УДК 514.764

К. М. Зубрілін

СПЛОЩУЮЧІ ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕОМОРФІЗМІВ ДОТИЧНИХ РОЗШАРУВАНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ІНДУКОВАНИХ ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНИМИ ДИФЕОМОРФІЗМАМИ БАЗ

Досліджено сплощуючі властивості дифеоморфізмів дотичних розшарувань другого порядку, які індукуються голоморфно-проективними дифеоморфізмами келерових просторів.

Вступ. На сьогодні геодезичні відображення (псевдо)ріманових просторів мають струнку і далеко просунуту теорію. Ведуться всесторонні дослідження різних узагальнень цієї теорії: вивчаються геодезичні відображення більш загальних просторів, таких як фінслерові простори, дотичні розшарування або відображення, близькі за змістом, такі як конциркулярні, голоморфно-проективні і т. п.

Відомі узагальнення геодезичних кривих різного характеру. Зокрема, R. C. Srivastava і K. D. Singh [23, 24] використовували для кривої поняття кривини Френе вищого порядку. П. К. Рашевський розглядав [15] сплощені криві довільного порядку в афіннозв'язних просторах, використовуючи поняття сплощення. T. Otsuki і Y. Tashiro [22] ввели поняття аналітично-планарної кривої в келеровому просторі.

На основі цих кривих були означені узагальнення геодезичних відображень (майже геодезичні відображення (Н. С. Синюков [16]), голоморфно-проективні відображення (Y. Tashiro [26]), конциркулярні перетворення (K. Yano [27]), p-геодезичні відображення (С. Г. Лейко [7, 9−11]), їх інфінітезимальні аналоги [25], а також групи вказаних перетворень [1, 17, 21]).

Топологія і диференціальна геометрія розшарувань знайшли широке застосування в геометрії і топології многовидів [2, 6, 18]. У працях K. Yano, S. Ishihara [28, 29] систематично вивчаються ліфти диференціально-геометричних структур із базисного многовиду в дотичне розшарування. У цій роботі суттєво використовуємо теорію таких ліфтів.

Теорія відображень дотичних розшарувань займає важливе місце в геометрії многовидів. Геодезичні відображення дотичних розшарувань досліджувалися в [12, 13], голоморфно-проективні перетворення в дотичному розшаруванні − у [19], тривіальні інфінітезимальні геодезичні перетворення − у [14].

Індуковані відображення започатковані в роботах [28, 29]. При дослідженні відображення, індукованого геодезичним, ними встановлено, що індуковане відображення є геодезичним тоді й тільки тоді, коли базисне відображення є афінним. У загальному випадку геометрична природа індукованого відображення ними не встановлена. У роботах С. Г. Лейка вона висвітлена в рамках теорії p-геодезичних відображень. У цьому напрямку проведено низку досліджень. Вивчено сплощуючі властивості дифеоморфізмів дотичних розшарувань першого і другого порядків, наділених повними ліфтами афінних зв'язностей на базах, що індукуються геодезичними (проективними) дифеоморфізмами базисних многовидів [7] і групи Лі таких перетворень [9]; вивчено сплощуючі властивості перетворень дотичного розшарування першого порядку, наділеного повним ліфтом афінної зв'язності, які індуковані конциркулярними перетвореннями баз [10]. Крім того, вивчено: на дотичному розшаруванні зі зв'язністю горизонтального ліфта сплощуючі властивості дифеоморфізмів, що індукуються геодезичними дифеоморфізмами [4]; на дотичному розшаруванні другого порядку зі зв'язністю повного ліфта (II-ліфта) сплощуючі властивості перетворень, що індукуються конциркулярними перетвореннями [5]; на дотичному розшаруванні зі зв'язністю повного ліфта сплощуючі властивості дифеоморфізмів, що індукуються голоморфно-проективними дифеоморфізмами [3].

У цій роботі продовжено дослідження в цьому напрямку. Вивчаються сплощуючі властивості (щодо зв'язності II-ліфта) дифеоморфізмів дотичного розшарування другого порядку, індукованих голоморфно-проективними дифеоморфізмами келерових просторів.

1. Елементи теорії сплощуючих відображень. Візьмемо в n-вимірному диференційовному многовиді M з афінною зв'язністю ∇ гладку криву $\mathcal{C}$, віднесену до параметра t. Розглянемо векторні поля кривин кривої $\mathcal{C}$. Нехай ξ − поле дотичних векторів уздовж кривої $\mathcal{C}$. Поле ξ_1 векторів першої кривини кривої $\mathcal{C}$ визначається правилом $\xi_1 = \nabla_t \xi$. Якщо поле ξ_{q-1} $(q-1)$-ї кривини кривої $\mathcal{C}$ вже визначене, то поле ξ_q векторів q-ї кривини визначається рівністю $\xi_q = \nabla_t \xi_{q-1}$.

Означення 1. Кажуть, що *крива* $\mathcal{C}$ у точці x *має сплощення* q-го порядку, якщо в точці x вектори ξ, ξ_1, …, ξ_{q-1} лінійно незалежні, а вектори ξ, ξ_1, …, ξ_{q-1}, ξ_q є лінійно залежними.

Криву, яка в кожній своїй точці має сплощення p-го порядку, називають *p-геодезичною кривою.*

Враховуючи властивості зовнішнього добутку, одержимо, що точка x кривої $\mathcal{C}$ має сплощення p-го порядку тоді й тільки тоді, коли в точці x виконуються умови

$$\xi \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{p-1} \neq 0, \qquad \xi \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{p-1} \wedge \xi_p = 0. \tag{1}$$

Отже, щоб крива $\mathcal{C}$ була p-геодезичною, необхідно та достатньо виконання умов (1) уздовж кривої $\mathcal{C}$.

Означення 2. Точку x кривої $\mathcal{C}$ називають *межовою точкою сплощення*, якщо в кожному околі точки x існує хоча б одна точка кривої $\mathcal{C}$, у якій порядок сплощення відрізняється від порядку сплощення в точці x.

Дугою кривої $\mathcal{C}$ з параметризацією $\gamma : (a,b) \to M$ будемо називати частину $\mathcal{D}$ кривої $\mathcal{C}$, що параметризується звуженням γ на деякий інтервал $(\alpha,\beta) \subset \subset (a,b)$. Якщо кінці α і/або β належать області параметрів (a,b), то точки $\gamma(\alpha)$ і/або $\gamma(\beta)$ будемо називати *кінцями дуги* $\mathcal{D}$.

Нехай уздовж кривої $\mathcal{C}$ з параметризацією $\gamma : (a,b) \to M$ задано цілочислову невід'ємну обмежену функцію $\mathfrak{m} : (a,b) \to \mathbb{Z}$. Точку $\gamma(t)$, $t \in (a,b)$, кривої $\mathcal{C}$ будемо називати *$\mathfrak{m}$-граничною*, якщо в будь-якому околі цієї точки є точка $\gamma(\tau)$, відмінна від $\gamma(t)$, у якій $\mathfrak{m}(\tau) \neq \mathfrak{m}(t)$.

Лема 1. *Крива $\mathcal{C}$, уздовж якої задано цілочислову невід'ємну обмежену функцію $\mathfrak{m}$, складається з $\mathfrak{m}$-граничних точок і попарно неперетинних дуг, на яких функція $\mathfrak{m}$ є сталою. При цьому, якщо кінці дуг лежать на кривій, вони є $\mathfrak{m}$-граничними точками.*

Доведення. Нехай $\gamma : (a,b) \to M$ − параметризація кривої $\mathcal{C}$. На інтервалі (a,b) означимо бінарне відношення $\mathcal{R}$ у такий спосіб. Для довільних елементів $t, t' \in (a,b)$ $t\mathcal{R}t'$ тоді й тільки тоді, коли або $t = t'$, або знайдеться такий інтервал $I = (\alpha,\beta) \subset (a,b)$, на якому функція $\mathfrak{m}$ є сталою і якому належать точки t, t'. Із цього означення випливає, що бінарне відношення $\mathcal{R}$ є рефлексивним, симетричним і транзитивним. Отже, відношення $\mathcal{R}$ є відношенням еквівалентності в множині (a,b). Це відношення еквівалентності визначає розбиття множини (a,b) на класи еквівалентності за $\mathcal{R}$.

Покажемо, що кожний клас K еквівалентності за $\mathcal{R}$ є або одноточковою множиною, або інтервалом, на якому функція $\mathfrak{m}$ є сталою. Дійсно, якщо K не є одноточковою множиною, то нехай довільне $s \in K$. Знайдеться таке $s' \in K$, що $s \neq s'$. Оскільки правильним є $s\mathcal{R}s'$, то існує такий інтервал $I \subset (a,b)$, на якому функція $\mathfrak{m}$ є сталою і $s, s' \in I$. Отже, $\inf K < s < \sup K$. Навпаки, для довільного $s \in (\inf K, \sup K)$ знайдуться такі $s_1, s_2 \in K$, що $\inf K \le s_1 < s < s_2 \le \sup K$.

Оскільки $s_1 \mathcal{R} s_2$ і $s_1 \neq s_2$, то знайдеться такий інтервал $J \subset (a,b)$, на якому функція $\mathfrak{m}$ стала і $s_1, s_2 \in J$, а отже, $s \in J \subset K$. Тому $(\inf K, \sup K) = K$. Те, що функція $\mathfrak{m}$ є сталою на K, випливає з означення відношення $\mathcal{R}$.

Тепер припустимо, що $t^* = \inf K \in (a,b)$, тобто $\gamma(t^*)$ − лівий кінець дуги γ_K. Тоді знайдеться такий клас еквівалентності K', що $t^* \in K'$. Якщо $\{t^*\} \neq K'$, то, згідно з доведеним, K' є інтервалом, а, значить, $K \bigcap K' \neq \varnothing$, що неможливо. Отже, $\{t^*\} = K'$. Випадок $\sup K \in (a,b)$ розглядається аналогічно.

Покажемо, що кожний одноточковий клас еквівалентності $K = \{t^*\}$ визначає $\mathfrak{m}$-граничну точку $\gamma(t^*)$ кривої $\mathcal{C}$. Припустимо протилежне. Тоді знайдеться інтервал $I \subset (a,b)$, який містить точку t^*, такий, що функція $\mathfrak{m}$ є сталою на I. Звідси отримуємо, що $I \subset K = \{t^*\}$, а це неможливо. Отримана суперечність і доводить необхідне. Лему доведено. ♦

Зауваження 1. *Нехай функція $\mathfrak{m}$ з леми 1 задовольняє умову: для будь-якої точки $t \in (a,b)$ існує такий інтервал $t \in I \subset (a,b)$, що $\mathfrak{m}(t) \le \mathfrak{m}(s)$ для довільного $s \in I$. Тоді знайдеться принаймні одна дуга, на якій функція $\mathfrak{m}$ є сталою і приймає найбільше значення $\max\limits_{t\in(a,b)} \mathfrak{m}(t)$.*

Нехай $p = \max\limits_{t\in(a,b)} \mathfrak{m}(t)$ і t_0 − така довільна точка, що $p = \mathfrak{m}(t_0)$. Згідно з припущенням, знайдеться такий інтервал $I \subset (a,b)$, що для всіх $t \in I$ справджується $p = \mathfrak{m}(t)$. Виходить, якщо K_0 − клас еквівалентності, що містить точку t_0, то $I \subset K_0$, і дуга γ_{K_0} є шуканою.

