УДК 517.95

Г. П. Лопушанська

НОРМАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлено розв'язність у вагових просторах узагальнених функцій нормальних крайових задач для лінійних еліптичних за Петровським систем диференціальних рівнянь та знайдено достатні умови розв'язності таких задач для напівлінійних еліптичних систем диференціальних рівнянь з крайовими даними з вагових просторів узагальнених функцій.

Вступ. Лінійні еліптичні крайові задачі досить повно вивчені у просторах узагальнених функцій Соболєва, Гельдера, Лізоркіна – Трібеля та Нікольського – Бєсова, в уточнених шкалах банахових просторів: в просторах Хермандера – Волєвіча – Панеяха (див. [1, 2, 8–10, 14, 16, 24] і бібліографію в них), з правими частинами із сильними степеневими особливостями [9, 15], у просторах типу $\mathcal{D}'$ [5, 11], а у [12] – у вагових просторах узагальнених функцій [26]. У працях М. Л. Горбачука, В. І. Горбачук [4], Ж.-Л. Ліонса, Е. Мадженеса, Р. Сейлора, В. В. Городецького диференціальні оператори досліджуються у просторах Шварца та просторах аналітичних узагальнених функцій.

Активно вивчаються крайові задачі для напівлінійних еліптичних рівнянь і з негладкими коефіцієнтами (див., наприклад, [7, 17–23, 25]).

У цій статті встановлено існування та єдиність розв'язку нормальної крайової задачі для лінійної еліптичної за Петровським системи диференціальних рівнянь з правими частинами з вагових просторів узагальнених функцій, що як окремі випадки містять функції із сильними степеневими особливостями. Також одержано достатні умови розв'язності крайових задач для напівлінійних еліптичних систем рівнянь з заданими на межі області узагальненими функціями.

Основні позначення та означення. Нехай Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею Ω_1 класу C^∞,

$$A = \sum_{|\alpha|\le 2b} a_\alpha(x)D^\alpha, \qquad B_j(x,D) = \sum_{|\alpha|\le r_j} b_{j\alpha}(x)D^\alpha, \quad j=1,\dots,m, \quad m = bp,$$

де $a_\alpha(x)$ – квадратні $p\times p$ матриці з елементами $a_\alpha^{\nu\mu}\in C^\infty(\Omega_0)$; $b_{j\alpha}(x)$ – рядки довжини p з елементами з $C^\infty(\Omega_1)$, $j=1,\dots,m$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – мультиіндекс, $|\alpha| := \alpha_1+\ldots+\alpha_n$; $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$; A – рівномірно еліптичний за Петровським матричний диференціальний вираз.

Матрицею Діріхле порядку $(2b,p)$ називають [16] матрицю крайових диференціальних виразів, яку переставлянням рядків можна звести до вигляду

$$(B_0(x,D),\dots,B_{2b-1}(x,D))^\top,$$

де $B_j(x,D) \equiv \sum_{|\alpha|\le j} d_{j\alpha}(x)D^\alpha$, $d_{j\alpha}(x)$ – квадратні $p\times p$ матриці, при цьому

$$\det B_{j0}(x,\nu) = \det\sum_{|\alpha|=j} d_{j\alpha}(x)\nu^\alpha \ne 0, \qquad x\in\Omega_1,$$

де $\nu=\nu(x)$ – орт внутрішньої нормалі до Ω_1 у точці x.

Систему крайових диференціальних виразів $\{B_j\}_{j=1}^m$ називають *нормальною* [16], якщо матрицю $B = (B_1, \dots, B_m)^\top$ можна доповнити новими рядками до матриці Діріхле порядку $(2b, p)$.

Вважатимемо, що система $\{B_j\}_{j=1}^m$ рівномірно накриває A [16], а також є нормальною.

Розглянемо нормальну еліптичну крайову задачу

$$A(x, D)u(x) = F_0(x), \qquad x \in \Omega_0, \tag{1}$$

$$B_j(x, D)u(x) = F_j(x), \qquad x \in \Omega_1, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Згідно з [16], існують такі крайові диференціальні вирази B_j^*, C_j, C_j^*, $j = 1, \dots, m$, відповідно порядків r_j^*, m_j, m_j^*, причому $r_j + m_j^* = m_j + r_j^* = 2b - 1$, що справджується формула Ґріна

$$\int_{\Omega_0} [v^\top Au - (A^* v)^\top u]\, dx = \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_1} [C_j^* v B_j u - B_j^* v C_j u]\, dS \qquad \forall u, v \in C^\infty(\bar\Omega_0),$$

де A^* − формально спряжений до A диференціальний вираз.

