

ПРОСТОРОВЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДЕЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ФІЛЬТРАЦІЇ

Запропоновано математичну модель для розрахунку ідеальної течії у криволінійному паралелепіпеді, обмеженому поверхнями течії та екіпотенціальними поверхнями. Записано систему диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку, що пов'язує потенціал і просторово комплексно-спряжені до нього функції течії. На основі цього сформульовано задачу про визначення просторового конформного відображення криволінійного паралелепіпеда на прямокутний паралелепіпед та відповідну обернену до неї задачу (знаходження оберненого конформного відображення). Наведено алгоритм розв'язування задачі та виконано числові розрахунки.

Вступ. Моделювання просторових ідеальних та квазіідеальних полів пов'язане з чималою кількістю проблем, які породжені, зокрема, неможливістю «повного» узагальнення теорії аналітичних функцій комплексної змінної (комплексних чисел) на простір. На сьогодні існує ряд просторових узагальнень окремих аспектів цієї теорії (див., наприклад, [6, 11]), але універсального методу конформних і квазіконформних відображень у просторі наразі не існує. Просторові ж задачі моделювання течії здебільшого розв'язують методами «плоского» комплексного аналізу [2–4, 8, 9, 12] або чисельними методами. Так, у роботі [2] на основі теорії побудови конформних сіток на просторових поверхнях [10] і методики О. В. Голубевої [4] (а в роботі [3] з використанням теорії В. О. Толпаєва [7, 8]) розв'язано задачу моделювання ідеальної (квазіідеальної) течії у тонкому просторово викривленому пласті, обмеженому екіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії. Результати обчислень підтвердили ефективність таких методів для розрахунків у просторових криволінійних областях, течію в яких можна умовно інтерпретувати як рух уздовж деяких окремих їх прошарків.

Для областей складнішої геометричної конфігурації актуальною є розробка методів безпосереднього розв'язання таких просторових задач, без зведення їх до плоских. У цій роботі розроблено алгоритм розв'язування просторових крайових задач, що базується на зведенні до конформного відображення криволінійного паралелепіпеда, обмеженого поверхнями течії та екіпотенціальними поверхнями, на прямокутник на основі введеного просторового аналогу системи Коші – Рімана.

Загальна постановка задачі. Розглянемо в криволінійному паралелепіпеді $G_\tau = A_*B_*C_*D_*A^*B^*C^*D^*$, $\tau = (x, y, z)$ (рис. 1а), обмеженому двома екіпотенціальними поверхнями $A^*A_*B_*B^* = \{\tau : x = F_*(y, z)\}$, $C^*C_*D_*D^* = \{\tau : x = F^*(y, z)\}$ та чотирма поверхнями течії $A^*D^*D_*A_* = \{\tau : y = G_*(x, z)\}$, $B^*C^*C_*B_* = \{\tau : y = G^*(x, z)\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\tau : z = H_*(x, y)\}$, $A^*B^*C^*D^* = \{\tau : z = H^*(x, y)\}$ (гладкими, взаємно ортогональними між собою уздовж ліній перетину) процес руху частинок (зокрема, фільтрації в пористому пласті, руху заряджених частинок у провідній пластинці тощо).

Такий процес описується рівняннями руху $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ і нерозривності $\text{div } \mathbf{v} = 0$, де $\mathbf{v} = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ – швидкість руху частинок, $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенціал поля ($\varphi|_{A^*A_*B_*B^*} = \varphi_*$, $\varphi|_{C^*C_*D_*D^*} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{A_*D_*A^*D^* \cup A_*B_*C_*D_* \cup B_*C_*B^*C^* \cup A^*B^*C^*D^*} = 0$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, n – зовнішня нормаль до відповідної поверхні).