Твердженням наступної теореми встановлюємо будову довільної гладкої кривої.

Теорема 1. *Довільна гладка крива $\mathcal{C}$ в M складається з межових точок сплощення і попарно неперетинних дуг, що є q-геодезичними кривими (q залежить від дуги), кінці яких, що лежать на кривій $\mathcal{C}$, є межовими точками сплощення. Серед цих дуг є принаймні одна, для якої q − найбільший з порядків сплощення точок даної кривої $\mathcal{C}$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\gamma : (a,b) \to M$ − параметризація кривої $\mathcal{C}$ в M. Для кожного $t \in (a,b)$ порядок сплощення кривої $\mathcal{C}$ у точці $\gamma(t)$ позначимо через q_t. Очевидно, що $(t \to q_t)$-граничні точки є межовими точками сплощення. З іншого боку, нехай $t_0 \in (a,b)$ − довільна точка і $p = q_{t_0}$. Вектори ξ_x, ξ_{1x}, …, $\xi_{p-1\,x}$ у точці $x=\gamma(t_0)$ за означенням є лінійно незалежні: $\xi_x \wedge \xi_{1x} \wedge \ldots \wedge \xi_{p-1x} \neq 0$. Оскільки функція $t \to \xi_{\gamma(t)} \wedge \xi_{1\gamma(t)} \wedge \ldots \wedge \xi_{p-1\gamma(t)}$ неперервна, то знайдеться такий інтервал I, що для будь-яких $t \in I$ вектори $\xi_{\gamma(t)}, \xi_{1\gamma(t)}, \ldots, \xi_{p-1\gamma(t)}$ лінійно незалежні. За означенням точки сплощення, $q_t \ge p$ для всіх $t \in I$. Отже, твердження теореми отримуємо з леми 1 і зауваження 1. Теорему доведено. ♦

Означення 3. Дифеоморфізм $\mu : M \to \bar{M}$ двох афіннозв'язних просторів (M,∇) і $(\bar{M},\bar{\nabla})$ називають *p-геодезичним*, якщо при цьому дифеоморфізмі всі геодезичні криві першого простору переходять у криві другого простору, у точках яких найбільший з порядків сплощення дорівнює p.

p-геодезичний дифеоморфізм $\rho : M \to M$ афіннозв'язного простору (M,∇) на себе називають *p-геодезичним перетворенням* афіннозв'язного простору (M,∇).

Із цього означення і теореми 1 випливає, що геометрично p-геодезичні дифеоморфізми характеризуються тим, що вони перетворюють геодезичні криві у криві, які на окремих дугах є q-геодезичними кривими, причому $q \le p$.

Святославом Григоровичем Лейком встановлено диференціальні рівняння, що описують p-геодезичні дифеоморфізми. Нехай $\bar{u}^h = \bar{u}^h(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ − локальне зображення дифеоморфізму $\mu : M \to \bar{M}$. Для того щоб дифеоморфізм μ був p-геодезичним, необхідно та достатньо, щоб у загальній за цим дифеоморфізмом локальній системі координат виконувалися умови

$$\delta^{[h}_{(i} P^{h_1}_{i_1 i_2} \ldots P^{h_p]}_{j_1 \cdots j_{p+1})} = 0, \qquad \delta^{[h}_{(i} P^{h_1}_{i_1 i_2} \ldots P^{h_{p-1}]}_{j_1 \cdots j_p)} \neq 0\,, \tag{2}$$

де $\tilde{\nabla}$ − змішана коваріантна похідна у сенсі ван дер Вардена − Бортолоті щодо зв'язностей ∇ і $\bar{\nabla}$; $P^h_{ij} = \tilde{\nabla}_i \delta^h_j = \bar{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij}, \ldots, P^h_{j_1 \cdots j_q j_{q+1}} = \tilde{\nabla}_{(j_{q+1}} P^h_{j_1 \cdots j_q)}$. Співвідношення (2) називають основними рівняннями p-геодезичного дифеоморфізму.

Для вивчення сплощуючих властивостей дифеоморфізмів скористаємося способом [3−5], який базується на використанні захвата (або, що те саме, − прообразу) афінної зв'язності. Він дозволяє уникнути застосування апарату змішаних тензорів і змішаної коваріантної похідної ван дер Вардена − Бортолоті і при цьому використовувати рівності в інваріантній формі.

Дослідження порядків сплощення точок кривої-образа $\bar{C}$ у многовиді $\bar{M}$ з афінною зв'язністю $\bar{\nabla}$ зводиться до вивчення порядків сплощення відповідних точок геодезичної кривої C у многовиді M щодо захвата афінної зв'язності $\bar{\nabla}$ оберненим дифеоморфізмом.

Означення 4. Афінну зв'язність $\tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ на многовиді M, означену правилом $\tilde{\nabla}_X Y = (\mu^{-1})_* (\bar{\nabla}_{(\mu_* X)} (\mu_* Y))$ для довільних векторних полів $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, називають *захватом афінної зв'язності* $\bar{\nabla}$ дифеоморфізмом μ^{-1} або *прообразом* афінної зв'язності $\bar{\nabla}$ щодо дифеоморфізму μ.

Неважко показати, що правило $P(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ визначає тензорне поле $P \in \mathfrak{T}^1_2(M)$, де X і Y − довільні гладкі векторні поля на M. Тензорне поле P тісно пов'язане з поняттям тензора афінної деформації H дифеоморфізму $\mu : M \to \bar{M}$ афіннозв'язних просторів (див. приклад 6 з [8, с. 153]). Цей зв'язок виражається рівністю $H(X,Y)_p = \mu_*(P(X,Y))_{\mu(p)}$ для будь-яких векторних полів X і Y на многовиді M і довільної точки $p \in M$. Тому тензорне поле P також будемо називати *тензором афінної деформації дифеоморфізму* μ.

Нехай уздовж кривої C задано векторне поле χ. Тоді вираз для коваріантної похідної $\tilde{\nabla}_\gamma \chi$ набуде вигляду

$$\tilde{\nabla}_\gamma \chi = \nabla_\gamma \chi + P(\xi, \chi)\,. \tag{3}$$

Звідси вже можна знаходити вектори $\tilde{\xi}_q$ кривин уздовж кривої C щодо зв'язності $\tilde{\nabla}$.

Теорема 2. *Нехай у многовиді M з афінною зв'язністю ∇ задано геодезичну криву C і ξ − поле дотичних векторів до кривої C. Тоді для поля $\tilde{\xi}_q$ векторів q-ї кривини кривої C щодо захвата $\tilde{\nabla}$ має місце рівність*

$$\tilde{\xi}_q = P_q(\xi, \ldots, \xi)\,,$$

де тензорне поле $P_q \in \mathfrak{T}^1_{q+1}(M)$ визначається рекурентно:

$$P_q = \nabla P_{q-1} + P \circ (\delta \otimes P_{q-1}), \qquad P_1 = P\,.$$

Д о в е д е н н я проведемо методом індукції за q. Нехай $\gamma : (\alpha, \beta) \to M$ − параметризація геодезичної кривої C. При $q = 1$ поле $\tilde{\xi}_1$ векторів 1-ї кривини кривої C щодо захвата $\tilde{\nabla}$ має вигляд

$$\tilde{\xi}_1 = \tilde{\nabla}_\gamma \xi = \nabla_\gamma \xi + P(\xi, \xi) = P(\xi, \xi)\,,$$

оскільки $\nabla_\gamma \xi = 0$, тому що крива C є геодезичною відносно ∇. Припустимо, що твердження справджується для $q-1$, тобто вже знайдено тензорне поле $P_{q-1} \in \mathfrak{T}_q^1(M)$ таке, що $\tilde{\xi}_{q-1} = P_{q-1}(\xi,\ldots,\xi)$. Тоді

$$\tilde{\xi}_q = \tilde{\nabla}_\gamma \tilde{\xi}_{q-1} = \nabla_\gamma \tilde{\xi}_{q-1} + P(\xi, \tilde{\xi}_{q-1}) = \nabla_\gamma (P_{q-1}(\xi,\ldots,\xi)) + P(\xi, P_{q-1}(\xi,\ldots,\xi)) =$$
$$= (\nabla P_{q-1})(\xi,\ldots,\xi,\xi) + P_{q-1}(\nabla_\gamma \xi,\ldots,\xi) + \ldots + P_{q-1}(\xi,\ldots,\nabla_\gamma \xi) +$$
$$+ P(\xi, P_{q-1}(\xi,\ldots,\xi)) = (\nabla P_{q-1})(\xi,\ldots,\xi,\xi) + P(\xi, P_{q-1}(\xi,\ldots,\xi)).$$

Теорему доведено. ♦

2. Голоморфно-проективні дифеоморфізми.

Означення 5. *Структурою келерового простору* на многовиді M називають пару (g,F), яка складається з метричного тензора g на M і афінора F на M, що задовольняє такі умови:

1°) виконується рівність

$$F^2 = \varepsilon\delta,$$

де δ – одиничний афінор на M і $\varepsilon = \pm 1$;

2°) для будь-яких векторних полів $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ виконується рівність

$$g(X, F(Y)) + g(F(X), Y) = 0;$$

3°) виконується рівність $\nabla F = 0$, де ∇ – афінна зв'язність метричного тензора g.

Многовид M з фіксованою структурою келерового простору (g,F) називають *келеровим простором.* Очевидно, що (M,g) є рімановим простором. При $\varepsilon = -1$ келерів простір називають *еліптичним*, а при $\varepsilon = 1$ – *гіперболічним.*

Означення 6. Криву C келерового простору (M,g,F) називають *аналітично-планарною* [22], якщо при паралельному перенесенні дотичного вектора вздовж цієї кривої він лежить у двовимірній площинці, утвореній цим вектором і вектором дії афінора F на нього.

