

## ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПІВПРОСТОРІ З ШАРОМ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЙ ГРІНА

*Розглядається крайова задача стаціонарної теплопровідності у тривимірній області, утвореній шаром і півпростором з порожниною, яка обмежена гладкою замкненою поверхнею. На межі контакту шару і півпростору виконуються умови ідеального теплового контакту, на іншій межі шару задано тепловий потік. Через поверхню порожнини здійснюється конвективний теплообмін з середовищем нульової температури. За допомогою побудованої матриці Гріна для відповідної шаруватої області крайова задача зведена до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з невідомою функцією на поверхні порожнини. Чисельне розв'язування здійснено з використанням сіт-квадратур, квадратурних формул Гаусса – Лежандра та проєкційного методу зі сферичними базисними функціями. Наведено результати числових експериментів.*

**1. Вступ.** Застосування методу інтегральних рівнянь для наближеного розв'язування крайових задач набуло широкого поширення. Це зумовлено перевагами такого підходу порівняно з методом сіток або методом скінченних елементів. До найбільш важливих із них слід віднести зменшення розмірності задачі та застосовність для необмежених областей.

Чисельне розв'язування отриманих інтегральних рівнянь здійснюється переважно проєкційними методами. Розрізняють два підходи при практичній реалізації таких чисельних схем. Перший з них полягає у використанні граничних елементів, тобто невідому функцію і задану границю апроксимують за допомогою відповідних фінітних базисних функцій [12]. Інший підхід передбачає параметричне задання границі і здійснення аналітичних перетворень в інтегральному рівнянні, що спрощує подальше використання проєкційних методів [14]. У тривимірному випадку застосування цього підходу вимагає обмеження на клас розглянутих поверхонь, що, однак, через наявну супералгебраїчну збіжність, не зменшує його актуальності. Цей підхід і використано у пропонованій роботі.

Застосування інтегральних рівнянь до крайових задач у частково необмежених областях має ряд особливостей. Безпосереднє використання класичного прямого або непрямого варіантів методу інтегральних рівнянь приводить до необхідності визначення невідомої функції на безмежних границях. Уникнути цих проблем вдається, задіюючи в інтегральному поданні розв'язку замість фундаментального розв'язку відповідні функції Гріна [9]. Це приводить до інтегрального рівняння на обмеженій частині границі області. У [5–7] техніка функцій Гріна використана для чисельного розв'язування прямих і обернених задач в плоских частково необмежених областях. Такий підхід узагальнено також на тривимірні задачі у багатшарових областях [1–3, 15]. У цій роботі шляхом побудови інтегрального подання розв'язку за допомогою знайденої матриці Гріна крайову задачу Робіна для рівняння Лапласа у півпросторі з шаром і порожниною редукуємо до граничного інтегрального рівняння на поверхні порожнини.

**2. Постановка задачі.** Нехай  $D_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2 \in \mathbb{R}, 0 < x_3 < h\}$  – шар в  $\mathbb{R}^3$  товщини  $h$ , утворений двома паралельними площинами  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ . Півпростір  $D_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 > h\}$  містить порожнину  $D_3 \subset D_2$  з достатньо гладкою границею  $\Gamma_3$  (див. рис. 1, де наведено граничні поверхні частково необмеженої області з порожниною). Середови-

ща в областях  $D_1$  і  $D_4 = D_2 \setminus \bar{D}_3$  мають сталі коефіцієнти теплопровідності  $\lambda^{(1)}$  і  $\lambda^{(2)}$  відповідно. Зовнішня поверхня шару  $\Gamma_1$  нагрівається тепловим потоком  $\beta$ , на межі шару та півпростору середовища ідеально контактують, а через поверхню  $\Gamma_3$  здійснюється конвективний теплообмін із середовищем з нульовою температурою.