Нехай $(G_0(x, y), G(x, y)) = (G_0(x, y), \dots, G_m(x, y))$ − матриця Ґріна задачі (1), (2) [6, § 13; 8]. Існування її доведено в [2]. Властивості інтегральних операторів Ґріна $G_j\varphi = \int_{\Omega_j} G_j(\cdot, y)\varphi(y)\, dy$, $j = 0, \dots, m$, вивчались на соболєвських [24] і гельдерових [6, 8] просторах вектор-функцій φ. У цій роботі дослідимо спряжені оператори Ґріна $G_j^*\varphi = \int_{\Omega_0} G_j^\top(x, \cdot)\varphi(x)\, dx$, $j = 0, \dots, m$, на вагових просторах гладких функцій та встановимо зображення розв'язку задачі з правими частинами з вагових просторів узагальнених функцій за допомогою спряжених операторів Ґріна.

Введемо такі позначення: $(i) = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ 1, & i = 1, \dots, m; \end{cases}$ $r_0 = 2b$; $[k]$ − ціла частина числа k; $\rho(x, x_0)$ − нескінченно диференційовна функція в $\bar\Omega_0$, додатна в $\bar\Omega_0 \setminus x_0$, дорівнює нулеві в точці $x_0 \in \bar\Omega_0$, має порядок $|x - x_0|$ при $|x - x_0| \to 0$ та $\rho(x, x_0) \le 1$, $x \in \bar\Omega_0$; $\rho(x)$ − нескінченно диференційовна функція в $\bar\Omega_0$, додатна в Ω_0, дорівнює нулеві на Ω_1, має порядок відстані $d(x)$ від точки $x \in \Omega_0$ до Ω_1 при $d(x) \to 0$ і $\rho(x) \le 1$, $x \in \bar\Omega_0$.

Введемо функціональні простори:

$\mathcal{D}(\bar\Omega_i) = C^\infty(\bar\Omega_i)$, $i = 0, 1$,

$\tilde Z_k(\Omega_i, x_0) = \{\varphi \in C^\infty(\bar\Omega_i \setminus x_0) : \rho^{|\alpha| - k}(\cdot, x_0) D^\alpha \varphi \in C(\bar\Omega_i)\ \forall \alpha\}$, $x_0 \in \bar\Omega_i$, $k \in \mathbb{R}$,

$Z_k(\Omega_i, x_0) = \{\varphi \in C^\infty(\bar\Omega_i \setminus x_0) \cap C^{[k]}(\bar\Omega_i) : \rho^{|\alpha| - k}(\cdot, x_0) D^\alpha \varphi \in C(\bar\Omega_i)\ \forall |\alpha| \ge k\}$, $k > 0$,

$Z_k(\Omega_i, x_0) = \tilde Z_k(\Omega_i, x_0)$, $k \le 0$, $i = 0, 1$,

$\tilde Z_k(\Omega_0) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega_0) : \rho^{|\alpha| - k} D^\alpha \varphi \in C(\bar\Omega_0)\ \forall \alpha\}$, $k \in \mathbb{R}$,

$Z_k(\Omega_0) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega_0) \cap C^{[k]}(\bar\Omega_0) : \rho^{|\alpha| - k} D^\alpha \varphi \in C(\bar\Omega_0)\ \forall |\alpha| \ge k\}$, $k \ge 0$,

$Z_k(\Omega_0) = \tilde Z_k(\Omega_0)$, $k \le 0$.

Скажемо, що послідовність $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$ в $\tilde{Z}_k(\Omega_0, x_0)$, якщо для довільного мультиіндексу α послідовність $\varphi_{\alpha\nu} = \rho^{|\alpha|-k} D^\alpha \varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$ рівномірно в $\bar{\Omega}_0$; $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$ в $Z_k(\Omega_0, x_0)$, якщо рівномірно в $\bar{\Omega}_0$ $D^\alpha \varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$ для $|\alpha| \le [k]$ і $\varphi_{\alpha\nu} \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$ для $|\alpha| \ge k$.

Подібно означуємо збіжність в інших введених функціональних просторах.

Нехай V' – простір лінійних неперервних функціоналів на V, $(\varphi, F)_i = \sum_{j=1}^{p} (\varphi_j, F_j)_i$ – значення $F = (F_1, \dots, F_p) \in V'(\bar{\Omega}_i)$ на основній вектор-функції $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in V(\bar{\Omega}_i)$, $i = 0,1$.