Сплощуючі властивості аналітично-планарної кривої встановлює така

Лема 2. *Візьмемо в келеровому просторі M аналітично-планарну криву C, віднесену до параметра t, що описується рівнянням*

$$\nabla_t \xi = a\xi + b\bar{\xi},$$

де ξ – поле дотичних векторів кривої C, $\bar{\xi} = F(\xi)$ – поле векторів дії афінора F на дотичні вектори, a, b – гладкі функції, задані вздовж кривої C.

Тоді в тих точках кривої C, де $b(t) \neq 0$, крива має сплощення 2-го порядку, а в тих точках, де $b(t) = 0$, крива має сплощення 1-го порядку.

Доведення. Знайдемо вектори кривин аналітично-планарної кривої. Поле першої кривини $\xi_1 = \nabla_t \xi = a\xi + b\bar{\xi}$. Ввівши позначення $a_1 = \nabla_t a + a^2 + \varepsilon b^2$, $b_1 = \nabla_t b + 2ab$, маємо поле другої кривини $\xi_2 = a_1\xi + b_1\bar{\xi}$. Звідси знаходимо

$$\xi \wedge \xi_1 = b\xi \wedge \bar{\xi}, \qquad \xi \wedge \xi_1 \wedge \xi_2 = 0. \tag{4}$$

З рівності (4) випливає висновок леми. Лему доведено. ♦

Означення 7. Дифеоморфізм $\mu : M \to \bar{M}$ келерового простору (M,g,F) на келерів простір $(\bar{M},\bar{g},\bar{F})$ називають *голоморфно-проективним*, якщо всі аналітично-планарні криві простору M переходять в аналітично-планарні криві простору $\bar{M}$.

У [16, 26] встановлено необхідні та достатні умови голоморфно-проективного дифеоморфізму келерових просторів: у загальній за дифеоморфізмом системі координат (у відповідних точках) повинні виконуватись умови

$$\bar{F}_i^h \equiv F_i^h, \qquad \bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \beta_i\delta_j^h + \beta_j\delta_i^h + \varepsilon\beta_{\bar{i}}\delta_{\bar{j}}^h + \varepsilon\beta_{\bar{j}}\delta_{\bar{i}}^h, \tag{5}$$

де β – деякий ковектор на M; $\beta_{\bar{i}} = \beta_\alpha F_i^\alpha$, $\delta_{\bar{i}}^h = F_i^h$; Γ_{ij}^h ($\bar{\Gamma}_{ij}^h$) – компоненти зв'язності Леві – Чівіта ∇ ($\bar{\nabla}$), що відповідають метриці g ($\bar{g}$).

Нехай $\tilde{\nabla}$ – захват афінної зв'язності $\bar{\nabla}$ оберненим дифеоморфізмом μ^{-1} (див. [8]). Тоді із рівності (5) одержимо тензор афінної деформації P голоморфно-проективного дифеоморфізму $\mu : M \to \bar{M}$:

$$P(X,Y) = \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X), \qquad (6)$$

де $\bar{\beta} = \beta \circ F$; X і Y – довільні векторні поля на M .

3. Дифеоморфізми, індуковані голоморфно-проективними дифеоморфізмами. Наступні пропозиції, які можна отримати із властивостей ліфтів прямим обчисленням, використаємо в подальшому для знаходження виразів компонент ліфтів тензорів з $\mathfrak{T}_3^0(M)$.

Пропозиція 1. *Нехай R , T і S – тензорні поля на многовиді M . Тоді справджуються рівності*

$$(R \otimes S \otimes T)^0 = R^0 \otimes S^0 \otimes T^0,$$
$$(R \otimes S \otimes T)^{\mathrm{I}} = R^{\mathrm{I}} \otimes S^0 \otimes T^0 + R^0 \otimes S^{\mathrm{I}} \otimes T^0 + R^0 \otimes S^0 \otimes T^{\mathrm{I}},$$
$$(R \otimes S \otimes T)^{\mathrm{II}} = R^{\mathrm{II}} \otimes S^0 \otimes T^0 + R^0 \otimes S^{\mathrm{II}} \otimes T^0 + R^0 \otimes S^0 \otimes T^{\mathrm{II}} +$$
$$+ 2R^{\mathrm{I}} \otimes S^{\mathrm{I}} \otimes T^0 + 2R^0 \otimes S^{\mathrm{I}} \otimes T^{\mathrm{I}} + 2R^{\mathrm{I}} \otimes S^0 \otimes T^{\mathrm{I}}.$$

Пропозиція 2. *Нехай тензорне поле $R \in \mathfrak{T}_3^0(M)$ має компоненти R_{ijk} у координатному околі $(U; u^h)$. Тоді в індукованому координатному околі $(\pi^{-1}(U); x^h, y^h, z^h)$ вирази для ліфтів мають такий вигляд*:

$$R^0 = (R_{ijk})^0 \cdot dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k,$$
$$R^{\mathrm{I}} = (R_{ijk})^{\mathrm{I}} \cdot dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k + (R_{ijk})^0 \cdot dy^i \otimes dx^j \otimes dx^k +$$
$$+ (R_{ijk})^0 \cdot dx^i \otimes dy^j \otimes dx^k + (R_{ijk})^0 \cdot dx^i \otimes dx^j \otimes dy^k,$$
$$R^{\mathrm{II}} = (R_{ijk})^{\mathrm{II}} \cdot dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k + 2(R_{ijk})^{\mathrm{I}} \cdot (dy^i \otimes dx^j \otimes dx^k +$$
$$+ dx^i \otimes dy^j \otimes dx^k + dx^i \otimes dx^j \otimes dy^k) +$$
$$+ (R_{ijk})^0 \cdot (dz^i \otimes dx^j \otimes dx^k + dx^i \otimes dz^j \otimes dx^k +$$
$$+ dx^i \otimes dx^j \otimes dz^k) + 2(R_{ijk})^0 \cdot (dy^i \otimes dy^j \otimes dx^k +$$
$$+ dx^i \otimes dy^j \otimes dy^k + dy^i \otimes dx^j \otimes dy^k).$$

Зауваження 2. *Якщо кульові координати дорівнюють нулеві, тобто $y^h = 0$ і $z^h = 0$ для всіх $h = 1, \ldots, n$, то вирази для ліфтів спрощуються:*

$$R^{\mathrm{I}} = (R_{ijk})^0 \cdot dy^i \otimes dx^j \otimes dx^k + (R_{ijk})^0 \cdot dx^i \otimes dy^j \otimes dx^k +$$
$$+ (R_{ijk})^0 \cdot dx^i \otimes dx^j \otimes dy^k,$$
$$R^{\mathrm{II}} = (R_{ijk})^0 \cdot (dz^i \otimes dx^j \otimes dx^k + dx^i \otimes dz^j \otimes dx^k + dx^i \otimes dx^j \otimes dz^k) +$$
$$+ 2(R_{ijk})^0 \cdot (dy^i \otimes dy^j \otimes dx^k + dx^i \otimes dy^j \otimes dy^k +$$
$$+ dy^i \otimes dx^j \otimes dy^k).$$

Усюди далі для довільного тензорного поля R символом $S(R)$ будемо позначати симетрування з діленням.

Наступна лема виражає певну властивість симетрування, що використовується надалі.

Лема 3. *Для довільних тензорних полів $T \in \mathfrak{T}_r^0(M)$ і $P \in \mathfrak{T}_s^0(M)$, заданих на многовиді M, правильною є рівність*

$$S(T \otimes P) = S(S(T) \otimes P) = S(T \otimes S(P)).$$

Д о в е д е н н я. Згідно з означенням симетрування з діленням, одержимо

$$S(S(T)\otimes P)(X_1,\dots,X_r,X_{r+1},\dots,X_{r+s})=\frac{1}{r!}\frac{1}{(r+s)!}\times$$
$$\times\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_{r+s}}T(X_{\rho(\bar\sigma(1))},\dots,X_{\rho(\bar\sigma(1))})\cdot P(X_{\rho(\bar\sigma(r+1))},\dots,X_{\rho(\bar\sigma(r+s))})=$$
$$=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\frac{1}{(r+s)!}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_{r+s}}T(X_{\rho(1)},\dots,X_{\rho(r)})\cdot P(X_{\rho(r+1)},\dots,X_{\rho(r+s)})=$$
$$=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}S(T\otimes P)(X_1,\dots,X_r,X_{r+1},\dots,X_{r+s})=$$
$$=S(T\otimes P)(X_1,\dots,X_r,X_{r+1},\dots,X_{r+s}),$$
що завершує доведення леми. ♦

Для знаходження векторів кривин нам знадобиться така

Лема 4. *Нехай уздовж геодезичної кривої* $\mathcal{C}$, *віднесеної до канонічного параметра* t, *задане векторне поле* χ *вигляду*
$$\chi=a\cdot\delta(\xi)+b\cdot\delta^{\mathrm{I}}(\xi)+c\cdot\delta^0(\xi)+d\cdot F^{\mathrm{II}}(\xi)+e\cdot F^{\mathrm{I}}(\xi)+f\cdot F^0(\xi),$$
де ξ *– поле дотичних векторів до кривої* $\mathcal{C}$, *і функції* a, b, c, d, e, f *визначаються за правилом: існують тензорні поля* $R,\bar R\in\mathfrak{T}_r^0(M)$ *такі, що*
$$a=2R^0(\xi,\dots,\xi),\qquad b=4R^{\mathrm{I}}(\xi,\dots,\xi),\qquad c=2R^{\mathrm{II}}(\xi,\dots,\xi),$$
$$d=2\varepsilon\bar R^0(\xi,\dots,\xi),\qquad e=4\varepsilon\bar R^{\mathrm{I}}(\xi,\dots,\xi),\qquad f=2\varepsilon\bar R^{\mathrm{II}}(\xi,\dots,\xi).$$
Тоді коваріантна похідна $\tilde\nabla_t^{\mathrm{II}}\chi$ *має вигляд*
$$\tilde\nabla_t^{\mathrm{II}}\chi=a'\cdot\delta(\xi)+b'\cdot\delta^I(\xi)+c'\cdot\delta^0(\xi)+d'\cdot F^{\mathrm{II}}(\xi)+e'\cdot F^{\mathrm{I}}(\xi)+f'\cdot F^0(\xi),$$
де функції a', b', c', d', e', f' *визначаються за правилом*
$$a'=2R'^0(\xi,\dots,\xi),\qquad b'=4R'^{\mathrm{I}}(\xi,\dots,\xi),\qquad c'=2R'^{\mathrm{II}}(\xi,\dots,\xi),$$
$$d'=2\varepsilon\bar R'^0(\xi,\dots,\xi),\qquad e'=4\varepsilon\bar R'^{\mathrm{I}}(\xi,\dots,\xi),\qquad f'=2\varepsilon\bar R'^{\mathrm{II}}(\xi,\dots,\xi),$$
а тензорні поля $R',\bar R'\in\mathfrak{T}_{r+1}^0(M)$ *мають вигляд*
$$R'=\nabla R+2R\otimes\beta+2\varepsilon\bar R\otimes\bar\beta,\qquad \bar R'=\nabla\bar R+2\bar R\otimes\beta+2R\otimes\bar\beta.$$