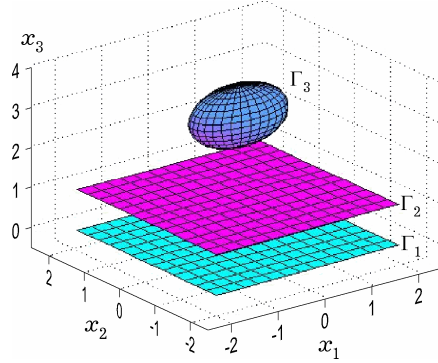


Рис.1

Математична модель такої задачі теплопровідності полягає у відшуканні функції

$$t(\mathbf{x}) = \begin{cases} t_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D_1, \\ t_2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D_4, \end{cases}$$

яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta t = 0 \quad \text{в} \quad D = D_1 \cup D_4, \quad (1)$$

граничну умову Неймана

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t_1}{\partial x_3} = -\beta \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \quad (2)$$

умови спряження

$$t_1 = t_2, \quad \lambda^{(1)} \frac{\partial t_1}{\partial x_3} = \lambda^{(2)} \frac{\partial t_2}{\partial x_3} \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad (3)$$

однорідну умову Робіна

$$\lambda^{(2)} \frac{\partial t_2}{\partial \mathbf{v}} + \alpha t_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_3, \quad (4)$$

та умову регулярності

$$t(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Тут  $\mathbf{v}$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні  $\Gamma_3$ ;  $\beta$  і  $\alpha > 0$  – задані достатньо гладкі функції, причому  $\beta(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1-\varepsilon})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_1$ ,  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon > 0$ . Будемо шукати класичний розв'язок задачі (1)–(5) у класі функцій

$$t_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\bar{D}_1), \quad t_2 \in C^2(D_4) \cap C^1(\bar{D}_4).$$

**Теорема 1.** *Крайова задача (1)–(5) має найбільше один розв'язок.*

**Д о в е д е н н я.** Розглянемо задачу (1)–(5) з  $\beta = 0$ . Застосування першої формули Гріна в області визначення функції  $t$  дає

$$\int_{D_1} |\nabla t_1(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)}} \int_{D_4} |\nabla t_2(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_{\Gamma_3} \alpha(\mathbf{y}) t_2^2(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = 0.$$

Звідси випливає, що  $|\nabla t_1(\mathbf{x})| = 0$ ,  $\mathbf{x} \in D_1$ ,  $|\nabla t_2(\mathbf{x})| = 0$ ,  $\mathbf{x} \in D_4$  і  $t_2(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_3$ . Зважаючи тепер на неперервність функції  $t$ , отримуємо, що  $t \equiv 0$ . ♦

**3. Зведення задачі до інтегрального рівняння.** Для зведення задачі (1)–(5) до граничного інтегрального рівняння скористаємось технікою функцій Гріна.

**Означення.** Матрицею Гріна задачі (1)–(3) називають матрицю функцій  $\{G_{ij}\}_{i,j=1}^2$ , які задовольняють співвідношення

$$\Delta G_{\ell\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\lambda^{(\ell)}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in D_\ell, \quad \mathbf{y} \in D_\ell, \quad (6)$$

$$\Delta G_{3-\ell,\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D_{3-\ell}, \quad \mathbf{y} \in D_\ell, \quad (7)$$

$$\frac{\partial G_{1\ell}}{\partial x_3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \mathbf{y} \in D_\ell, \quad (8)$$

$$G_{1\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_{2\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \lambda^{(1)} \frac{\partial G_{1\ell}}{\partial x_3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda^{(2)} \frac{\partial G_{2\ell}}{\partial x_3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad \mathbf{y} \in D_\ell, \quad \ell = 1, 2. \quad (9)$$

Тут  $\delta$  – функція Дірака.

Введемо позначення

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = (x_1, x_2, 2nh + x_3), \quad \mathbf{y}^* = (y_1, y_2, -y_3), \quad \rho = \frac{\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}},$$

$$G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}|^{-1} + |\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}^*|^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

**Теорема 2.** Матриця Гріна задачі (1)–(3) має вигляд

$$G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\lambda^{(1)}} \left( G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (G_{-n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \right),$$

$$G_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)})} \left( G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left( |\tilde{\mathbf{x}}_{-n} - \mathbf{y}|^{-1} + |\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}^*|^{-1} \right) \right),$$

$$G_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_{12}(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

$$G_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\lambda^{(2)}} \left( G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left( |\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}^*|^{-1} - |\tilde{\mathbf{x}}_{n-2} - \mathbf{y}^*|^{-1} \right) \right).$$