Функції з просторів Z_k, $\tilde{Z}_k$ та Z'_k, $\tilde{Z}'_k$ мають спільні властивості [11, 13], зокрема,

$Z_{k_2} \subset Z_{k_1}$ $(\Rightarrow Z'_{k_1} \subset Z'_{k_2})$ для $k_2 > k_1$, $(C^k)' \subset Z'_k$, $Z'_{-k} \subset \mathcal{D}'$ при $k > 0$;

якщо $f \in \tilde{Z}_{-k}$, то f – регулярна узагальнена функція з $\tilde{Z}'_k$;

якщо $g_\alpha \in L_1$ при $|\alpha| \le r$, то $g = \sum_{|\alpha|\le r} D^\alpha (\rho^{|\alpha|-k} g_\alpha) \in \tilde{Z}'_k$.

У [3, с. 96] доведено, що лінійний функціонал F на $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_j)$ належить простору $\mathcal{D}'(\bar{\Omega}_j)$ тоді й тільки тоді, коли

$$\left|(\varphi, F)_j\right| \le c_j \max_{y\in\bar{\Omega}_j} \max_{|\alpha|\le\ell} \left|D^\alpha \varphi(y)\right|_p \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_j), \qquad j = 0,1, \tag{3}$$

де ℓ – деяке ціле невід'ємне число, c_j – невід'ємні сталі, $j = 0,1$.

Подібно встановлюємо (див. [11–13]), що при $x_0 \in \Omega_j$ лінійний функціонал F на $\tilde{Z}_k(\Omega_j, x_0)$ (відповідно $Z_k(\Omega_j, x_0)$) належить простору $\tilde{Z}'_k(\Omega_j, x_0)$ (відповідно $Z'_k(\Omega_j, x_0)$) тоді й тільки тоді, коли відповідно

$$\left|(\varphi, F)_j\right| \le c_{kj} \max_{y\in\bar{\Omega}_j} \max_{|\alpha|\le\ell} \rho^{|\alpha|-k}(y, x_0) \left|D^\alpha \varphi(y)\right|_p \qquad \forall\varphi \in \tilde{Z}_k(\Omega_j, x_0),$$

$$\left|(\varphi, F)_j\right| \le c_{kj} \max_{y\in\bar{\Omega}_j} \max_{|\alpha|\le\ell} \frac{\left|D^\alpha \varphi(y)\right|_p}{1 + \rho^{k-|\alpha|}(y, x_0)} \quad \forall\varphi \in Z_k(\Omega_j, x_0), \quad j = 0,1. \tag{4}$$

Лінійний функціонал F на $Z_k(\Omega_0)$ належить простору $Z'_k(\Omega_0)$ тоді й тільки тоді, коли

$$\left|(\varphi, F)_0\right| \le c_k \max_{y\in\bar{\Omega}_0} \max_{|\alpha|\le\ell} \frac{\left|D^\alpha \varphi(y)\right|_p}{1 + \rho^{k-|\alpha|}(x)} \qquad \forall\varphi \in Z_k(\Omega_0). \tag{5}$$

Подібно, як у [3, §1.3, с. 94], говоримо, що узагальнена функція F, яка задовольняє (3), (4) чи (5), має порядок сингулярності $s(F) \le \ell$.

Спряжені оператори Ґріна на вагових просторах основних функцій.

Лема 1. *При* $k \ge 0$

$G_i^* : \tilde{Z}_k(\Omega_0, x_0) \to Z_{k+r_i+(i)}(\Omega_{(i)}, x_0)$, $x_0 \in \Omega_{(i)}$, $i = 0, \dots, m$,

$G_0^* : \tilde{Z}_k(\Omega_0) \to Z_{k+2b+1-n}(\Omega_0)$, $G_i^* : \tilde{Z}_k(\Omega_0) \to C^{k+r_i+1-n}(\Omega_1)$, $i = 1, \dots, m$.

Для д о в е д е н н я застосуємо оцінки і означення з [6, с. 184–186]:

$$\left|D_y^\alpha G_{0ik}(x,y)\right| \le C\omega^{2b-n-|\alpha|}(x,y), \qquad \left|D_y^\alpha G_{jk}(x,y)\right| \le C\omega^{\lambda_j}(x,y), \qquad (6)$$

де $\lambda_j = r_j + (j) - n - |\alpha|$, $\omega^s(x,y) = 1 + |x-y|^s + æ_s \ln|x-y|$, $æ_s = \begin{cases} 0, & s \ne 0, \\ 1, & s = 0, \end{cases}$ G_{0ik}, G_{jk}, $i,k = 1,\dots,p$, – елементи матриць відповідно G_0, G_j, $j = 1,\dots,m$.