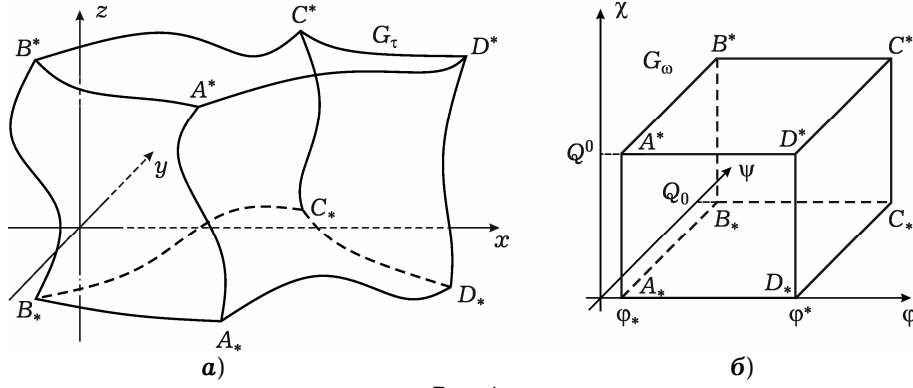


Рис. 1

Введемо функції течії $\psi = \psi(x, y, z)$ і $\chi = \chi(x, y, z)$, просторово комплексно-спряжені з потенціалом $\varphi = \varphi(x, y, z)$:

$$\text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \chi, \quad \text{grad } \psi \times \text{grad } \chi = 0. \quad (1)$$

Модельну задачу знаходження течії в G_τ сформулюємо як задачу відшукування просторового конформного відображення [1] $\omega = \omega(\tau) = \omega(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z))$ області G_τ на відповідну просторову область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0, 0 < \chi < Q^0\}$ (рис. 1б), де $Q = Q_0 Q^0$ – шукана повна витрата (потік через довільний поперечний переріз відповідної трубки течії):

$$\begin{aligned} \varphi|_{ABB_*A_*} &= \varphi_*, & \varphi|_{DCC_*D_*} &= \varphi^*, & \psi|_{ADD_*A_*} &= 0, \\ \psi|_{BCC_*B_*} &= Q_0, & \chi|_{ADCB} &= 0, & \chi|_{A_*D_*C_*B_*} &= Q^0. \end{aligned} \quad (2)$$

Зауважимо, що параметри Q_0 і Q^0 є невідомими, однак знаходження їх значень у процесі розв'язування не є принциповим. Далі визначатимемо лише повну витрату Q . Її перерозподіл уздовж горизонтального Q_0 і вертикального Q^0 одиничних прошарків здійснюватимемо умовно.

Домножимо почергово перше з рівнянь системи (1) на вектори $\text{grad } \psi$ і $\text{grad } \chi$. В результаті, враховуючи друге з рівнянь (1), отримаємо

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \text{grad } \psi \times \text{grad } \chi, & \text{grad } \psi &= \text{grad}^{-2} \chi (\text{grad } \chi \times \text{grad } \varphi), \\ \text{grad } \chi &= \text{grad}^{-2} \psi (\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi). \end{aligned} \quad (3)$$

Обернену до (1), (2) задачу (3), (2) про визначення просторового конформного відображення $G_\omega \rightarrow G_\tau$ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x_\varphi &= y_\psi z_\chi - z_\psi y_\chi, & x_\psi \cdot X^{-2} &= y_\chi z_\varphi - z_\chi y_\varphi, & x_\chi \cdot \Psi^{-2} &= y_\varphi z_\psi - z_\varphi y_\psi, \\ y_\varphi &= z_\psi x_\chi - x_\psi z_\chi, & y_\psi \cdot X^{-2} &= z_\chi x_\varphi - x_\chi z_\varphi, & y_\chi \cdot \Psi^{-2} &= z_\varphi x_\psi - x_\varphi z_\psi, \\ z_\varphi &= x_\psi y_\chi - y_\psi x_\chi, & z_\psi \cdot X^{-2} &= x_\chi y_\varphi - y_\chi x_\varphi, & z_\chi \cdot \Psi^{-2} &= x_\varphi y_\psi - y_\varphi x_\psi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x(\varphi_*, \psi, \chi) &= F_*(y(\varphi_*, \psi, \chi), z(\varphi_*, \psi, \chi)), & x(\varphi^*, \psi, \chi) &= \\ &= F^*(y(\varphi^*, \psi, \chi), z(\varphi^*, \psi, \chi)), \\ y(\varphi, 0, \chi) &= G_*(x(\varphi, 0, \chi), z(\varphi, 0, \chi)), & y(\varphi, Q_0, \chi) &= G^*(x(\varphi, Q_0, \chi), z(\varphi, Q_0, \chi)), \\ z(\varphi, \psi, 0) &= H_*(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0)), & z(\varphi, \psi, Q^0) &= H^*(x(\varphi, \psi, Q^0), y(\varphi, \psi, Q^0)). \end{aligned} \quad (5)$$