**Д о в е д е н н я.** Для функції  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  означимо стандартні пряме й обернене перетворення Фур'є

$$\hat{g}(\boldsymbol{\xi}) = F(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x}, \quad g(\mathbf{x}) = F^{-1}(\hat{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{g}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}.$$

Застосування цього перетворення до (6)–(9) за змінними  $x_1$  і  $x_2$  приводить до двох задач відносно функцій  $\hat{G}_{\ell k} = F(G_{\ell k})$ ,  $\ell, k = 1, 2$ :

$$\frac{d^2 \hat{G}_{\ell\ell}(x_3, y_3)}{dx_3^2} - |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{G}_{\ell\ell}(x_3, y_3) = -\frac{1}{2\pi\lambda^{(\ell)}} \delta(x_3 - y_3), \quad x_3, y_3 \in \hat{D}_\ell,$$

$$\frac{d^2 \hat{G}_{3-\ell,\ell}(x_3, y_3)}{dx_3^2} - |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{G}_{3-\ell,\ell}(x_3, y_3) = 0, \quad x_3, y_3 \in \hat{D}_{3-\ell},$$

$$\frac{d\hat{G}_{1\ell}(0, y_3)}{dx_3} = 0, \quad y_3 \in \hat{D}_1, \quad |\hat{G}_{2\ell}| < \infty,$$

$$\hat{G}_{1\ell}(h, y_3) = \hat{G}_{2\ell}(h, \tilde{y}_3), \quad \lambda^{(1)} \frac{d\hat{G}_{1\ell}(h, y_3)}{dx_3} = \lambda^{(2)} \frac{d\hat{G}_{2\ell}(h, \tilde{y}_3)}{dx_3},$$

$$y_3 \in \hat{D}_1, \quad \tilde{y}_3 \in \hat{D}_2,$$

для  $\ell = 1, 2$  з  $\hat{D}_1 = (0, h)$  і  $\hat{D}_2 = (h, \infty)$ . В результаті розв'язання цієї системи отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{G}_{11}(x_3, y_3) &= \frac{1}{4\pi\lambda^{(2)}|\boldsymbol{\xi}|} \left( e^{-|\boldsymbol{\xi}|(y_3-x_3)} E(y_3-x_3) + e^{-|\boldsymbol{\xi}|(x_3-y_3)} E(x_3-y_3) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-|\boldsymbol{\xi}|(x_3+y_3)} \right) + \frac{\rho}{4\pi\lambda^{(1)}|\boldsymbol{\xi}|Q(|\boldsymbol{\xi}|)} \left( e^{-|\boldsymbol{\xi}|(2h+x_3-y_3)} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-|\boldsymbol{\xi}|(2h-x_3+y_3)} + e^{-|\boldsymbol{\xi}|(2h-x_3-y_3)} + e^{-|\boldsymbol{\xi}|(2h+x_3+y_3)} \right), \\ \hat{G}_{12}(x_3, y_3) &= \frac{1}{2\pi(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)})|\boldsymbol{\xi}|Q(|\boldsymbol{\xi}|)} \left( e^{|\boldsymbol{\xi}|(x_3-y_3)} + e^{-|\boldsymbol{\xi}|(x_3+y_3)} \right), \\ \hat{G}_{21}(x_3, y_3) &= \hat{G}_{12}(y_3, x_3), \\ \hat{G}_{22}(x_3, y_3) &= \frac{1}{4\pi\lambda^{(2)}|\boldsymbol{\xi}|Q(|\boldsymbol{\xi}|)} \left( e^{-|\boldsymbol{\xi}|(y_3-x_3)} E(y_3-x_3) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-|\boldsymbol{\xi}|(x_3-y_3)} E(x_3-y_3) + \frac{e^{-|\boldsymbol{\xi}|(x_3+y_3)}}{Q(|\boldsymbol{\xi}|)} - \frac{ve^{-|\boldsymbol{\xi}|(x_3+y_3-2h)}}{Q(|\boldsymbol{\xi}|)} \right). \end{aligned}$$

Тут  $E$  – функція Гевісайда і  $Q(z) = 1 - \rho e^{-2hz}$ . Зважаючи на розвинення

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n e^{-2hzn}$$

і формулу оберненого перетворення Фур'є

$$F^{-1} \left( \frac{e^{-p|\boldsymbol{\xi}|}}{|\boldsymbol{\xi}|} \right) = \frac{1}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + p^2)^{1/2}},$$

для зображень  $\hat{G}_{\ell k}$  знаходимо оригінали  $G_{\ell k}$ . ◆

Зауважимо, що при  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda$  отримуємо, що  $G_{\ell\ell} = \frac{1}{4\pi\lambda} G_0$ ,  $\ell = 1, 2$ , де  $G_0$  – функція Гріна задачі Неймана для рівняння Лапласа у півпросторі.