Доведення. Відповідно до теореми 5 з [5] II-ліфт тензора афінної деформації дифеоморфізму базисних многовидів співпадає з тензором афінної деформації індукованого дифеоморфізму. Тоді, беручи II-ліфт P^{II} від тензора (6), одержимо тензор $\tilde P$ афінної деформації індукованого дифеоморфізму μ_*:
$$\tilde P=\beta^{\mathrm{II}}\otimes\delta^0+2\beta^{\mathrm{I}}\otimes\delta^{\mathrm{I}}+\beta^0\otimes\delta+\beta^{\mathrm{II}}\otimes\delta^0+2\beta^{\mathrm{I}}\otimes\delta^{\mathrm{I}}+\beta^0\otimes\delta+\varepsilon\bar\beta^{\mathrm{II}}\otimes F^0+$$
$$+2\varepsilon\bar\beta^{\mathrm{I}}\otimes F^{\mathrm{I}}+\varepsilon\bar\beta^0(\xi)F^{\mathrm{II}}(\chi)+\varepsilon\bar\beta^{\mathrm{II}}\otimes F^0+2\varepsilon\bar\beta^{\mathrm{I}}\otimes F^{\mathrm{I}}+\varepsilon\bar\beta^0\otimes F^{\mathrm{II}}.\quad(7)$$
Тоді рівність (3) набуде вигляду
$$\tilde\nabla_t^{\mathrm{II}}\chi=\nabla_t^{\mathrm{II}}\chi+\tilde P(\xi,\chi),$$
де
$$\tilde P(\xi,\chi)=\beta^{\mathrm{II}}(\xi)\delta^0(\chi)+2\beta^{\mathrm{I}}(\xi)\delta^{\mathrm{I}}(\chi)+\beta^0(\xi)\delta(\chi)+\beta^{\mathrm{II}}(\chi)\delta^0(\xi)+2\beta^{\mathrm{I}}(\chi)\delta^{\mathrm{I}}(\xi)+$$
$$+\beta^0(\chi)\delta(\xi)+\varepsilon\bar\beta^{\mathrm{II}}(\xi)F^0(\chi)+2\varepsilon\bar\beta^{\mathrm{I}}(\xi)F^{\mathrm{I}}(\chi)+\varepsilon\bar\beta^0(\xi)F^{\mathrm{II}}(\chi)+$$
$$+\varepsilon\bar\beta^{\mathrm{II}}(\chi)F^0(\xi)+2\varepsilon\bar\beta^{\mathrm{I}}(\chi)F^{\mathrm{I}}(\xi)+\varepsilon\bar\beta^0(\chi)F^{\mathrm{II}}(\xi).\quad(8)$$
Оскільки геодезична крива $\mathcal{C}$ віднесена до канонічного параметра t, то
$$\nabla_t^{\mathrm{II}}\chi=\nabla_t^{\mathrm{II}}a\cdot\delta(\xi)+\nabla_t^{\mathrm{II}}b\cdot\delta^{\mathrm{I}}(\xi)+\nabla_t^{\mathrm{II}}c\cdot\delta^0(\xi)+$$
$$+\nabla_t^{\mathrm{II}}d\cdot F^{\mathrm{II}}(\xi)+\nabla_t^{\mathrm{II}}e\cdot F^{\mathrm{I}}(\xi)+\nabla_t^{\mathrm{II}}f\cdot F^0(\xi).$$
Підставляючи χ, отримаємо наступні вирази:
$$\delta^0(\chi)=a\cdot\delta^0(\xi)+d\cdot F^0(\xi),\quad(9)$$
$$\delta^{\mathrm{I}}(\chi)=a\cdot\delta^{\mathrm{I}}(\xi)+\frac{1}{2}b\cdot\delta^{\mathrm{I}}(\xi)+d\cdot F^{\mathrm{I}}(\xi)+\frac{1}{2}e\cdot F^0(\xi),\quad(10)$$
$$\delta(\chi)=a\cdot\delta(\xi)+b\cdot\delta^{\mathrm{I}}(\xi)+c\cdot\delta^0(\xi)+d\cdot F^{\mathrm{II}}(\xi)+e\cdot F^{\mathrm{I}}(\xi)+f\cdot F^0(\xi),$$

$$\beta^0(\chi) = a \cdot \beta^0(\xi) + d \cdot \overline{\beta}^0(\xi), \tag{11}$$

$$\beta^{\mathrm{I}}(\chi) = a \cdot \beta^{\mathrm{I}}(\xi) + \frac{1}{2} b \cdot \beta^0(\xi) + d \cdot \overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) + \frac{1}{2} e \cdot \overline{\beta}^0(\xi), \tag{12}$$

$$\beta^{\mathrm{II}}(\chi) = a \cdot \beta^{\mathrm{II}}(\xi) + b \cdot \beta^{\mathrm{I}}(\xi) + c \cdot \beta^0(\xi) + d \cdot \overline{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) + e \cdot \overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) + f \cdot \overline{\beta}^0(\xi), \tag{13}$$

$$F^0(\chi) = a \cdot F^0(\xi) + d \cdot \varepsilon\delta^0(\xi), \tag{14}$$

$$F^{\mathrm{I}}(\chi) = a \cdot F^{\mathrm{I}}(\xi) + \frac{1}{2} b \cdot F^0(\xi) + d \cdot \varepsilon\delta^{\mathrm{I}}(\xi) + \frac{1}{2} e \cdot \varepsilon\delta^0(\xi), \tag{15}$$

$$F^{\mathrm{II}}(\chi) = a \cdot F^{\mathrm{II}}(\xi) + b \cdot F^{\mathrm{I}}(\xi) + c \cdot F^0(\xi) + d \cdot \varepsilon\delta(\xi) + e \cdot \varepsilon\delta^{\mathrm{I}}(\xi) + f \cdot \varepsilon\delta^0(\xi). \tag{16}$$

Використовуючи рівність $\overline{\beta} \circ F = \varepsilon\beta$, яка випливає з ланцюжка рівностей

$$(\overline{\beta} \circ F)(X) = \overline{\beta}(F(X)) = (\beta \circ F)(F(X)) = \beta((FF)(X)) = \beta(\varepsilon\delta(X)) = \varepsilon\beta(X),$$

отримаємо вирази

$$\overline{\beta}^0(\chi) = a \cdot \overline{\beta}^0(\xi) + d \cdot \varepsilon\beta^0(\xi), \tag{17}$$

$$\overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\chi) = a \cdot \overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) + \frac{1}{2} b \cdot \overline{\beta}^0(\xi) + d \cdot \varepsilon\beta^{\mathrm{I}}(\xi) + \frac{1}{2} e \cdot \varepsilon\beta^0(\xi), \tag{18}$$

$$\overline{\beta}^{\mathrm{II}}(\chi) = a \cdot \overline{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) + b \cdot \overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) + c \cdot \overline{\beta}^0(\xi) + d \cdot \varepsilon\beta^{\mathrm{II}}(\xi) + e \cdot \varepsilon\beta^{\mathrm{I}}(\xi) + f \cdot \varepsilon\beta^0(\xi). \tag{19}$$

Збираючи рівності (9)–(19) разом і підставляючи їхні праві частини в рівність (8), будемо мати

$$\tilde{\nabla}_t^{\mathrm{II}} \chi = a' \cdot \delta(\xi) + b' \cdot \delta^{\mathrm{I}}(\xi) + c' \cdot \delta^0(\xi) + d' \cdot F^{\mathrm{II}}(\xi) + e' \cdot F^{\mathrm{I}}(\xi) + f' \cdot F^0(\xi),$$

де

$$a' = \nabla_t^{\mathrm{II}} a + 2a \cdot \beta^0(\xi) + 2d \cdot \overline{\beta}^0(\xi),$$

$$b' = \nabla_t^{\mathrm{II}} b + 4a \cdot \beta^{\mathrm{I}}(\xi) + 2b \cdot \beta^0(\xi) + 4d \cdot \overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) + 2e \cdot \overline{\beta}^0(\xi),$$

$$c' = \nabla_t^{\mathrm{II}} c + 2a \cdot \beta^{\mathrm{II}}(\xi) + 2d \cdot \overline{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) + 2c \cdot \beta^0(\xi) + 2b \cdot \beta^{\mathrm{I}}(\xi) + 2e \cdot \overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) + 2f \cdot \overline{\beta}^0(\xi),$$

$$d' = \nabla_t^{\mathrm{II}} d + 2a \cdot \varepsilon\overline{\beta}^0(\xi) + 2d \cdot \beta^0(\xi),$$

$$e' = \nabla_t^{\mathrm{II}} e + 4a \cdot \varepsilon\overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) + 2b \cdot \varepsilon\overline{\beta}^0(\xi) + 4d \cdot \beta^{\mathrm{I}}(\xi) + 2e \cdot \beta^0(\xi),$$

$$f' = \nabla_t^{\mathrm{II}} f + 2a \cdot \varepsilon\overline{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) + 2b \cdot \varepsilon\overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) + 2c \cdot \varepsilon\overline{\beta}^0(\xi) + 2d \cdot \beta^{\mathrm{II}}(\xi) + 2e \cdot \beta^{\mathrm{I}}(\xi) + 2f \cdot \beta^0(\xi).$$

З огляду на умову леми, для функції a' будемо мати

$$a' = 2(\nabla R + 2R \otimes \beta + 2\varepsilon\overline{R} \otimes \overline{\beta})^0(\xi, \ldots, \xi, \xi) = 2R'^0(\xi, \ldots, \xi, \xi).$$

Аналогічними міркуваннями одержуємо подібні вирази для функцій b', c', d', e', f'. Лему доведено. ♦

Тензорні поля $R, \overline{R} \in \mathfrak{T}_r^0(M)$ і $R', \overline{R}' \in \mathfrak{T}_{r+1}^0(M)$ між собою тісно пов'язані.