Нехай d_0 – додатне мале число. Розглянемо розбиття Ω_0 на $\Omega^1 = \{x \in \in \Omega_0 : d(x) < d_0\}$ і $\Omega^2 = \Omega_0 \setminus \bar\Omega^1$. При $\varphi \in \tilde Z_k(\Omega_0)$ для кожної точки $y \in \Omega_{(j)}$ дослідимо вектор-функції $v_{j\alpha}(y) = D^\alpha \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x) G_j(x,y)\,dx$, $j = 0,\dots,m$.

Як у [13], одержуємо оцінки $|v_{0\alpha}(y)|_p \le C_0(1 + \rho^{k+2b+1-n-|\alpha|}(y))$, $y \in \bar\Omega^1$, де C_0 – додатна стала. Отже, якщо $\varphi \in \tilde Z_k(\Omega_0)$, то функції $v_{0\alpha}$ при $|\alpha| \le k + 2b + 1 - n$ та $\rho^{|\alpha|+n-1-2b-k} v_{0\alpha}$ при $|\alpha| \ge k + 2b + 1 - n$ належать $C(\bar\Omega^1)$. У випадку $j = 1,\dots,m$ для кожної точки $y_0 \in \bar\Omega_1$ подібно одержуємо $|v_{j\alpha}(y)|_p \le C_j[1 + \rho^{k+r_j+1-|\alpha|}(y,y_0)]$, $y \in \bar\Omega^1$, звідки $v_{j\alpha}$ при $|\alpha| \le k + r_j + 1$ та $\rho^{|\alpha|-r_j-1-k}(\cdot\,,y_0) v_{j\alpha}$ при $|\alpha| \ge k + r_j + 1$, $j = 1,\dots,m$, належать $C(\bar\Omega^1)$.

Для кожної точки $y \in \Omega^2$ використовуємо відомі результати. ♦

Формулювання лінійної крайової задачі. Теорема існування та єдиності. Припустимо, що виконуються умови:

$(\mathbf{F}, x_0)$: $x_0 \in \Omega_1$, $F_j \in Z'_{q_j}(\Omega_{(j)}, x_0)$, $j = 0,\dots,m$, $k \ge k_0 = \max\limits_{0 \le j \le m}\{q_j - r_j - (j)\}$;

$(\mathbf{F})$: $F_0 \in Z'_{q_0}(\Omega_0)$, $F_j \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $s(F_j) \le q_j$, $j = 1,\dots,m$, $k \ge k_{00}$, $k_{00} = k_0 + 2b + n - 1$.

Означимо простори

$$X_k(\bar\Omega_0, x_0) = \{\psi \in Z_{k+2b}(\Omega_0, x_0) : A^*\psi \in \tilde Z_k(\Omega_0, x_0),\ C_j^*\psi \in Z_{k+r_j+1}(\Omega_1, x_0),$$
$$B_j^*\psi = 0,\ j = 1,\dots,m\},$$

$$X_k(\bar\Omega_0) = \{\psi \in Z_{k+1-n+2b}(\Omega_0) : A^*\psi \in \tilde Z_k(\Omega_0),\ B_j^*\psi = 0,\ j = 1,\dots,m\}.$$

Можна показати (див. [13]), що при $k \ge 0$ простори $X_k(\bar\Omega_0, x_0)$, $X_k(\bar\Omega_0)$ непорожні.

Означення 1. За припущення $(\mathbf{F})$ ($(\mathbf{F}, x_0)$) розв'язком задачі (1), (2) назвемо узагальнену функцію $u \in \tilde Z'_k(\Omega_0)$ (відповідно $u \in \tilde Z'_k(\Omega_0, x_0)$), яка задовольняє тотожність

$$(A^*\psi, u)_0 = (\psi, F_0)_0 + \sum_{j=1}^m (C_j^*\psi, F_j)_1 \quad \forall \psi \in X_k(\bar\Omega_0) \quad (\forall \psi \in X_k(\bar\Omega_0, x_0)).$$

Теорема 1. *За припущення* $(\mathbf{F})$ (*відповідно* $(\mathbf{F}, x_0)$) *існує єдиний у* $\tilde Z'_k(\Omega_0)/N$ (*відповідно у* $\tilde Z'_k(\Omega_0, x_0)/N$) *розв'язок задачі* (1), (2), *який виражається формулою*

$$(\varphi, u)_0 = (G_0^*\varphi, F_0)_0 + \sum_{j=1}^m (G_j^*\varphi, F_j)_1 \quad \forall \varphi \in \tilde Z_k(\Omega_0) \quad (\forall \varphi \in \tilde Z_k(\Omega_0, x_0)),$$

де N – *ядро задачі* (1), (2).