**Теорема 3.** Розв'язок задачі (1)–(5) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} t_\ell(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_1} G_{\ell 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \left( G_{\ell 2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \alpha(\mathbf{y}) + \lambda^{(2)} \frac{\partial G_{\ell 2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y})} \right) u(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (10)$$

для  $\mathbf{x} \in D$  і  $\ell = 1, 2$ , де функція  $u = t_2|_{\Gamma_3}$  є розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_3} \left( G_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \alpha(\mathbf{y}) + \lambda^{(2)} \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y})} \right) u(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) &= \\ = \int_{\Gamma_1} G_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (11)$$

для  $\mathbf{x} \in \Gamma_3$ .

Д о в е д е н н я. З огляду на властивості функцій  $t_\ell$  і  $G_{k\ell}$ , очевидно, можемо записати

$$t_1(\mathbf{x}) = \lambda^{(1)} \int_{D_1} (G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta t_1(\mathbf{y}) - t_1(\mathbf{y}) \Delta G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\mathbf{y} + \\ + \lambda^{(2)} \int_{D_4} (G_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta t_2(\mathbf{y}) - t_2(\mathbf{y}) \Delta G_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in D_1.$$

Використання тепер другої формули Гріна, крайових умов та умов спряження приводять до подання (10) при  $\ell = 1$ . Аналогічно розглядаємо випадок  $\ell = 2$  і, спрямовуючи  $\mathbf{x} \rightarrow \Gamma_3$  для цього подання, з урахуванням стрибка відповідного потенціалу подвійного шару отримуємо інтегральне рівняння (11).  $\blacklozenge$

Знову при  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$  з формули (10) як частковий випадок одержуємо інтегральне подання розв'язку змішаної крайової задачі Неймана – Робіна у півпросторі з порожниною.

Встановимо коректність рівняння (11).

**Теорема 4.** Для  $\beta \in L^2(\Gamma_1)$  і  $\alpha \in L^2(\Gamma_3)$  інтегральне рівняння (11) має єдиний розв'язок  $u \in L^2(\Gamma_3)$ , який неперервно залежить від вхідних даних.

Д о в е д е н н я. З однорідного рівняння (11) маємо на підставі теореми 1, що  $t_2 = 0$  в  $D_4$  і, зокрема,  $t_2|_{\Gamma_3} = 0$ . Тим самим отримано єдиність розв'язку рівняння (11). Зважаючи на вигляд функції  $G_{22}$  і нерівність [12]

$$\frac{\mathbf{v}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \leq \frac{C}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma_3, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad C > 0,$$

отримуємо, що ядро інтегрального оператора в (11) є слабосингулярним і тому цей оператор є компактним в  $L^2(\Gamma_3)$ . Твердження теореми випливає з теорії Рісса – Шаудера [14].  $\blacklozenge$

Зважаючи на вигляд матриці Гріна (див. теорему 2), інтегральне рівняння (11) можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{2} u(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_3} \left( \frac{Q_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) u(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma_1} G_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad (12)$$

де

$$Q_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\alpha(\mathbf{y})}{\lambda^{(2)}} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right), \\ Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha(\mathbf{y})}{\lambda^{(2)}} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left( \frac{1}{|\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}^*|} - \frac{1}{|\tilde{\mathbf{x}}_{n-2} - \mathbf{y}^*|} \right) \right] + \\ + \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{v}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|^3} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left( \frac{\mathbf{v}(\mathbf{y}) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_n^* - \mathbf{y})}{|\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}^*|^3} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{y}) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_{n-2}^* - \mathbf{y})}{|\tilde{\mathbf{x}}_{n-2} - \mathbf{y}^*|^3} \right) \right].$$