Зауваження 3. *Якщо для будь-яких векторних полів* X_1, X_2, …, X_r *з* $\mathfrak{X}(M)$ *виконується рівність* $\overline{R}(X_1, X_2, \ldots, X_r) = R(F(X_1), X_2, \ldots, X_r)$, *то для довільних векторних полів* X_1, X_2, …, X_{r+1} *з* $\mathfrak{X}(M)$ *виконується рівність*

$$\overline{R}'(X_1, X_2, \ldots, X_{r+1}) = R'(F(X_1), X_2, \ldots, X_{r+1}).$$

Лема 5. *Виберемо на* $T^2(M)$ *довільну геодезичну криву* $\mathcal{C}$. *Нехай* ξ *– поле дотичних векторів уздовж кривої* $\mathcal{C}$ *і* $\tilde{p} = (p, y, z)$ *– довільна точка на кривій* $\mathcal{C}$. *Якщо вектор* $\xi^{\bullet}\big|_p = \xi^h\big|_{\tilde{p}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial u^h}\Big|_p$ *не дорівнює нулеві, то вектори*

$$\delta(\xi)\big|_{\tilde{p}}, \quad \delta^{\mathrm{I}}(\xi)\big|_{\tilde{p}}, \quad \delta^0(\xi)\big|_{\tilde{p}}, \quad F^{\mathrm{II}}(\xi)\big|_{\tilde{p}}, \quad F^{\mathrm{I}}(\xi)\big|_{\tilde{p}}, \quad F^0(\xi)\big|_{\tilde{p}}$$

лінійно незалежні.

Д о в е д е н н я. Дійсно, розглядаючи нульову лінійну комбінацію цих векторів, враховуючи покоординатні зображення, матимемо потрібне. ♦

Зміст леми 5 полягає в тому, що завжди існують певні значення векторів ξ, при яких вектори $\delta(\xi)\big|_{\tilde{p}}$, $\delta^{\mathrm{I}}(\xi)\big|_{\tilde{p}}$ $\delta^0(\xi)\big|_{\tilde{p}}$, $F^{\mathrm{II}}(\xi)\big|_{\tilde{p}}$, $F^{\mathrm{I}}(\xi)\big|_{\tilde{p}}$, $F^0(\xi)\big|_{\tilde{p}}$ є лінійно незалежними. Цей факт природно використовується надалі.

Перейдемо до розгляду сплощуючих властивостей індукованого дифеоморфізму. Наступна теорема виражає загальний випадок.

Теорема 3. *Нехай* $\mu : M \to \bar{M}$ *– голоморфно-проективний дифеоморфізм келерових просторів* (M, g, F) *і* $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{F})$ *описується рівнянням*

$$\mu_* F = \bar{F}, \quad P(X,Y) = \beta(X)\delta(Y) + \beta(Y)\delta(X) + \varepsilon\bar{\beta}(X)F(Y) + \varepsilon\bar{\beta}(Y)F(X), \qquad (20)$$

де β *– деякий ковектор на* M, $\bar{\beta} = \beta \circ F$ *і* X, Y *– довільні векторні поля на* M.

Тоді індукований дифеоморфізм $\mu_* : T^2(M) \to T^2(\bar{M})$ *дотичних розшарувань другого порядку зі зв'язностями повних ліфтів* ∇^{II} *і* $\bar{\nabla}^{\mathrm{II}}$ *у загальному випадку є 6-геодезичним.*

Д о в е д е н н я. Нехай $T_0, \bar{T}_0 \in \mathfrak{T}_0^0(M)$ – такі функції на M, що $T_0 = 1/2$, $\bar{T}_0 = 0$. Тоді

$$T_0^0 = 1/2, \quad T_0^{\mathrm{I}} = 0, \quad T_0^{\mathrm{II}} = 0, \quad \bar{T}_0^0 = 0, \quad \bar{T}_0^{\mathrm{I}} = 0, \quad \bar{T}_0^{\mathrm{II}} = 0.$$

При цьому

$$\xi = \delta(\xi) = a_0 \cdot \delta(\xi) + b_0 \cdot \delta^{\mathrm{I}}(\xi) + c_0 \cdot \delta^0(\xi) + d_0 \cdot F^{\mathrm{II}}(\xi) + e_0 \cdot F^{\mathrm{I}}(\xi) + f_0 \cdot F^0(\xi), \quad (21)$$

де

$$a_0 = 2T_0^0 = 2 \cdot 1/2 = 1, \qquad b_0 = 4T_0^{\mathrm{I}} = 4 \cdot 0 = 0, \qquad c_0 = 2T_0^{\mathrm{II}} = 0,$$

$$d_0 = 2\varepsilon\bar{T}_0^0 = 2\varepsilon \cdot 0 = 0, \qquad e_0 = 4\varepsilon\bar{T}_0^{\mathrm{I}} = 4\varepsilon \cdot 0 = 0, \quad f_0 = 2\varepsilon\bar{T}_0^{\mathrm{II}} = 0.$$

Застосовуючи лему 4, знайдемо вектори кривин $\tilde{\xi}_i$, $i = 1, \ldots, 6$:

$$\tilde{\xi}_i = \tilde{\nabla}_t^{\mathrm{II}} \xi_{i-1} = a_i \cdot \delta(\xi) + b_i \cdot \delta^{\mathrm{I}}(\xi) + c_i \cdot \delta^0(\xi) + d_i \cdot F^{\mathrm{II}}(\xi) + e_i \cdot F^{\mathrm{I}}(\xi) + f_i \cdot F^0(\xi), \quad (22)$$

де

$$a_i = 2T_i^0(\xi, \ldots, \xi), \qquad b_i = 4T_i^{\mathrm{I}}(\xi, \ldots, \xi), \qquad c_i = 2T_i^{\mathrm{II}}(\xi, \ldots, \xi),$$

$$d_i = 2\varepsilon\bar{T}_i^0(\xi, \ldots, \xi), \qquad e_i = 4\varepsilon\bar{T}_i^{\mathrm{I}}(\xi, \ldots, \xi), \qquad f_i = 2\varepsilon\bar{T}_i^{\mathrm{II}}(\xi, \ldots, \xi),$$

причому

$$T_i = \nabla T_{i-1} + 2T_{i-1} \otimes \beta + 2\varepsilon\bar{T}_{i-1} \otimes \bar{\beta}, \qquad \bar{T}_i = \nabla\bar{T}_{i-1} + 2\bar{T}_{i-1} \otimes \beta + 2T_{i-1} \otimes \bar{\beta}.$$

Зіставляючи рівності (21), (22), одержимо рівність

$$\xi \wedge \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\xi}_2 \wedge \tilde{\xi}_3 \wedge \tilde{\xi}_4 \wedge \tilde{\xi}_5 \wedge \tilde{\xi}_6 = 0,$$

з якої випливає необхідне. Теорему доведено. ♦

Природно виникає питання про знаходження умов, при яких знижується порядок сплощення індукованого дифеоморфізму. Щоб відповісти на це питання, розглянемо ряд лем, які виражають певні властивості тензорів T_2, $\bar{T}_2$ і T_3, $\bar{T}_3$, які суттєво використовуються надалі.

Лема 6. *Нехай у точці* $p \in M$ *виконується рівність*

$$S(\bar{\beta} \otimes T_2)\big|_p = 0 \qquad (23)$$

і нехай для довільних кульових координат $y = (y^k) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^k) \in \mathbb{R}^n$ *у точці* $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$ *справджується*

$$S(\bar{\beta} \otimes T_2)^{\mathrm{I}}\big|_{\tilde{p}} = 0.$$

Тоді виконується рівність

$$T_2\big|_p = 0. \qquad (24)$$

Д о в е д е н н я. *Випадок 1*. Нехай $\bar{\beta}\big|_p \neq 0$. Рівність (23) запишемо у вигляді

$$S(\bar{\beta}\big|_p \otimes T_2\big|_p) = 0. \qquad (25)$$

Застосовуючи до рівності (25) лему 1 з [3], враховуючи при цьому симетричність тензорного поля T_2, одержимо рівність (24).

Випадок 2. Нехай $\bar{\beta}\big|_p = 0$. Тоді будемо мати

$$S(\bar{\beta}^{\mathrm{I}}|_{\tilde{p}} \otimes T_2^0|_{\tilde{p}}) = 0. \tag{26}$$

Випадок 2.1. Припустимо, що існують такі набори кульових координат $y = (y^k) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^k) \in \mathbb{R}^n$, що в точці $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$ виконується умова

$$\bar{\beta}^{\mathrm{I}}|_{\tilde{p}} \neq 0. \tag{27}$$

Застосовуючи лему 1 з [3] до рівності (26), враховуючи при цьому умову (27), отримуємо рівність (24).

Випадок 2.2. Нехай для будь-яких наборів кульових координат $y = (y^k) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^k) \in \mathbb{R}^n$ у точці $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$ виконується рівність $\bar{\beta}^{\mathrm{I}}|_{\tilde{p}} = 0$. Тоді $\partial_s \beta_i\big|_p = 0$ для будь-яких $i = 1\ldots, n$, $s = 1\ldots, n$. Отже,

$$T_2\big|_p = \nabla\beta\big|_p + 2\beta\big|_p \otimes \beta\big|_p + 2\varepsilon\bar{\beta}\big|_p \otimes \bar{\beta}\big|_p = \nabla\beta\big|_p = 0.$$

Лему доведено. ♦

Лема 7. *Нехай в M виконуються рівності*

$$S(\beta \otimes T_2 \otimes \bar{T}_3) = 0, \qquad S(\bar{\beta} \otimes T_2 \otimes T_3) = 0. \tag{28}$$

Тоді

$$S(\bar{T}_3) = 0, \qquad S(T_3) = 0. \tag{29}$$

Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо рівності

$$T_2 \otimes S(\bar{T}_3) = 0, \qquad T_2 \otimes S(T_3) = 0. \tag{30}$$

Для цього покажемо, що в кожній точці $p \in M$ виконуються рівності

$$T_2\big|_p \otimes S(\bar{T}_3)\big|_p = 0, \qquad T_2\big|_p \otimes S(T_3)\big|_p = 0.$$

Відповідно до леми 3 з рівності (28) випливають рівності

$$S(S(\bar{\beta} \otimes T_2) \otimes S(\bar{T}_3)) = 0, \qquad S(S(\bar{\beta} \otimes T_2) \otimes S(T_3)) = 0. \tag{31}$$

Виберемо довільну точку $p \in M$.

Випадок 1. Нехай у точці $p \in M$ виконується умова $S(\bar{\beta} \otimes T_2)\big|_p \neq 0$. Тоді відповідно до леми 1 (див. [3]), враховуючи цю умову, з рівностей (31) матимемо рівності

$$S(\bar{T}_3)\big|_p = 0, \qquad S(T_3)\big|_p = 0, \tag{32}$$

з яких випливають рівності (30).