Зокрема, згідно з (4) матимемо

$$\begin{aligned} (x_\varphi)_\varphi + (X^{-2}x_\psi)_\psi + (\Psi^{-2}x_\chi)_\chi &= 0, & (y_\varphi)_\varphi + (X^{-2}y_\psi)_\psi + (\Psi^{-2}y_\chi)_\chi &= 0, \\ (z_\varphi)_\varphi + (X^{-2}z_\psi)_\psi + (\Psi^{-2}z_\chi)_\chi &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$X = X(\varphi, \psi, \chi) = \frac{1}{J} [(y_\varphi z_\psi - z_\varphi y_\psi)^2 + (z_\varphi x_\psi - x_\varphi z_\psi)^2 + (x_\varphi y_\psi - y_\varphi x_\psi)^2]^{1/2},$$

$$\Psi = \Psi(\varphi, \psi, \chi) = \frac{1}{J} [(y_\chi z_\varphi - z_\chi y_\varphi)^2 + (z_\chi x_\varphi - x_\chi z_\varphi)^2 + (x_\chi y_\varphi - y_\chi x_\varphi)^2]^{1/2},$$

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, \chi)} - \text{якобіан переходу.}$$

Алгоритм чисельного розв'язання задачі. Для розв'язання отриманої задачі знайдемо динамічну сітку $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j, \chi_k) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, i=0, \dots, m; \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j=0, \dots, n; \chi_k = \Delta\chi \cdot k, k=0, \dots, \ell; \Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/m, \Delta\psi = Q_0/n, \Delta\chi = Q^0/\ell, \gamma = \Delta\varphi/(\Delta\psi \cdot \Delta\chi), m, n, \ell \in \mathbb{N}\}$ в області G_τ за заданими значеннями кількості m, n та ℓ вузлів розбиття, потенціалу на протилежних стінках φ_*, φ^* та параметра точності ε .

Початкові наближення координат граничних вузлів

$$\begin{aligned} (x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)}), & \quad (x_{i,n,k}^{(0)}, y_{i,n,k}^{(0)}, z_{i,n,k}^{(0)}), & \quad (x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}), \\ (x_{i,j,\ell}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}), & \quad (x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)}), & \quad (x_{m,j,k}^{(0)}, y_{m,j,k}^{(0)}, z_{m,j,k}^{(0)}), \\ i = 0, \dots, m, & \quad j = 0, \dots, n, & \quad k = 0, \dots, \ell, \end{aligned}$$

задаємо так, щоб виконувалась система умов (5):

$$\begin{aligned} x_{0,j,k} &= F_*(y_{0,j,k}, z_{0,j,k}), & x_{m,j,k} &= F^*(y_{m,j,k}, z_{m,j,k}), & j = 0, \dots, n, & k = 0, \dots, \ell, \\ y_{i,0,k} &= G_*(x_{i,0,k}, z_{i,0,k}), & y_{i,n,k} &= G^*(x_{i,n,k}, z_{i,n,k}), & i = 0, \dots, m, & k = 0, \dots, \ell, \\ z_{i,j,0} &= H_*(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}), & z_{i,j,\ell} &= H^*(x_{i,j,\ell}, y_{i,j,\ell}), & i = 0, \dots, m, & j = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)})$, $i = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, n-1, k = 1, \dots, \ell-1$, вибираємо, наприклад, як узагальнені середні значення координат відповідних граничних вузлів (тут і надалі $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \chi_k)$, $y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \chi_k)$, $z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \chi_k)$).

Наближення невідомої величини γ (усередненого відношення сторін елементарних параметричних паралелепіпедів G_ω до площ бічних граней) визначаємо з умови «просторової конформної подібності в малому» відповідних елементарних паралелепіпедів двох областей:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{4}{mn\ell} \sum_{i,j,k=0}^{m-1, n-1, \ell-1} (\rho(\tau_{i+1,j,k}, \tau_{i,j,k}) + \rho(\tau_{i+1,j+1,k}, \tau_{i,j+1,k}) + \\ &\quad + \rho(\tau_{i+1,j,k+1}, \tau_{i,j,k+1}) + \rho(\tau_{i+1,j+1,k+1}, \tau_{i,j+1,k+1})) \times \\ &\quad \times (\rho(\tau_{i,j+1,k}, \tau_{i,j,k}) + \rho(\tau_{i+1,j+1,k}, \tau_{i+1,j,k}) + \\ &\quad + \rho(\tau_{i,j+1,k+1}, \tau_{i,j,k+1}) + \rho(\tau_{i+1,j+1,k+1}, \tau_{i+1,j,k+1}))^{-1} \times \\ &\quad \times (\rho(\tau_{i,j,k+1}, \tau_{i,j,k}) + \rho(\tau_{i+1,j,k+1}, \tau_{i+1,j,k}) + \\ &\quad + \rho(\tau_{i,j+1,k+1}, \tau_{i,j+1,k}) + \rho(\tau_{i+1,j+1,k+1}, \tau_{i+1,j+1,k}))^{-1}. \end{aligned}$$