Теорему доводимо, як у [13], використовуючи лему 1.

Достатні умови розв'язності крайової задачі для напівлінійної системи. Вивчимо задачу

$$A(x,D))u(x) = F_0(x, \partial_r u), \qquad x \in \Omega_0, \tag{7}$$

$$B_j(x,D)u(x) = F_j(x), \qquad x \in \Omega_1, \qquad j = 1,\dots,m. \tag{8}$$

Тут r – ціле число, $0 \le r \le 2b-1$; $\partial_r u$ – матриця розміру $p \times M(r)$, елементами якої є вектор-функція u та її похідні до порядку r; $F_0(x,z)$, $z = (z_{(0,\dots,0)}, z_{(1,0,\dots,0)}, \dots, z_\alpha, \dots)$, – визначена на $\Omega_0 \times M_{p\times M(r)}$ вектор-функція зі значеннями в $\mathbb{R}^p$, де $M_{p\times s}$ – клас матриць розміру $p \times s$ із дійсними коефіцієнтами.

Означимо такі простори (при $k \ge 0$):

$$M^p_{k,r}(\Omega_0) = \left\{ v \in W^r_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_0) : \|v\|_{k,r} = \sum_{|\gamma|\le r} \int_{\Omega_0} \rho^{k+|\gamma|}(x) \left| D^\gamma v(x) \right|_p dx < +\infty \right\},$$

$$M^p_{k,r}(\Omega_0, x_0) = \left\{ v \in W^r_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_0 \setminus x_0) : \|v\|_{k,r,x_0} = \right.$$

$$\left. = \sum_{|\gamma|\le r} \int_{\Omega_0} \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) \left| D^\gamma v(x) \right|_p dx < +\infty \right\},$$

де $W^r_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_0) = \{ v \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_0) : D^\gamma v \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_0)\ \forall |\gamma| \le r \}$.

Нехай спряжена до (1), (2) задача однозначно розв'язна і виконується одне з припущень:

$(\mathbf{Z})$: $\quad F_j \in Z'_{q_j}(\Omega_1),\ \ 1 \le q_j \le m,\ \ k > k'_0 + n - 1,\ \ k'_0 = \max\limits_{1\le j\le m} \{q_j - r_j - (j)\}$;

$(\mathbf{Z}, x_0)$: $\quad F_j \in Z'_{q_j}(\Omega_1, x_0), \quad x_0 \in \Omega_1, \quad 1 \le j \le m, \quad k \ge k'_0$.

Означення 2. За припущення $(\mathbf{Z})$ (відповідно $(\mathbf{Z}, x_0)$) розв'язком задачі (7), (8) назвемо узагальнену вектор-функцію $u \in M^p_{k,r}(\Omega_0)$ (відповідно $u \in M^p_{k,r}(\Omega_0, x_0)$), що задовольняє умову

$$\int_{\Omega_0} (A^*\psi)^\top \cdot u\, dx = \int_{\Omega_0} \psi^\top(x) F_0(x, \partial_r u(x))\, dx + \sum_{j=1}^m (C^*_j \psi, F_j)_1,$$

$$\forall \psi \in X_k(\overline{\Omega}_0) \qquad (\forall \psi \in X_k(\overline{\Omega}_0, x_0)).$$

Позначимо $g_j(x) = (G_j(x,\cdot), F_j(\cdot))_1$, $j = 1,\dots,m$, $g_0(x) = \sum\limits_{j=1}^m g_j(x)$, $x \in \Omega_0$.

Лема 2. *Якщо виконується припущення* $(\mathbf{Z})$ (*відповідно* $(\mathbf{Z}, x_0)$), *тоді* $g_0 \in M^p_{k,r}(\Omega_0)$ (*відповідно* $g_0 \in M^p_{k,r}(\Omega_0, x_0)$).

Д о в е д е н н я. Використовуємо структуру узагальнених функцій. У випадку $F_j \in Z'_{q_j}(\Omega_1, x_0)$, $j = 1,\dots,m$, за формулою (4) для довільної $\varphi \in Z_{q_j}(\Omega_1, x_0)$ маємо

$$\left| (\varphi, F_j)_1 \right| \le c_{kj} \max_{y\in\Omega_1} \max_{|\alpha|\le \ell_j} \frac{\left| D^\alpha \varphi(y) \right|_p}{1 + \rho^{q_j - |\alpha|}(y, x_0)},$$

де ℓ_j – деякі цілі невід'ємні числа (порядки сингулярностей F_j), $j = 1,\dots,m$.