**4. Чисельне розв'язування інтегрального рівняння.** Будемо вважати, що поверхню порожнини  $\Gamma_3$  можна взаємно однозначно відобразити в одиничну сферу  $\Omega$ , тобто існує біективне відображення  $q: \Omega \rightarrow \Gamma_3$ . Для наближеного розв'язування інтегрального рівняння (12) скористаємось підходом, розвиненим в [10, 11, 13, 17]. При цьому для чисельного інтегрування неперервних функцій застосуємо квадратурну формулу

$$\int_{\Omega} f(\hat{\mathbf{y}}) ds(\hat{\mathbf{y}}) \approx \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{a}_{s'} f(\mathbf{p}(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})), \quad (13)$$

де  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{p}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , – параметризація одиничної сфери, квадратурні вузли визначаються як

$$\varphi_{\rho'} = \frac{\rho' \pi}{n' + 1}, \quad \theta_{s'} = \arccos z_{s'}$$

з нулями  $z_{s'}$  поліномів Лежандра  $P_{n'+1}$  і квадратурні ваги мають вигляд

$$\tilde{a}_{s'} = \frac{2(1 - z_{s'}^2)}{((n' + 1)P_{n'}(z_{s'}))^2}, \quad \tilde{\mu}_{\rho'} = \frac{\pi}{n' + 1}.$$

Ця формула належить до класу квадратур Гаусса – Лежандра і отримана шляхом апроксимації функції  $f$  через лінійну комбінацію сферичних функцій (гармонік) порядку, меншого або рівного  $n' + 1$ , і подальшого точного інтегрування (див. [8, 17]). За побудовою формула (13) є точною для сферичних функцій порядку, меншого або рівного  $n' + 1$ .

Інтегральне рівняння (12) має слабку особливість типу  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}$ . Нехай  $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$  – полюс сфери. Квадратура для невластного інтеграла в цьому випадку має вигляд [14]

$$\int_{\Omega} \frac{f(\hat{\mathbf{y}})}{|\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{y}}|} ds(\hat{\mathbf{y}}) \approx \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{b}_{s'} f(\mathbf{p}(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})) \quad (14)$$

з ваговими коефіцієнтами

$$\tilde{b}_{s'} = \frac{\pi \tilde{a}_{s'}}{n' + 1} \sum_{\ell=0}^{n'} P_{\ell}(z_{s'}).$$

У [10, 11] показано, що квадратури (13) і (14) мають супералгебраїчну швидкість збіжності, а для аналітичних функцій  $f$  – експоненційну.

Після підстановки  $\mathbf{y} = q(\hat{\mathbf{y}})$  інтегральне рівняння (12) по поверхні  $\Gamma_3$  зводиться до рівняння по сфері  $\Omega$ :

$$\frac{1}{2} \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) - \int_{\Omega} \left( \frac{\tilde{Q}_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|} + \tilde{Q}_2(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \right) J_q(\hat{\mathbf{y}}) \tilde{u}(\hat{\mathbf{y}}) ds(\hat{\mathbf{y}}) = f(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad (15)$$

де  $J_q$  – якобіан відображення  $q$ ,

$$\tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) = u(q(\hat{\mathbf{x}})), \quad \tilde{Q}_{\ell}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = Q_{\ell}(q(\hat{\mathbf{x}}), q(\hat{\mathbf{y}})),$$

$$F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|}{|q(\hat{\mathbf{x}}) - q(\hat{\mathbf{y}})|}, \quad f(\hat{\mathbf{x}}) = \iint_{\mathbb{R}^2} G_{12}(q(\hat{\mathbf{x}}), \boldsymbol{\tau}) \beta(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}.$$

Для переміщення сингулярності в рівнянні (15) у полюс сфери означимо для  $\psi \in \mathbb{R}$  такі ортогональні перетворення:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{T}}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Ортогональне лінійне перетворення  $\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\varphi) \mathbf{D}_{\mathbf{T}}(\theta) \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(-\varphi)$  має властивість  $\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{n}}$  для  $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$  і, позначивши  $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{y}$ , отримуємо, що  $|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}| = |\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\boldsymbol{\eta}})| = |\hat{\mathbf{n}} - \hat{\boldsymbol{\eta}}|$ . В результаті рівняння (15) набуває вигляду

$$\frac{1}{2} \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) - \int_{\Omega} \left( \frac{\tilde{Q}_1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}) F(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}})}{|\hat{\mathbf{n}} - \hat{\boldsymbol{\eta}}|} + \tilde{Q}_2(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}) \right) J_q(\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}) \tilde{u}(\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}) ds(\hat{\boldsymbol{\eta}}) = f(\hat{\mathbf{x}}), \quad (16)$$