Тут і надалі $\rho(\tau_{i,j,k}, \tau_{\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}}) = [(x_{i,j,k} - x_{\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}})^2 + (y_{i,j,k} - y_{\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}})^2 + (z_{i,j,k} - z_{\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}})^2]^{1/2}$.

Наближення невідомої повної витрати обчислюємо за формулою $Q = \Delta \phi n \ell / \gamma$.

Після цього на основі різницевих аналогів для рівнянь системи (6) проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів:

$$\begin{aligned} x_{i,j,k} &= \frac{2}{4 + \gamma^2 \mathcal{A}_{i,j,k}^{-1} + \gamma^2 \mathcal{B}_{i,j,k}^{-1}} \left(x_{i-1,j,k} + x_{i+1,j,k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2}{4\mathcal{A}_{i,j,k}} (x_{i,j-1,k} + x_{i,j+1,k}) + \frac{\gamma^2}{4\mathcal{B}_{i,j,k}} (x_{i,j,k-1} + x_{i,j,k+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma^2 \frac{x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}}{2\mathcal{A}_{i,j,k}^2} C_{i,j,k} - \gamma^2 \frac{x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}}{2\mathcal{B}_{i,j,k}^2} \mathcal{D}_{i,j,k} \right), \\ y_{i,j,k} &= \frac{2}{4 + \gamma^2 \mathcal{A}_{i,j,k}^{-1} + \gamma^2 \mathcal{B}_{i,j,k}^{-1}} \left(y_{i-1,j,k} + y_{i+1,j,k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2}{4\mathcal{A}_{i,j,k}} (y_{i,j-1,k} + y_{i,j+1,k}) + \frac{\gamma^2}{4\mathcal{B}_{i,j,k}} (y_{i,j,k-1} + y_{i,j,k+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma^2 \frac{y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}}{2\mathcal{A}_{i,j,k}^2} C_{i,j,k} - \gamma^2 \frac{y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}}{2\mathcal{B}_{i,j,k}^2} \mathcal{D}_{i,j,k} \right), \\ z_{i,j,k} &= \frac{2}{4 + \gamma^2 \mathcal{A}_{i,j,k}^{-1} + \gamma^2 \mathcal{B}_{i,j,k}^{-1}} \left(z_{i-1,j,k} + z_{i+1,j,k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2}{4\mathcal{A}_{i,j,k}} (z_{i,j-1,k} + z_{i,j+1,k}) + \frac{\gamma^2}{4\mathcal{B}_{i,j,k}} (z_{i,j,k-1} + z_{i,j,k+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma^2 \frac{z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}}{2\mathcal{A}_{i,j,k}^2} C_{i,j,k} - \gamma^2 \frac{z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}}{2\mathcal{B}_{i,j,k}^2} \mathcal{D}_{i,j,k} \right), \end{aligned}$$

де $i = 1, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, \ell-1$. Вирази для $\mathcal{A}_{i,j,k}$, $\mathcal{B}_{i,j,k}$, $C_{i,j,k}$, $\mathcal{D}_{i,j,k}$ не наводимо через громіздкість.