Тоді

$$\int\limits_{\Omega_0} \rho^k(x,x_0)\left|g_j(x)\right|_p\, dx \le c_{kj} \max_{y\in\Omega_1}\max_{|\alpha|\le \ell_j} \int\limits_{\Omega_0} \frac{\rho^k(x,x_0)\left|D^\alpha G_j(x,y)\right|_p dx}{1+\rho^{q_j-|\alpha|}(y,x_0)},$$

$$j=1,\ldots,m.$$

Як у [13], використовуючи (6), знаходимо, що при $k \ge k_0'$

$$\int\limits_{\Omega_0} \rho^k(x,x_0)\left|g_j(x)\right|_p\, dx \le b_{kj} \max_{y\in\Omega_1} [1+\rho^{k+r_j+(j)-\ell_{0j}}(y,x_0)] < \infty,$$

де $\ell_{0j} = \min\{\ell_j, q_j\}$, $j=1,\ldots,m$.

За припущення $(\mathbf{Z})$, враховуючи оцінки (5), (6), знаходимо, що при $k \ge k_0' + n - 1$

$$\int\limits_{\Omega_0} \rho^k(x)\left|g_j(x)\right|_p\, dx \le c_{kj} \max_{y\in\Omega_1}\max_{|\alpha|\le \ell_j} [1+\rho^{k+r_j+1-n-2b-\ell_{0j}}(y)] < \infty,$$

$$j=1,\ldots,m.$$

Такі самі оцінки одержуємо для

$$\int\limits_{\Omega_0} \rho^{k+|\gamma|}(x)\left|D^\gamma g_j(x)\right|_p dx, \qquad |\gamma|\le r, \qquad j=1,\ldots,m. \qquad \blacklozenge$$

У просторах $M_{k,r}^p(\Omega_0)$ і $M_{k,r}^p(\Omega_0,x_0)$ розглянемо кулі

$$M_{k,r,C}^p(\Omega_0) = \left\{v\in M_{k,r}^p(\Omega_0) : \|v\|_{k,r} \le C\right\},$$

$$M_{k,r,C}^p(\Omega_0,x_0) = \left\{v\in M_{k,r}^p(\Omega_0,x_0) : \|v\|_{k,r,x_0} \le C\right\}.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення* $(\mathbf{Z})$ (*відповідно* $(\mathbf{Z},x_0)$), *існує додатна стала* K_0 *така, що для всіх* $C > K_0$ *і для всіх* $v,w \in M_{k,r,C}^p(\Omega_0)$ $(v,w\in M_{k,r,C}^p(\Omega_0,x_0))$ *справджуються оцінки*

$$\int\limits_{\Omega_0} \left|F_0(y,\partial_r v(y))\right|_p dy \le h(C),$$

$$\int\limits_{\Omega_0} \left|F_0(y,\partial_r v(y)) - F_0(y,\partial_r w(y))\right|_p dy \le h_C'\,\|v-w\|_{k,r}$$

$$\left(\int\limits_{\Omega_0} \left|F_0(y,\partial_r v(y)) - F_0(y,\partial_r w(y))\right|_p dy \le h_C'\,\|v-w\|_{k,r,x_0}\right),$$

де $h(z)$ *і* $h_C'(z)$, $z\in[0,+\infty)$, − *неперервні монотонно неспадні функції, додатні на* $(0,+\infty)$ *і такі, що* $\dfrac{h(z)}{z} \underset{z\to+\infty}{\to} 0$, $h_C'(0)=0$. *Тоді існує розв'язок* $u\in M_{k,r}^p(\Omega_0)$ ($u\in M_{k,r}^p(\Omega_0,x_0)$) *задачі* (7), (8).

Д о в е д е н н я. Згідно з лемою 2 $g_0 \in M_{k,\ell}^p(\Omega_0)$ за припущення $(\mathbf{Z})$ і $g_0 \in M_{k,\ell}^p(\Omega_0,x_0)$ за припущення $(\mathbf{Z},x_0)$. Як у [13], доводимо, що розв'язок у просторі $M_{k,r}^p(\Omega_0)$ (відповідно у $M_{k,r}^p(\Omega_0,x_0)$) системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$u = Hu + g_0,$$

де $(Hv)(x) = \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,y)F_0(y,\partial_r v(y))\,dy$, є розв'язком задачі (7), (8) за припущення $(\mathbf{Z})$ (відповідно $(\mathbf{Z},x_0)$).