де  $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$ . Зауважимо, що тепер функція  $F(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}})$  є неперервною за  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  при фіксованих  $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$ . Застосувавши квадратури (13) і (14) до (16), отримуємо апроксимаційне рівняння

$$\frac{1}{2} \tilde{u}_n(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{\rho=0}^{2n'+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\mu}_{\rho} [\tilde{b}_s K_1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'}) + \tilde{a}_s K_2(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})] \tilde{u}_n(\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'}) = f(\hat{\mathbf{x}}). \quad (17)$$

Тут позначено

$$K_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = Q_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) J_q(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}), \\ K_2(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = Q_2(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) J_q(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}), \quad \hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'} = \mathbf{p}(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'}).$$

Через залежність  $\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'}$  від  $\hat{\mathbf{x}}$  використання колокації в (17) (класичний метод Nyström'a) не приводить до лінійної системи. Тому до рівняння (17) застосуємо проєкційний метод Гальоркіна [8]. Подамо  $\tilde{u}_n$  у вигляді лінійної комбінації

$$\tilde{u}_n = \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k a_k^m Y_{k,m}^R, \quad (18)$$

де

$$Y_{k,m}^R = \begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{Im} Y_{k,|m|}, & 0 < m < k, \\ \operatorname{Re} Y_{k,|m|}, & m = 0, \\ \sqrt{2} \operatorname{Re} Y_{k,|m|}, & -k \leq m < 0, \end{cases}$$

зі сферичними функціями  $Y_{k,m}$  [4], і розглянемо скалярний добуток

$$(v, w) = \sum_{\rho=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_{\rho} a_s v(\hat{\mathbf{y}}_{s\rho}) w(\hat{\mathbf{y}}_{s\rho}).$$

Домножуючи рівняння (17) скалярно на базисні функції  $Y_{k,m}^R$  з урахуванням подання (18), приходимо до системи лінійних рівнянь

$$\frac{1}{2} a_{k'}^{m'} - \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k a_k^m R_{kk'}^{mm'} = \sum_{\rho=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_{\rho} a_s f(\hat{\mathbf{x}}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\hat{\mathbf{x}}_{s\rho}) \quad (19)$$

для  $k' = 0, \dots, n$ ,  $m' = -k', \dots, k'$  з коефіцієнтами

$$R_{kk'}^{mm'} = \sum_{\rho,s} \sum_{\rho',s'} \mu_{\rho} \tilde{\mu}_{\rho'} a_s [\tilde{b}_s K_1(\hat{\mathbf{x}}_{s\rho}, \hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'}) + \tilde{a}_s K_2(\hat{\mathbf{x}}_{s\rho}, \hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})] Y_{k',m'}^R(\hat{\mathbf{x}}_{s\rho}) Y_{k,m}^R(\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'}) \quad (20)$$

з  $\hat{\mathbf{x}}_{s\rho} = \mathbf{p}(\theta_s, \varphi_{\rho})$  і  $\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'} = \mathbf{T}_{\mathbf{p}(\theta_s, \varphi_{\rho})}^{-1} \mathbf{p}(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})$ .

Зауважимо, що розмірність системи лінійних рівнянь (19) складає  $(n+1)^2 \times (n+1)^2$ .

Наближене обчислення інтеграла по площині здійснюємо за допомогою sinc-квадратури [16]:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \approx h_{\infty}^{(1)} h_{\infty}^{(2)} \sum_{i=-M_1}^{M_1} \sum_{j=-M_2}^{M_2} G_{21}(q(\hat{\mathbf{x}}), (ih_{\infty}^{(1)}, jh_{\infty}^{(2)})) \beta(ih_{\infty}^{(1)}, jh_{\infty}^{(2)}), \quad (21)$$

де  $h_{\infty}^{(\ell)} = M_{\ell}^{-1/2}$ ,  $\ell = 1, 2$ .