Координати граничних вузлів уточнюємо з умови колінеарності «векторів-градієнтів» і відповідних бічних поверхонь, а також «векторів-нормалей», утворених граничними та відповідними приграничними вузлами [1]:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} &= \frac{F'_{*y}(y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{F'_{*z}(y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}, \\ \frac{-1}{x_{m,j,k} - x_{m-1,j,k}} &= \frac{F'^{*y}(y_{m,j,k}, z_{m,j,k})}{y_{m,j,k} - y_{m-1,j,k}} = \frac{F'^{*z}(y_{m,j,k}, z_{m,j,k})}{z_{m,j,k} - z_{m-1,j,k}}, \\ \frac{G'_{*x}(x_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{x_{i,1,k} - x_{i,0,k}} &= \frac{-1}{y_{i,1,k} - y_{i,0,k}} = \frac{G'_{*z}(x_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{z_{i,1,k} - z_{i,0,k}}, \\ \frac{G^*_{*x}(x_{i,n,k}, z_{i,n,k})}{x_{i,n,k} - x_{i,n-1,k}} &= \frac{-1}{y_{i,n,k} - y_{i,n-1,k}} = \frac{G^*_{*z}(x_{i,n,k}, z_{i,n,k})}{z_{i,n,k} - z_{i,n-1,k}}, \\ \frac{H'_{*x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} &= \frac{H'_{*y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{-1}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}}, \\ \frac{H^*_{*x}(x_{i,j,\ell}, y_{i,j,\ell})}{x_{i,j,\ell} - x_{i,j,\ell-1}} &= \frac{H^*_{*y}(x_{i,j,\ell}, y_{i,j,\ell})}{y_{i,j,\ell} - y_{i,j,\ell-1}} = \frac{-1}{z_{i,j,\ell} - z_{i,j,\ell-1}}, \end{aligned}$$

$i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n, \quad k = 0, \dots, \ell.$

Закінчення $(p + 1)$ -го кроку ітераційного процесу перевіряємо за умовами

$$\begin{aligned} & \left| \gamma^{(p+1)} - \gamma^{(p)} \right| < \varepsilon, \\ & \max_{\tau_{i,j,k} \in \partial G_\tau} \left(\left| x_{i,j,k}^{(p+1)} - x_{i,j,k}^{(p)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(p+1)} - y_{i,j,k}^{(p)} \right|, \left| z_{i,j,k}^{(p+1)} - z_{i,j,k}^{(p)} \right| \right) < \varepsilon, \\ & \left| \frac{\mathcal{R}_1^{(p+1)}}{\mathcal{R}_2^{(p+1)}} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\mathcal{R}_1^{(p+1)}}{\mathcal{R}_3^{(p+1)}} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\mathcal{R}_1^{(p+1)}}{\mathcal{R}_4^{(p+1)}} - 1 \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \frac{1}{mn\ell} \sum_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \rho(\tau_{i,j,k}, \tau_{i-1,j-1,k-1}), \quad \mathcal{R}_2 = \frac{1}{mn\ell} \sum_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \rho(\tau_{i,j,k-1}, \tau_{i-1,j-1,k}), \\ \mathcal{R}_3 &= \frac{1}{mn\ell} \sum_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \rho(\tau_{i,j-1,k}, \tau_{i-1,j,k-1}), \quad \mathcal{R}_4 = \frac{1}{mn\ell} \sum_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \rho(\tau_{i-1,j,k}, \tau_{i,j-1,k-1}). \end{aligned}$$

Якщо заданої точності не досягнуто, повертаємось до знаходження наступного наближення невідомого параметра γ , а також уточнення координат внутрішніх і граничних вузлів.

Після завершення алгоритму обчислюємо нев'язку конформності отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}$ та «нев'язку ортогональності» сітки $\delta_\perp = \max(\delta_{\perp 1}, \delta_{\perp 2}, \delta_{\perp 3})$. Тут $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – нев'язки апроксимацій першої підсистеми системи (4) в G_ω :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \max_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \left| (x_{i,j,k} - x_{i-1,j,k}) - \gamma((y_{i,j,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k} - z_{i,j,k-1}) + \right. \\ & \quad \left. + (z_{i,j,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k} - y_{i,j,k-1})) \right|, \\ \delta_2 &= \max_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \left| (y_{i,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \gamma((z_{i,j,k} - z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k} - x_{i,j,k-1}) + \right. \\ & \quad \left. + (x_{i,j,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k} - z_{i,j,k-1})) \right|, \\ \delta_3 &= \max_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \left| (z_{i,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \gamma((x_{i,j,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k} - y_{i,j,k-1}) + \right. \\ & \quad \left. + (y_{i,j,k} - y_{i,j-1,k})(x_{i,j,k} - x_{i,j,k-1})) \right|, \end{aligned}$$