На $M^p_{k,r,C}(\Omega_0)$ (відповідно $M^p_{k,r,C}(\Omega_0, x_0)$) означимо оператор $H_1 : H_1 v = = Hv + g_0$, $v \in M^p_{k,r,C}(\Omega_0)$ ($v \in M^p_{k,r,C}(\Omega_0, x_0)$). Можна показати [13], що за умов теореми оператор H_1 задовольняє умови принципу Шаудера. ♦

Теорема 3. *Нехай*

$$|F_0(x,z)|_p \le \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} |z_\gamma|_p^{\eta_s} + A, \qquad x \in \Omega_0, \qquad z \in M_{p\times M(r)},$$

$$|F_0(x,z^1) - F_0(x,z^2)|_p \le B \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{|\gamma|=s} |z^1_\gamma - z^2_\gamma|_p^{\eta_s}, \qquad x \in \Omega_0,$$

$$z^1, z^2 \in M_{p\times M(r)}, \qquad \eta_s \in (0,1), \qquad A_s, A, B \ge 0.$$

Тоді за припущення ($\mathbf{Z}$) *при*

$$k_0' + n - 1 < k' = \min_{s: A_s \ne 0, 0 \le s \le r} \left\{ -s - 1 + \frac{1}{\eta_s} \right\}, \qquad k_0' + n - 1 < k < k' \tag{9}$$

існує розв'язок задачі (7), (8) $u \in M^p_{k,r}(\Omega_0)$, *а за припущення* $(\mathbf{Z}, x_0)$ *при*

$$k_0' < k_1 = \min_{s: A_s \ne 0, 0 \le s \le r} \left\{ \frac{n}{\eta_s} - n - s \right\}, \qquad k_0' < k < k_1 \tag{10}$$

існує розв'язок задачі (7), (8) $u \in M^p_{k,r}(\Omega_0, x_0)$.

Д о в е д е н н я. Використовуючи нерівність Гельдера, покажемо, що функція F_0 задовольняє умови теореми 2. Справді, за припущення ($\mathbf{Z}$) за лемою 2 $g_0 \in M^p_{k,r,C}(\Omega_0)$ і

$$\int_{\Omega_0} |F_0(y, \partial_r v(y))|_p \, dy \le \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} \int_{\Omega_0} \rho^{-(k+s)\eta_s} [\rho^{k+s} |D^\gamma v|_p]^{\eta_s} \, dx + A|\Omega_0| \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{r} A_s d_{k,s} \cdot \|v\|_{k,r}^{\eta_s} + A|\Omega_0|,$$

де $|\Omega_0|$ – міра Ω_0, $d_{k,s} = \left[\int_{\Omega_0} \rho^{-(k+s)\eta_s/(1-\eta_s)}(x) \, dx \right]^{1-\eta_s}$. При $k < k'$ інтеграли $d_{k,s}$ збігаються, тому при $v \in M^p_{k,r,C}(\Omega_0)$ матимемо

$$\int_{\Omega_0} |F_0(y, \partial_r v(y))|_p \, dy \le \sum_{s=0}^{r} R_s \cdot C^{\eta_s} + A|\Omega_0|, \qquad R_s = A_s \cdot d_{k,s}.$$

При $\eta_s \in (0,1)$, $0 \le s \le r$, функція $h(t) = \sum_{s=0}^{r} R_s \cdot t^{\eta_s} + A|\Omega_0|$ задовольняє умови теореми 2.

Аналогічно за тих самих припущень показуємо виконання другої умови теореми 2 із функцією $h_C'(z) = B \sum_{s=0}^{r} d_{k,s} \cdot z^{\eta_s}$.

За припущення $(\mathbf{Z}, x_0)$ згідно з лемою 2 $g_0 \in M^p_{k,r,C}(\Omega_0, x_0)$, тоді одержуємо подібну оцінку, де замість $d_{k,s}$ є інтеграли

$$d_{k,s,x_0} = \left[\int_{\Omega_0} \rho^{-(k+s)\eta_s/(1-\eta_s)}(x, x_0) \, dx \right]^{1-\eta_s},$$

збіжні при $k < k_1$. ♦

Зауваження. При $\eta_s \in \left(0, \dfrac{1}{s+n-1-r_0}\right)$, $s = 0,\ldots,r$, де $r_0 = \min\limits_{1\le j\le m} r_j$, умова (9) може виконуватись для всіх $q_j \ge 0$, $j = 1,\ldots,m$, а при $\eta_s \in \in \left(0, \dfrac{1}{n+s}\right)$, $s = 0,\ldots,r$, – для $k_0' \ge 0$ (зокрема, для $q_j \ge r_j + 1$, $j = 1,\ldots,m$).

