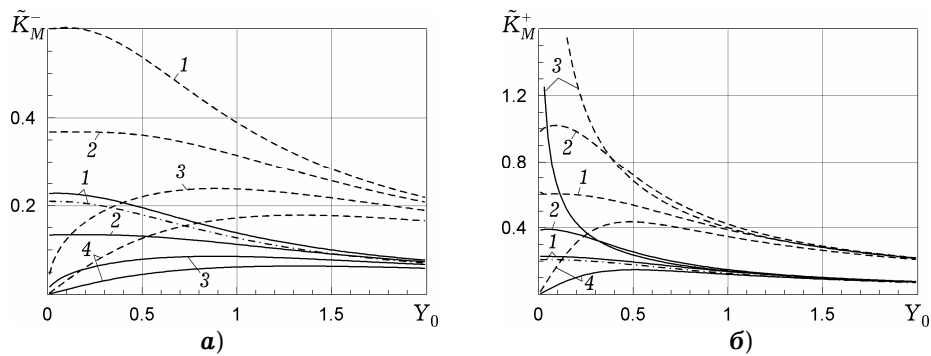


Рис. 5

На основі рис. 3 – рис. 5 можна також зробити загальний висновок, що врахування контакту берегів тріщини в цілому у 2.5–3.5 рази зменшує значення ЗКІЗМ, а на рис. 2 – рис. 5 бачимо, що збільшення ширини області контакту зменшує контактне зусилля між берегами тріщини та збільшує ЗКІЗМ.

Зазначимо, що ЗКІЗ \tilde{K}_1^\pm і ЗКІЗМ \tilde{K}_M^\pm пов'язані лінійною залежністю (42) $\tilde{K}_1^\pm = 3\alpha\tilde{K}_M^\pm$, а тому усе сказане вище стосовно \tilde{K}_M^\pm легко переноситься і на \tilde{K}_1^\pm .

1. *Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. *Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения: Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
5. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наук. нотатки Луцьк. техн. ун-ту. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
6. *Опанасович В. К.* Сингулярні інтегральні рівняння задачі згину пластини з тріщиною за теорією Рейсснера // Праці НТШ. – Том VI: Матеріалознавство і механіка матеріалів. – Львів, 2001. – С. 120–125.
7. *Опанасович В. К., Делявський М. В., Подхорецькі А.* Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейсснера // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка: В 3 т. – Т. 2: Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів. – 1999. – С. 186–189.
8. *Опанасович В. К., Новосад В. П., Селіверстов Р. Г.* Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізоотропної пластини // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Зб. наук. праць. – Вип. 5. – Львів: Каменяр, 2002. – С. 148–153.
9. *Опанасович В., Яцик І.* Згин пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 125–135.
10. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Даццишин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
11. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
12. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
13. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.* – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
14. *Тимошенко С. П., Войновски-Кригер С.* Пластины и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
15. *Шацький І. П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
16. *Шацький І. П., Перепічка В. В.* Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 2. – С. 54–58.
Te same: *Shats'kii I. P., Perepichka V. V.* Bending of a semiinfinite plate weakened by a crack with contacting edges // Mater. Sci. – 1993. – **28**, No. 2. – С. 154–157.
17. *Шацький І., Перепічка В., Далак Т., Щербій А.* Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2 т. – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 51–54.
18. *Alwar R. S., Ramachandran Nambissan K. N.* Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis // Eng. Fracture Mech. – 1983. – **17**, No. 4. – P. 323–333.
19. *Benedetti I., Aliabadi M. H., Davi G.* A fast 3D dual boundary element method based on hierarchical matrices // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**, No. 7–8. – P. 2355–2376.
20. *Dempsey J. P., Shekhtman I. I., Slepian L. I.* Closure of a through crack in a plate under bending // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, No. 31–32. – P. 4077–4089.

21. Dirgantara T., Aliabadi M. H. Stress intensity factors for cracks in thin plates // Eng. Fracture Mech. – 2002. – **69**. – P. 1465–1486.
22. Guimaraes S., Telles J. C. F. The method of fundamental solutions for fracture mechanics – Reissner's plate application // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2009. – **33**, No. 10. – P. 1152–1160.
23. Heming F. S. (Jr.) Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate // Int. J. Fracture. – 1980. – **16**, No. 4. – P. 289–304.
24. Jones D. P., Swedlow J. L. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate // Int. J. Fracture. – 1975. – **11**, No. 6. – P. 897–914.
25. Kwon Y. W. Finite element analysis of crack closure in plate bending // Comput. Struct. – 1989. – **32**, No. 6. – P. 1439–1445.
26. Litewka B., Sygulski R. Application of the fundamental solutions by Ganowicz in a static analysis of Reissner's plates by the boundary element method // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2010. – **34**, No. 12. – P. 1072–1081.
27. Wen P. H., Aliabadi M. H. A variational approach for evaluation of stress intensity factors using the element free Galerkin method // Int. J. Solids Struct. – 2011. – **48**, No. 7–8. – P. 1171–1179.
28. Williams M. L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack // Trans ASME. J. Appl. Mech. – 1961. – **28**. – P. 78–82.
29. Young M. J., Sun C. T. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution // Int. J. Fracture. – 1992. – **55**. – P. 81–93.

ИЗГИБ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МОМЕНТАМИ ПЛАСТИНЫ РЕЙССНЕРА СО СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Исследовано напряженно-деформированное состояние неограниченной изотропной пластины с трещиной со свободными от внешней нагрузки берегами. Пластина находится под действием сосредоточенных изгибающих моментов. Допускается, что берега трещины приходят в гладкий контакт по всей длине трещины вдоль двумерной зоны постоянной ширины вблизи верхнего основания пластины. Вследствие контакта берегов трещины решение задачи представлено в виде решения двух связанных задач: плоской задачи теории упругости и задачи изгиба пластин по теории Рейсснера. С помощью методов теории функции комплексной переменной и комплексных потенциалов получена система сингулярных интегральных уравнений, которая решена численно методом механических квадратур. Для случая геометрической и физической симметрии задачи относительно трещины выполнен численный анализ решения задачи и построены графические зависимости для контактного усилия между берегами трещины и коэффициентов интенсивности моментов при различных значениях параметров задачи.

BENDING BY CONCENTRATED MOMENTS OF REISSNER'S PLATE CONTAINING THROUGH-THE-THICKNESS CRACK TAKING INTO ACCOUNT CONTACT ZONE WIDTH OF ITS FACES

The stress-strain state of boundless isotropic plate with a crack, the faces of which are free from the external loading is investigated. The plate is under the action of the concentrated bending moments. It is assumed that the crack faces come in a smooth contact on all crack length along the two-dimensional area of constant width near the upper plate basis. As a result of the crack faces contact the solution of problem is presented in the form of solutions of two related problems: the theory of elasticity plane problem and the problem of plates bending using the Reissner theory. On the basis of complex variable function theory methods and using complex potentials the system of singular integral equations is obtained which is solved numerically by the mechanical quadratures method. For the case of geometric and physical symmetry of the problem with respect to the crack the numerical analysis of problem solution is carried out and graphic dependences for contact force between the faces of crack and moments intensity factors at different parameters of the problem are constructed.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
03.03.11