Випадок 2. Нехай

$$S(\bar{\beta} \otimes T_2)\big|_p = 0. \tag{33}$$

Беручи I-ліфт від рівностей (31), враховуючи рівність (33), матимемо рівності

$$S(S(\bar{\beta} \otimes T_2)^{\mathrm{I}}|_{\tilde{p}} \otimes S(\bar{T}_3)^0|_{\tilde{p}}) = 0, \qquad S(S(\bar{\beta} \otimes T_2)^{\mathrm{I}}|_{\tilde{p}} \otimes S(T_3)^0|_{\tilde{p}}) = 0, \tag{34}$$

для довільних кульових координат $y = (y^k) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^k) \in \mathbb{R}^n$ у точці $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$.

Випадок 2.1. Нехай існують такі набори кульових координат $y = (y^k) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^k) \in \mathbb{R}^n$, що в точці $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$ виконується умова $S(\bar{\beta} \otimes T_2)^{\mathrm{I}}|_{\tilde{p}} \neq 0$. Тоді, застосувавши до рівностей (34) лему 1 з [3], матимемо рівності

$$S(\bar{T}_3)^0|_{\tilde{p}} = 0, \qquad S(T_3)^0|_{\tilde{p}} = 0, \tag{35}$$

з яких, у свою чергу, випливають рівності (32), тобто й рівності (30).

Випадок 2.2. Нехай для будь-яких наборів кульових координат $y = (y^k) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^k) \in \mathbb{R}^n$ у точці $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$ виконується рівність

$$S(\bar{\beta} \otimes T_2)^{\mathrm{I}}|_{\tilde{p}} = 0. \tag{36}$$

Рівності (33) і (36) дозволяють скористатися лемою 6, відповідно до якої матимемо рівність $T_2\big|_p = 0$, з якої випливають рівності (30).

Тепер доведемо рівності (29). Для цього покажемо, що в кожній точці $p \in \in M$ виконуються рівності (32).

Випадок 1. Нехай $T_2\big|_p \neq 0$. Тоді з рівностей (30) матимемо рівності (32).

Випадок 2. Нехай $T_2\big|_p = 0$. Очевидно, і $\overline{T}_2\big|_p = 0$. Тоді, беручи I-ліфт від рівностей (30), для довільних кульових координат $y = (y^k) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^k) \in \mathbb{R}^n$ у точці $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$ матимемо рівності

$$T_2^{\mathrm{I}}\big|_{\tilde{p}} \otimes S(\overline{T}_3)^0\big|_{\tilde{p}} = 0, \qquad T_2^{\mathrm{I}}\big|_{\tilde{p}} \otimes S(T_3)^0\big|_{\tilde{p}} = 0. \tag{37}$$

Випадок 2.1. Нехай існують такі набори кульових координат $y = (y^k) \in \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^k) \in \mathbb{R}^n$, що в точці $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$ виконується умова $T_2^{\mathrm{I}}\big|_{\tilde{p}} \neq 0$. Тоді з рівностей (37) матимемо рівності (35), а отже, й рівності (32).

Випадок 2.2. Нехай для будь-яких наборів кульових координат $y = (y^k) \in \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^k) \in \mathbb{R}^n$ у точці $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$ виконується рівність $T_2^{\mathrm{I}}\big|_{\tilde{p}} = 0$. З покоординатного виразу I-ліфта випливає, що $y^k \cdot \partial_k T_{2ij}\big|_p = 0$. Оскільки кульові координати $y = (y^k) \in \mathbb{R}^n$ довільні, матимемо $\partial_k T_{2ij}\big|_p = 0$. Звідси знаходимо

$$T_3\big|_p = \nabla T_2\big|_p + 2T_2\big|_p \otimes \beta\big|_p + 2\varepsilon \overline{T}_2\big|_p \otimes \overline{\beta}\big|_p = \nabla T_2\big|_p,$$

$$\nabla_k T_{2ij}\big|_p = \partial_k T_{2ij}\big|_p - T_{2\alpha j}\big|_p \cdot \Gamma_{ki}^{\alpha}\big|_p - T_{2i\alpha}\big|_p \cdot \Gamma_{kj}^{\alpha}\big|_p = 0,$$

тобто $T_3\big|_p = 0$. Тоді й $\overline{T}_3\big|_p = 0$. Отже, матимемо рівності (32). Лему доведено. ♦

Перейдемо до розгляду теореми, що виражає умови, при яких знижується порядок сплощення індукованого дифеоморфізму.

Теорема 4. *Нехай голоморфно-проективний дифеоморфізм* $\mu : M \to \overline{M}$ *келерових просторів* (M, g, F) *і* $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ *описується рівнянням* (20). *Тоді індукований дифеоморфізм* $\mu_* : T^2(M) \to T^2(\overline{M})$ *дотичних розшарувань другого порядку зі зв'язностями повних ліфтів* ∇^{II} *і* $\overline{\nabla}^{\mathrm{II}}$ *має такі сплощуючі властивості*:

1°*. Індукований дифеоморфізм* μ_* *є геодезичним дифеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли* $\beta = 0$, *тобто коли дифеоморфізм* μ *є афінним. При цьому сам дифеоморфізм* μ_* *буде афінним.*

2°*. Індукований дифеоморфізм* μ_* *є 2-геодезичним дифеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли виконуються умови* $\beta \neq 0,\ T_2 = 0$.

3°*. Індукований дифеоморфізм* μ_* *є 3-геодезичним дифеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли виконуються умови* $T_2 \neq 0,\ S(T_3) = 0,\ S(\overline{T}_3) = 0$.

4°*. Індукований дифеоморфізм* μ_* *є 4-геодезичним дифеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли виконується умова* $M_{1234} = M_{1235} = M_{1245} = M_{1345} = M_{2345} = 0$.

5°*. Індукований дифеоморфізм* μ_* *є 5-геодезичним дифеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$S\left(\begin{vmatrix} \beta^{\mathrm{I}} & \beta^{\mathrm{II}} & \overline{\beta}^0 & \overline{\beta}^{\mathrm{I}} & \overline{\beta}^{\mathrm{II}} \\ T_2^{\mathrm{I}} & T_2^{\mathrm{II}} & \overline{T}_2^0 & \overline{T}_2^{\mathrm{I}} & \overline{T}_2^{\mathrm{II}} \\ T_3^{\mathrm{I}} & T_3^{\mathrm{II}} & \overline{T}_3^0 & \overline{T}_3^{\mathrm{I}} & \overline{T}_3^{\mathrm{II}} \\ T_4^{\mathrm{I}} & T_4^{\mathrm{II}} & \overline{T}_4^0 & \overline{T}_4^{\mathrm{I}} & \overline{T}_4^{\mathrm{II}} \\ T_5^{\mathrm{I}} & T_5^{\mathrm{II}} & \overline{T}_5^0 & \overline{T}_5^{\mathrm{I}} & \overline{T}_5^{\mathrm{II}} \end{vmatrix}\right) = 0. \tag{38}$$

Д о в е д е н н я. ***1°***. З рівностей (21) і (22) одержимо рівність

$$\xi \wedge \tilde{\tilde{\xi}}_1 = b_1 \cdot \delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) + c_1 \cdot \delta(\xi) \wedge \delta^0(\xi) + d_1 \cdot \delta(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi) + \\ + e_1 \cdot \delta(\xi) \wedge F^{\mathrm{I}}(\xi) + f_1 \cdot \delta(\xi) \wedge F^0(\xi)\,, \qquad (39)$$

у якій зовнішні добутки, відповідно до леми 5, лінійно незалежні.

Візьмемо довільну точку $p \in M$ і для деяких наборів кульових координат $y = (y^h) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z^h) \in \mathbb{R}^n$ розглянемо точку $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$. З рівності (39) випливає, що умова

$$\xi|_{\tilde{p}} \wedge \tilde{\tilde{\xi}}_1|_{\tilde{p}} = 0 \qquad (40)$$

рівносильна рівностям

$$b_1|_{\tilde{p}} = 0, \qquad c_1|_{\tilde{p}} = 0, \qquad d_1|_{\tilde{p}} = 0, \qquad e_1|_{\tilde{p}} = 0, \qquad f_1|_{\tilde{p}} = 0\,,$$

що, з огляду на довільність ξ, рівносильно рівностям

$$\beta^0|_{\tilde{p}} = 0, \quad \beta^{\mathrm{I}}|_{\tilde{p}} = 0, \quad \beta^{\mathrm{II}}|_{\tilde{p}} = 0, \quad \overline{\beta}^0|_{\tilde{p}} = 0, \quad \overline{\beta}^{\mathrm{I}}|_{\tilde{p}} = 0, \quad \overline{\beta}^{\mathrm{II}}|_{\tilde{p}} = 0\,. \qquad (41)$$

Враховуючи вираз для 0-ліфта ковекторного поля, з рівності $\beta^0|_{\tilde{p}} = 0$ одержимо рівність $\beta|_p = 0$. Оскільки точку $p \in M$ вибрано довільно, то маємо рівність

$$\beta = 0\,. \qquad (42)$$

З іншого боку, рівність (42) для довільної точки $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$ забезпечить виконання рівностей (41), а отже, й рівності (40).

Таким чином, для того щоб індукований дифеоморфізм μ_* був геодезичним, необхідно та достатньо, щоб виконувалася рівність (42), тобто, щоб голоморфно-проективний дифеоморфізм μ був афінним. Враховуючи (42) в (7), приходимо до висновку, що індукований дифеоморфізм також є афінним.