а $\delta_{\perp 1}, \delta_{\perp 2}, \delta_{\perp 3}$ визначаємо зі співвідношень

$$\begin{aligned} \delta_{\perp 1} &= \max_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \left| (x_{i,j,k} - x_{i-1,j,k})(x_{i,j,k} - x_{i,j-1,k}) + (y_{i,j,k} - y_{i-1,j,k})(y_{i,j,k} - \right. \\ & \quad \left. - y_{i,j-1,k}) + (z_{i,j,k} - z_{i-1,j,k})(z_{i,j,k} - z_{i,j-1,k}) \right|, \\ \delta_{\perp 2} &= \max_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \left| (x_{i,j,k} - x_{i-1,j,k})(x_{i,j,k} - x_{i,j,k-1}) + (y_{i,j,k} - y_{i-1,j,k})(y_{i,j,k} - \right. \\ & \quad \left. - y_{i,j,k-1}) + (z_{i,j,k} - z_{i-1,j,k})(z_{i,j,k} - z_{i,j,k-1}) \right|, \\ \delta_{\perp 3} &= \max_{i,j,k=1}^{m,n,\ell} \left| (x_{i,j-1,k} - x_{i,j,k})(x_{i,j,k} - x_{i,j,k-1}) + (y_{i,j-1,k} - y_{i,j,k})(y_{i,j,k} - \right. \\ & \quad \left. - y_{i,j,k-1}) + (z_{i,j-1,k} - z_{i,j,k})(z_{i,j,k} - z_{i,j,k-1}) \right|. \end{aligned}$$

Результати числових розрахунків. Описаний вище алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі реалізовано у вигляді програми для ПК IBM PC/AT. Для перевірки його коректності проведено серію обчислень. Зокрема, виконано розрахунки для фізичної області G_τ , обмеженої еквіпотенціальними поверхнями $A^*A_*B_*B^* = \{\tau : x = -\pi/2\}$, $C^*C_*D_*D^* =$

$= \{\tau : x = \pi/2\}$ та чотирма поверхнями течії $A^*D^*D_*A_* = \{\tau : y = -\pi/2\}$, $B^*C^*C_*B_* = \{\tau : y = \pi/2\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\tau : z = \cos(x)\cos(y)\}$, $A^*B^*C^*D^* = \{\tau : z = 0.5 \cos(2x + \pi/2, 2y + \pi/2)\}$, при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

У табл. 1 для заданих параметрів розбиття m , n , ℓ наведено значення p , невідомого параметра γ , шуканої витрати Q , нев'язки конформності δ , нев'язки ортогональності δ_{\perp} .

Таблиця 1

m	n	ℓ	p	γ	Q	δ	δ_{\perp}
30	30	30	509	8.94574	3.35355	0.10481	0.11884
50	50	50	114	14.96710	3.34066	0.09281	0.07236
90	30	30	134	2.98753	3.34724	0.04620	0.08041
160	20	20	89	0.74647	3.34908	0.01684	0.02768
160	24	24	82	1.07140	3.34959	0.01558	0.01944
160	30	30	78	1.77609	3.35060	0.02077	0.01535
160	40	40	67	2.98345	3.35182	0.02658	0.01357

З аналізу табл. 1 випливає, що покращити нев'язку конформності δ можна не лише за рахунок збільшення кількостей вузлів розбиття. Можна також задавати ці кількості так, щоб значення параметра конформності γ було близьким до одиниці. Проте зменшення числа вузлів розбиття при цьому може призвести до збільшення нев'язки ортогональності δ_{\perp} .

На рис. 2а зображено гідродинамічну сітку руху на границі області G_{τ} для значень $m = n = \ell = 40$, а на рис. 2б наведено поверхні течії $\chi = \text{const}$ для тих самих параметрів m , n , ℓ .