При $\eta_s \in \left(0, \dfrac{n}{n+s-r_0-1}\right)$, $s = 0,\ldots,r$, умова (10) може виконуватись для всіх $q_j \ge 0$, $j = 1,\ldots,m$, а при $\eta_s \in \left(0, \dfrac{n}{n+s}\right)$, $s = 0,\ldots,r$, – для $k_0' \ge 0$.

1. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 4. – С. 745–748.
2. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 5. – С. 3–32.
   Те саме: *Berezanskii Yu. M., Roitberg Ya. A.* A theorem on homeomorphisms and the Green's function for general elliptic boundary problems // Ukr. Math. J. – 1967. – **19**, No. 5. – P. 509–530.
3. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике – Москва: Наука, 1979. – 320 с.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
5. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 116–119.
   Те саме: *Gupalo A. S., Lopushanskaya G. P.* Representation of a solution of a generalized boundary problem for a system of differential equations, elliptic in the sense of Petrovskii // Ukr. Math. J. – 1985. – **37**, No. 1. – P. 102–105.
6. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
7. *Ковалевский А. А.* Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка // Изв. РАН. Сер. мат. – 2001. – **65**, № 2. – С. 27–80.
8. *Красовский Ю. П.* Дифференциальные свойства решений эллиптических граничных задач со степенными особенностями в правых частях // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 1. – С. 202–209.
9. *Красовский Ю. П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – **33**, № 1. – С. 109–137.
10. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.
11. *Лопушанська Г. П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. – Львів: Вид-во Львів. нац. ун-ту, 2002. – 285 с.
12. *Лопушанська Г. П.* Простори узагальнених функцій для еліптичних крайових задач // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 660. – С. 20–27.
13. *Лопушанська Г.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь // Укр. мат. вісник. – 2005. – **2**, № 3. – С. 377–394.
14. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Київ: НАН України, Ін-т математики, 2010. – 372 с.
15. *Ройтберг Я. А.* О разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений при наличии степенных особенностей в правых частях // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 3. – С. 412–417.
    Те саме: *Roitberg Ya. A.* Solvability of general boundary-value problems for elliptic equations with right-hand sides having power singularities // Ukr. Math. J. – 1968. – **20**, No. 3. – P. 358–362.
16. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем // Успехи мат. наук. – 1967. – **22**, № 5. – С. 181–182.

17. *Ali J., Shivaji R.* Positive solutions for a class of p-laplacian systems with multiple parameters // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **335**. – P. 1013–1019.
18. *Benilan Ph., Boccardo L., Gallouet T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L.* An L_1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1995. – **22**. – P. 241–273.
19. *Bidaut-Veron M., Yarur C.* Semilinear elliptic equations and systems with measure data: existence and a priori estimates // Adv. Differ. Equat. – 2002. – **7**. – P. 257–296.
20. *Boccardo L.* Some developments on Dirichlet problems with discontinuous coefficients // Boll. Unione Mat. Ital. – 2009. – (9) 2. – P. 285–297.
21. *Hai D. D.* Existence and uniqueness of solutions for quasilinear elliptic systems // Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – **133**, No. 1. – P. 223–228.
22. *Marcus M., Veron L.* Removable singularities and boundary traces // J. Math. Pures Appl. – 2001. – **80**, No. 1. – P. 879–900.
23. *Rakotoson J. M.* Generalized solutions in a new-type of sets for problems with measures as data // Differ. Integral Equat. – 1993. – **6**. – P. 27–36.
24. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. – XII + 415 p.
25. *Shishkov A., Veron L.* Diffusion versus absorption in semilinear elliptic equation // J. Math. Appl. – 2009. – **352**.– P. 206–217.
26. *Tribel H.* Theory of function spaces. III. – Basel: Birkhaser, 2006. – XII + 426 p.

**НОРМАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ВЕСОВЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

Установлена разрешимость в весовых пространствах обобщенных функций нормальных краевых задач для линейных эллиптических по Петровскому систем дифференциальных уравнений и найдены достаточные условия разрешимости таких задач для полулинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений с краевыми данными из весовых пространств обобщенных функций.

**NORMAL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR
SEMI-LINEAR ELLIPTIC SYSTEMS IN WEIGHT SPACES
OF GENERALIZED FUNCTIONS**

The solvability of normal linear boundary-value problems for linear Petrovskii elliptic systems of differential equations in weight spaces of generalized functions and the sufficient conditions of solvability of such problems for semi-linear elliptic systems of differential equations with boundary dates from weight spaces of generalized functions are obtained.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів
Одержано
10.01.11