2°. Легко перевірити, що справджується рівність

$$\xi \wedge \tilde{\tilde{\xi}}_1 \wedge \tilde{\tilde{\xi}}_2 = M_{12}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge \delta^0(\xi) + M_{15}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge F^0(\xi) + \\ + M_{14}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{I}}(\xi) + M_{13}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi) + \\ + M_{25}\delta(\xi) \wedge \delta^0(\xi) \wedge F^0(\xi) + M_{24}\delta(\xi) \wedge \delta^0(\xi) \wedge F^{\mathrm{I}}(\xi) + \\ + M_{23}\delta(\xi) \wedge \delta^0(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi) + M_{45}\delta(\xi) \wedge F^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge F^0(\xi) + \\ + M_{35}\delta(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi) \wedge F^0(\xi) + M_{34}\delta(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{I}}(\xi)\,,$$

у якій зовнішні добутки, з огляду на лему 5, є лінійно незалежними, а коефіцієнти $M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15}, M_{23}, M_{24}, M_{25}, M_{34}, M_{35}, M_{45}$ є мінорами матриці

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \beta^{\mathrm{II}}(\xi) & \overline{\beta}^0(\xi) & \overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \overline{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) \\ T_2^{\mathrm{I}}(\xi,\xi) & T_2^{\mathrm{II}}(\xi,\xi) & \overline{T}_2^0(\xi,\xi) & \overline{T}_2^{\mathrm{I}}(\xi,\xi) & \overline{T}_2^{\mathrm{II}}(\xi,\xi) \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку рівність $\xi \wedge \tilde{\tilde{\xi}}_1 \wedge \tilde{\tilde{\xi}}_2 = 0$ рівносильна системі рівностей

$$M_{12} = 0, \quad M_{13} = 0, \quad M_{14} = 0, \quad M_{15} = 0, \quad M_{23} = 0\,, \\ M_{24} = 0, \quad M_{25} = 0, \quad M_{34} = 0, \quad M_{35} = 0, \quad M_{45} = 0\,. \qquad (43)$$

Довільно виберемо векторні поля X, Y, Z на M і точку $p \in M$. Зафіксуємо точку $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$, де $y = (y^h)$, $y^h = 0$ і $z = (z^h)$, $z^h = 0$ − нульові кульові координати. Розглянемо дотичний вектор $\tau = (X^h, Y^h, Z^h)$ у точці $\tilde{p}$ до $T^2(M)$ і проведемо через точку $\tilde{p}$ у напрямку вектора τ геодезичну криву $\mathcal{C}$. Тоді $\xi^h|_{\tilde{p}} = X^h|_p$, $\xi^{\bar{h}}|_{\tilde{p}} = Y^h|_p$ і $\xi^{\bar{\bar{h}}}|_{\tilde{p}} = Z^h|_p$. Враховуючи це, знаходимо

$$\overline{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi)|_{\tilde{p}} = \overline{\beta}_i|_p\, \xi^{\bar{i}}|_{\tilde{p}} = \overline{\beta}_i|_p\, Y^i|_p = \overline{\beta}(Y)|_p\,,$$

$$\overline{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi)|_{\tilde{p}} = \overline{\beta}_i|_p\, \xi^{\bar{\bar{i}}}|_{\tilde{p}} = \overline{\beta}_i|_p\, Z^i|_p = \overline{\beta}(Z)|_p\,.$$

Проводячи подібні міркування, будемо мати

$$\beta^{\mathrm{I}}(\xi)|_{\tilde{p}} = \beta(Y)|_p\,, \qquad \beta^{\mathrm{II}}(\xi)|_{\tilde{p}} = \beta(Z)|_p\,.$$

Для I-ліфта і II-ліфта тензора $\bar{T}_2$ знаходимо відповідно

$$\bar{T}_2^{\mathrm{I}}(\xi,\xi)\big|_{\tilde{p}} = \bar{T}_2(X,Y)\big|_p + \bar{T}_2(Y,X)\big|_p = 2S(\bar{T}_2)(X,Y)\big|_p ,$$

$$\bar{T}_2^{\mathrm{II}}(\xi,\xi)\big|_{\tilde{p}} = 2S(\bar{T}_2)(X,Z)\big|_p + 2\bar{T}_2(Y,Y)\big|_p .$$

Аналогічно, з урахуванням симетричності тензорного поля T_2, одержимо

$$T_2^{\mathrm{I}}(\xi,\xi)\big|_{\tilde{p}} = 2T_2(X,Y)\big|_p , \qquad T_2^{\mathrm{II}}(\xi,\xi)\big|_{\tilde{p}} = 2T_2(X,Z)\big|_p + 2T_2(Y,Y)\big|_p .$$

З рівностей

$$M_{14}\big|_{\tilde{p}} = \begin{vmatrix} b_1|_{\tilde{p}} & e_1|_{\tilde{p}} \\ b_2|_{\tilde{p}} & e_2|_{\tilde{p}} \end{vmatrix} = 0, \qquad M_{24}\big|_{\tilde{p}} = \begin{vmatrix} c_1|_{\tilde{p}} & e_1|_{\tilde{p}} \\ c_2|_{\tilde{p}} & e_2|_{\tilde{p}} \end{vmatrix} = 0$$

одержимо $\bar{\beta}(Y)\big|_p T_2(Y,Y)\big|_p = 0$. Оскільки точка $p \in M$ і векторне поле Y вибрані довільно, то з останньої рівності знаходимо

$$S(\bar{\beta} \otimes T_2) = 0 . \qquad (44)$$

Неважко показати, що для довільного тензорного поля R на M виконується рівність

$$S(R)^0 = S(R^0), \qquad S(R)^{\mathrm{I}} = S(R^{\mathrm{I}}), \qquad S(R)^{\mathrm{II}} = S(R^{\mathrm{II}}) . \qquad (45)$$

Беручи I-ліфт від обох частин рівності (44), одержимо

$$S(\bar{\beta} \otimes T_2)^{\mathrm{I}} = 0 . \qquad (46)$$

Рівності (44) і (46) дозволяють застосувати лему 6, звідки отримуємо, що $T_2 = 0$.

Навпаки, нехай виконується рівність $T_2 = 0$. Тоді, з огляду на зв'язок тензорів T_2 і $\bar{T}_2$, одержимо, що $\bar{T}_2 = 0$. Із цих рівностей і рівності (45) одержуємо (43).

Таким чином, для того щоб індукований дифеоморфізм μ_* був 2- геодезичним, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови $\beta \neq 0$ і $T_2 = 0$.

3°. Перевіркою можна переконатись, що виконується рівність

$$\begin{aligned}
\xi \wedge \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\xi}_2 \wedge \tilde{\xi}_3 = {} & M_{123}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge \delta^0(\xi)F^{\mathrm{II}}(\xi) + \\
& + M_{124}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge \delta^0(\xi)F^{\mathrm{I}}(\xi) + \\
& + M_{125}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge \delta^0(\xi)F^0(\xi) + M_{134}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi)F^{\mathrm{I}}(\xi) + \\
& + M_{135}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi)F^0(\xi) + M_{145}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{I}}(\xi)F^0(\xi) + \\
& + M_{234}\delta(\xi) \wedge \delta^0(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi)F^{\mathrm{I}}(\xi) + M_{235}\delta(\xi) \wedge \delta^0(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi)F^0(\xi) + \\
& + M_{245}\delta(\xi) \wedge \delta^{\mathrm{I}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{I}}(\xi)F^0(\xi) + M_{345}\delta(\xi) \wedge F^{\mathrm{II}}(\xi) \wedge F^{\mathrm{I}}(\xi)F^0(\xi),
\end{aligned}$$

в якій зовнішні добутки на підставі леми 5 є лінійно незалежними, а коефіцієнти M_{123}, M_{124}, M_{125}, M_{134}, M_{135}, M_{145}, M_{234}, M_{235}, M_{245}, M_{345} є мінорами матриці

$$\begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{I}}(\xi) & \beta^{\mathrm{II}}(\xi) & \bar{\beta}^0(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{I}}(\xi) & \bar{\beta}^{\mathrm{II}}(\xi) \\ T_2^{\mathrm{I}}(\xi,\xi) & T_2^{\mathrm{II}}(\xi,\xi) & \bar{T}_2^0(\xi,\xi) & \bar{T}_2^{\mathrm{I}}(\xi,\xi) & \bar{T}_2^{\mathrm{II}}(\xi,\xi) \\ T_3^{\mathrm{I}}(\xi,\xi,\xi) & T_3^{\mathrm{II}}(\xi,\xi,\xi) & \bar{T}_2^0(\xi,\xi,\xi) & \bar{T}_3^{\mathrm{I}}(\xi,\xi,\xi) & \bar{T}_3^{\mathrm{II}}(\xi,\xi,\xi) \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку рівність $\xi \wedge \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\xi}_2 \wedge \tilde{\xi}_3 = 0$ рівносильна системі рівностей

$$M_{123} = 0, \quad M_{124} = 0, \quad M_{125} = 0, \quad M_{134} = 0, \quad M_{135} = 0,$$

$$M_{145} = 0, \quad M_{234} = 0, \quad M_{235} = 0, \quad M_{245} = 0, \quad M_{345} = 0 . \qquad (47)$$

Виберемо довільно векторні поля X, Y, Z на M і точку $p \in M$. Зафіксуємо точку $\tilde{p} = (p, y, z) \in T^2(M)$, де $y = (y^h)$, $y^h = 0$ і $z = (z^h)$, $z^h = 0$ − нульові кульові координати. Розглянемо дотичний вектор $\tau = (X^h, Y^h, Z^h)$ у точці $\tilde{p}$ до $T^2(M)$ і проведемо через точку $\tilde{p}$ в напрямку вектора τ геодезичну криву $\mathcal{C}$. Тоді $\xi^h\big|_{\tilde{p}} = X^h\big|_p$, $\xi^{\bar{h}}\big|_{\tilde{p}} = Y^h\big|_p$ і $\xi^{\bar{\bar{h}}}\big|_{\tilde{p}} = Z^h\big|_p$. Враховуючи зауваження 2, для 0-

ліфта тензорного поля T_3 знаходимо

$$T_3^0(\xi,\xi,\xi)|_{\tilde p} = T_{3ijk}|_p\,\xi^i|_{\tilde p}\,\xi^j|_{\tilde p}\,\xi^k|_{\tilde p} = T_3(X,X,X)|_p .$$

Для I-ліфта і II-ліфта тензорного поля T_3 знаходимо відповідно

$$T_3^{\mathrm{I}}(\xi,\xi,\xi)|_{\tilde p} = 3S(T_3)(Y,X,X)|_p ,$$

$$T_3^{\mathrm{II}}(\xi,\xi,\xi)|_{\tilde p} = 3S(T_3)(Z,X,X)|_p + 6S(T_3)(Y,Y,X)|_p .$$

Проводячи подібні викладки, будемо мати

$$\overline{T}_3^0(\xi,\xi,\xi)|_{\tilde p} = \overline{T}_3(X,X,X)|_p , \qquad \overline{T}_3^{\mathrm{I}}(\xi,\xi,\xi)|_{\tilde p} = 3S(\overline{T}_3)(Y,X,X)|_p ,$$

$$\overline{T}_3^{\mathrm{II}}(\xi,\xi,\xi)|_{\tilde p} = 3S(\overline{T}_3)(Z,X,X)|_p + 6S(\overline{T}_3)(Y,Y,X)|_p .$$

З рівностей $M_{134} = 0$, $M_{135} = 0$ і $M_{234} = 0$ випливає рівність

$$2\overline{\beta}(X)|_p\, T_2(X,X)|_p\, \overline{T}_3(X,X,X)|_p - 3\overline{\beta}(X)|_p\, \overline{T}_2(X,X)|_p\, T_3(X,X,X)|_p = 0 . \quad (48)$$

З рівності $M_{235} = 0$ випливає рівність

$$\overline{\beta}(X)|_p\, T_2(X,X)|_p\, \overline{T}_3(X,X,X)|_p - \overline{\beta}(X)|_p\, \overline{T}_2(X,X)|_p\, T_3(X,X,X)|_p = 0 . \quad (49)$$