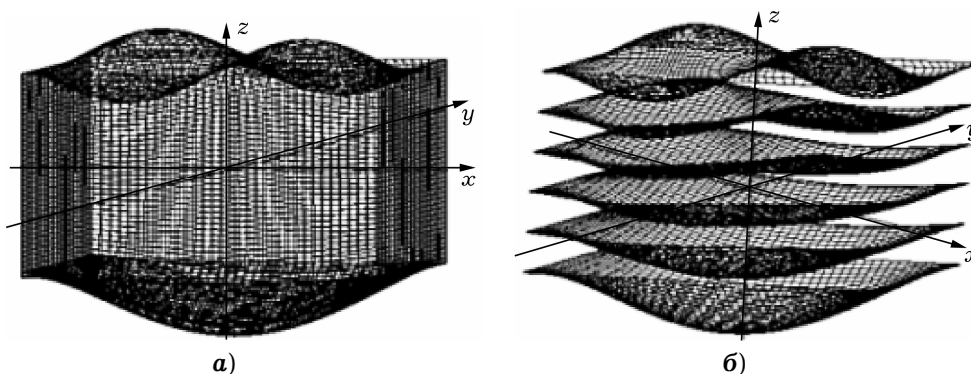


Рис. 2

Висновки. Запропоновано математичну постановку та алгоритм розв'язання задачі моделювання ідеальної течії у криволінійному паралелепіпеді, обмеженому екіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії, взаємоортогональними між собою вздовж ліній перетину. Проведення обчислень на основі системи диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку у внутрішній частині заданої фізичної області з локалізацією (та наступною заміною геометричними еквівалентами) вихідних рівнянь першого порядку поблизу її границі забезпечує кращу стійкість і збіжність алгоритму порівняно з [5]. Одержані результати числових експериментів підтвердили достовірність теоретичних досліджень.

У перспективі досліджень – розвинення запропонованої методики на випадки узагальнення квазіконформних відображень. Також актуальним є її застосування при дослідженні різноманітних фізичних процесів, зокрема, для знаходження квазіідеальної фільтраційної течії в неоднорідних анізотропних пластах, моделювання нафтогазових пластів тощо.

1. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецький В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ: Наук. думка, 2007. – 292 с.
2. Бомба А. Я., Теребус А. В. Моделювання ідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів // Мат. та комп'ют. моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 4. – С. 31–40.
3. Бомба А. Я., Теребус А. В. Моделювання квазіідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2010. – № 4. – С. 9–16.
4. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. – Москва: Высш. шк., 1972. – 367 с.
5. Елисеев В. И. Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. – Москва, 1990. – 500 с.
6. Климюк Ю. Є., Пригорницький Д. О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні // Волинськ. мат. вісн. Сер. Прикл. математика. – 2008. – 5(14). – С. 104–143.
7. Толпаев В. А. Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18 – Ставрополь, 2004. – 38 с.
8. Толпаев В. А., Палиев В. В. Уравнение неразрывности в двумерных моделях фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах конечной толщины // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2007. – 7, вып. 2. – С. 49–53.
9. Hromadka T. V., Whitley R. J. Approximating three-dimensional steady-state potential flow problems using two-dimensional complex polynomials // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2005. – 29, No. 2. – P. 190–194.
10. Koppenfels W., Stallmann F. Praxis der Konformen Abbildung. – Berlin–Gottin-gen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1959. – 375 p.
11. Martin E. Dale. Some elements of a theory of multidimensional complex variables: Part I. General theory // J. Franklin Inst. – 1989. – 326, No. 5. – P. 611–647.
12. Shaw W. T. Complex variable methods for 3D applied mathematics: 3D twistors and the biharmonic equation. – 2010: arXiv:submit/0045479 [physics.flu-dyn] 23 May 2010.

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ

Предложена математическая модель для расчета идеального течения в криволинейном параллелепипеде, ограниченном поверхностями течения и эквипотенциальными поверхностями. Записана система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которая связывает потенциал и пространственно комплексно-сопряженные к нему функции течения. На основе этого сформулирована задача об определении пространственного конформного отображения криволинейного параллелепипеда на прямоугольный параллелепипед и соответствующая обратная ей задача (нахождение обратного конформного отображения). Приведен алгоритм решения этой задачи и выполнены численные расчеты.

SPATIAL GENERALIZATION OF CONFORMAL MAPPINGS METHOD TO SOLUTION OF MODEL BOUNDARY-VALUE FILTRATION PROBLEMS

We consider a problem of ideal flow modeling in a curvilinear parallelepiped, bounded by stream and equipotential surfaces. We suggest the system of second order partial differential equations, which relates the potential and spatially complex-conjugate to it stream functions. On this basis, we formulated the problem of finding the conformal mapping of this curvilinear parallelepiped on a rectangular parallelepiped and the corresponding inverse problem (on inverse conformal mapping). An algorithm of solution of this problem is constructed and the numerical calculations are carried out.

Рівненськ. держ. гуманітарний ун-т, Рівне

Одержано
24.05.11