Визначник системи (48), (49) дорівнює $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Отже, одержимо

$$\overline{\beta}(X)|_p\, T_2(X,X)|_p\, \overline{T}_3(X,X,X)|_p = 0, \quad \overline{\beta}(X)|_p\, \overline{T}_2(X,X)|_p\, T_3(X,X,X)|_p = 0 . \quad (50)$$

З огляду на довільність векторного поля X і точки $p \in M$, з рівностей (50) випливають рівності

$$S(\overline{\beta} \otimes T_2 \otimes \overline{T}_3) = 0, \qquad S(\overline{\beta} \otimes \overline{T}_2 \otimes T_3) = 0 . \quad (51)$$

З рівності $M_{124} = 0$ випливає рівність

$$\beta(X)|_p\, T_2(X,X)|_p\, \overline{T}_3(X,X,X)|_p - 2\beta(X)|_p\, \overline{T}_2(X,X)|_p\, T_3(X,X,X)|_p +$$
$$+ \overline{\beta}(X)|_p\, T_2(X,X)|_p\, T_3(X,X,X)|_p = 0 .$$

Оскільки точка $p \in M$ і векторне поле X вибрані довільно, з цієї рівності одержимо тензорну рівність

$$S(\beta \otimes T_2 \otimes \overline{T}_3) - 2S(\beta \otimes \overline{T}_2 \otimes T_3) + S(\overline{\beta} \otimes T_2 \otimes T_3) = 0 . \quad (52)$$

Враховуючи лему 1 з [3] і лему 4, неважко показати, що з рівностей (51) випливають рівності $S(\beta \otimes T_2 \otimes \overline{T}_3) = 0$, $S(\beta \otimes \overline{T}_2 \otimes T_3) = 0$. Враховуючи їх в (52), одержуємо рівність

$$S(\overline{\beta} \otimes T_2 \otimes T_3) = 0 . \quad (53)$$

Перша з рівностей (51) і рівність (53) дозволяють скористатися лемою 7. Із цієї леми одержимо рівності

$$S(\overline{T}_3) = 0, \qquad S(T_3) = 0 . \quad (54)$$

Навпаки, нехай виконуються рівності (54). Оскільки ці рівності виконуються всюди на M , то, беручи ліфти від частин цих рівностей, одержимо (47).

Таким чином, для того щоб індукований дифеоморфізм μ_* був 3-геодезичним, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови

$$T_2 \neq 0, \qquad S(T_3) = 0, \qquad S(\overline{T}_3) = 0 .$$

4°. Легко перевірити, що умова $\xi \wedge \tilde\xi_1 \wedge \tilde\xi_2 \wedge \tilde\xi_3 \wedge \tilde\xi_4 = 0$ рівносильна системі рівностей

$$M_{1234} = 0, \quad M_{1235} = 0, \quad M_{1245} = 0, \quad M_{1345} = 0, \quad M_{2345} = 0 , \quad (55)$$

де коефіцієнти $M_{1234}, M_{1235}, M_{1245}, M_{1345}, M_{2345}$ – мінори матриці

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \end{pmatrix} .$$

5°. Легко перевірити, що умова $\xi \wedge \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\xi}_2 \wedge \tilde{\xi}_3 \wedge \tilde{\xi}_4 \wedge \tilde{\xi}_5 = 0$ рівносильна умові (38). Теорему доведено. ♦

Зауваження 4. (*i*). Неважко помітити, що рівності $S(T_4) = 0$ і $S(\overline{T}_4) = 0$ забезпечують виконання умови (55). Таким чином, *для того щоб індукований дифеоморфізм був 4-геодезичним, достатньо виконання умов* $S(T_3) \neq 0$ і $S(\overline{T}_3) \neq \neq 0$, $S(T_4) = 0$ і $S(\overline{T}_4) = 0$.

(*ii*). Аналогічно, рівності $S(T_5) = 0$ і $S(\overline{T}_5) = 0$ забезпечують виконання умови (38). Таким чином, *для того щоб індукований дифеоморфізм був 5-геодезичним, достатньо виконання умов* $S(T_4) \neq 0$ *і* $S(\overline{T}_4) \neq 0$, $S(T_5) = 0$ *і* $S(\overline{T}_5) = 0$.

Безпосередньо з теореми 4 отримуємо таку теорему.

Теорема 5. *Якщо* $\mathcal{G}_r$ *– локальна* r *-членна група Лі нетривіальних голоморфно-проективних перетворень келерового простору* (M, g, F), *що відповідає операторам* X_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, *то в дотичному розшаруванні* $T^2(M)$ *зі зв'язністю ліфта* ∇^{II} *ліфти* X_i^{II} *породжують* r *-членну групу Лі* $\mathcal{G}_r^{\mathrm{II}}$ p *-геодезичних перетворень, де* p *може приймати значення* $p = 2, \ldots, 6$.

Д о в е д е н н я. Нехай X_i, $i = 1, \ldots, r$, – оператори 1-параметричних груп $\exp(tX_i)$ що породжують r -членну групу Лі $\mathcal{G}_r$ зі структурними рівняннями $[X_{s_1}, X_{s_2}] = c^s_{s_1 s_2} X_s$. На підставі властивостей ІІ-ліфтів, отримуємо, що $[X^{\mathrm{II}}_{s_1}, X^{\mathrm{II}}_{s_2}] = = c^s_{s_1 s_2} X^{\mathrm{II}}_s$. Із цих рівностей, відповідно до другої теореми Лі (див. [20]), випливає, що ліфти X_r^{II}, $i = 1, \ldots, r$, є операторами деякої r -членної групи Лі перетворень дотичного розшарування $T^2(M)$, яку позначимо через $\mathcal{G}_r^{\mathrm{II}}$. Згідно з [29], $\exp(tX_i)_* = \exp(tX_i^{\mathrm{II}})$. Виходить, якщо $\mu_i(t) \in \exp(tX_i)$, то індуковане перетворення $\mu_i(t)_* \in \exp(tX_i^{\mathrm{II}})$. Залишилося застосувати попередню теорему. Теорему доведено. ♦

1. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – Москва: ВИНИТИ, 1990. – **22**. – С. 97–166.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – Москва: Наука, 1986. – 760 с.
3. *Зубрилин К. М.* p -геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений, индуцированные голоморфно-проективными диффеоморфизмами келеровых пространств. // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 132–162.
4. *Зубрілін К. М.* p -геодезичні дифеоморфізми дотичних розшарувань із зв'язністю горизонтального ліфта, індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами баз // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 48–60.
5. *Зубрилин К. М.* p -геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях второго порядка, индуцированные концикулярными преобразованиями баз // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 346–364.
6. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. – Москва: Мир, 1975. – 350 с.
7. *Лейко С. Г.* Линейные p -геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений высших порядков и высших степеней // Тр. геометр. семинара (Казань). – 1982. – Вып. 14. – С. 34–46.
8. *Лейко С. Г.* Ріманова геометрія: Навч. посібн. – Одеса: Астропринт, 2000. – 212 с.
9. *Лейко С. Г.* p -геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 62–71.

10. *Лейко С. Г.* p -геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 6. – С. 35–45.
11. *Лейко С. Г.* p -геодезические сечения касательного расслоения // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 3. – С. 32–42.
12. *Пилипосян В. А.* О геодезическом отображении касательных расслоений // Тр. геометр. семинара (Казань). – 1988. – Вып. 18. – С. 57–69.
13. *Пилипосян В. А.* О геодезическом отображении касательных расслоений римановых многообразий с метрикой полного лифта (TM, g^C) // Тр. геометр. семинара (Казань). – 1988. – Вып. 18. – С. 69–89.
14. *Подольский В. Г.* Инфинитезимальные движения в касательном расслоении с метрикой полного лифта и метрикой Сасаки // 6-я Всесоюз. геометр. конф. по современным проблемам геометрии: Тезисы. – Вильнюс, 1975. – С. 189–190.
15. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – Москва: Наука, 1967. – 664 с.
16. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. – Москва: Наука, 1979. – 255 с.
17. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, вып. 4 (70). – С. 45–116.
18. *Широков А. П.* Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – Москва: ВИНИТИ, 1981. – **12**. – С. 61–95.
19. *Широков А. П.* О голоморфно-проективных преобразованиях в касательном расслоении // Тр. геометрич. семинара (Казань). – 1979. – Вып. 11. – С. 111–114.
20. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1947. – 360 с.
21. *Ishihara S.* Holomorphically projective changes and their group in an almost complex manifold // Tohoku Math. J. – 1957. – **9**, No. 3. – P. 273–297.
22. *Otsuki T.*, *Tashiro Y.* On curves in Kählerian spaces // Math. J. Okayama Univ. – 1954. – **4**, No. 1. – P. 57–78.
23. *Srivastava R. C.* Generalized geodesics in a Riemannian space // Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. – 1967. – **5**, is. 53, No. 1. – P. 40–46.
24. *Srivastava R. C.*, *Singh K. D.* R-Geodesics and R-asymptotic lines // Ann. Polonici mat. – 1972. – **26**. – P. 165–173.
25. *Tachibana S.*, *Ishihara S.* On infinitesimal holomorphically projective transformations in Kählerian manifolds // Tohoku Math. J. – 1960. – **12**, No. 1. – P. 77–101.
26. *Tashiro Y.* On holomorphically projective correspondences in an almost complex space // Math. J. Okayama Univ. – 1957. – **6**, No. 2. – P. 147–152.
27. *Yano K.* Concircular geometry. I–IV // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1940. – **16**. – P. 195–200; P. 354–360; P. 442–448; P. 505–511.
28. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles. Differential geometry. – New York: Marcel Dekker, 1973. – 434 p.
29. *Yano K., Ishihara S.* Differential geometry of tangent bundles of order 2 // Kodai Math. Semin. Repts. – 1968. – **20**, No. 3. – P. 318–354.

УПЛОЩАЮЩИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИНДУЦИРОВАННЫХ ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНЫМИ ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ БАЗ

Изучены уплощающие свойства диффеоморфизмов касательных расслоений второго порядка, индуцированные голоморфно-проективными диффеоморфизмами келеровых пространств.

FLATTENING PROPERTIES OF DIFFEOMORPHISMS OF THE SECOND ORDER TANGENT BUNDLES, INDUCED BY HOLOMORPHICALLY PROJECTIVE DIFFEOMORPHISMS OF KÄHLERIAN MANIFOLDS

Flattening properties of diffeomorphisms of the second order tangent bundles, induced by a holomorphically projective diffeomorphisms of Kählerian manifolds are investigated.

Ін-т математики, економіки і механіки
Одеськ. нац. ун-ту ім. І. І. Мечникова, Одеса
Одержано
21.03.11