Відповідно до (10) чисельні розв'язки вихідної задачі знаходимо за формулами

$$\begin{aligned} t_{\ell}(\mathbf{x}) \approx & h_{\infty}^{(1)} h_{\infty}^{(2)} \sum_{i=-M_1}^{M_1} \sum_{j=-M_2}^{M_2} G_{\ell 1}(\mathbf{x}, (ih_{\infty}^{(1)}, jh_{\infty}^{(2)})) \beta(ih_{\infty}^{(1)}, jh_{\infty}^{(2)}) + \\ & + \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k a_k^m \sum_{\rho, s'} \tilde{\mu}_{\rho} \tilde{a}_s Y_{k,m}^R(\hat{\mathbf{y}}_{s\rho'}) J_q(\hat{\mathbf{y}}_{s\rho'}) \times \\ & \times [G_{\ell 2}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}_{s\rho'}) \alpha(\hat{\mathbf{y}}_{s\rho'}) + \lambda^{(2)} \tilde{G}_{\ell 2}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}_{s\rho'})], \end{aligned} \quad (22)$$

де  $\tilde{G}_{\ell 2}$  – параметризація нормальної похідної  $\frac{\partial G_{\ell 2}}{\partial \mathbf{v}}$  на поверхні  $\Gamma_3$ ,  $\ell = 1, 2$ .

Ґрунтуючись на результатах в [10], де розглянуто чисельне розв'язування інтегрального рівняння другого роду задачі дифракції, не складає труднощів довести, що при належній точності обчислення інтегралів у правій частині (21) при  $\alpha \in C^r(\Gamma_3)$ ,  $r > 0$ , і  $\beta \in C(\Gamma_1)$  для розв'язку інтегрального рівняння (12) і наближеного розв'язку (18) для достатньо великих  $n$  має місце оцінка похибки

$$\|u - \tilde{u}_n\|_{\infty, \Gamma_3} \leq C_r n^{-r}.$$

## 5. Чисельні експерименти.

**Приклад 1.** Розглянемо задачу (1)–(5), коли  $\beta(\mathbf{x}) = q_0 e^{-k|\mathbf{x}|^2}$  на  $\Gamma_1$ , а гранична поверхня  $\Gamma_3$  – еліпсоїд з півосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , центр якого знаходиться на віддалі  $c_0$  від поверхні півпростору (рис. 1). Чисельні розрахунки проводились при  $\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)} = 0.75$ ,  $h/\ell = 1$ ,  $a/\ell = 1$ ,  $b/\ell = 0.5$ ,  $c/\ell = 0.75$ ,  $c_0/\ell = 3$ ,  $\alpha/\lambda^{(2)} = 1$ ,  $\ell = 1/\sqrt{k}$ . У табл. 1 наведено наближені значення безрозмірних температур  $T = t\lambda^{(2)}/(q_0\ell)$  у випадку  $q_0 = 1$  і  $k = 1$  при різних значеннях параметра дискретизації  $n$  і фіксованих  $M_1 = M_2 = 100$  і точності  $\varepsilon = 10^{-8}$  підсумовування рядів в елементах матриці Ґріна (теорема 2). Як бачимо, має місце очікувана супералгебраїчна збіжність. Зауважимо також, що обчислення функцій  $t_1$  і  $t_2$  за формулами (22) на  $\Gamma_2$  дає, як і слід було очікувати, однакові результати.

Табл.1

$n$	$x = (0, 0, 0.5)$	$x = (0, 0, 1.5)$	$x = (0, 0, 4.5)$
4	0.16715042	0.08477078	0.03295008
8	0.16715145	0.08485896	0.03299230
16	0.16715145	0.08485973	0.03299267
32	0.16715145	0.08485973	0.03299267

На рис. 2 зображено розподіл температур (для вхідних даних прикладу 1), отриманий при  $n = 8$ ,  $M_1 = M_2 = 50$  і  $\varepsilon = 10^{-5}$  у перерізах  $x_3/\ell = 0.5$  (рис. 2a) і  $x_3/\ell = 4.5$  (рис. 2б).



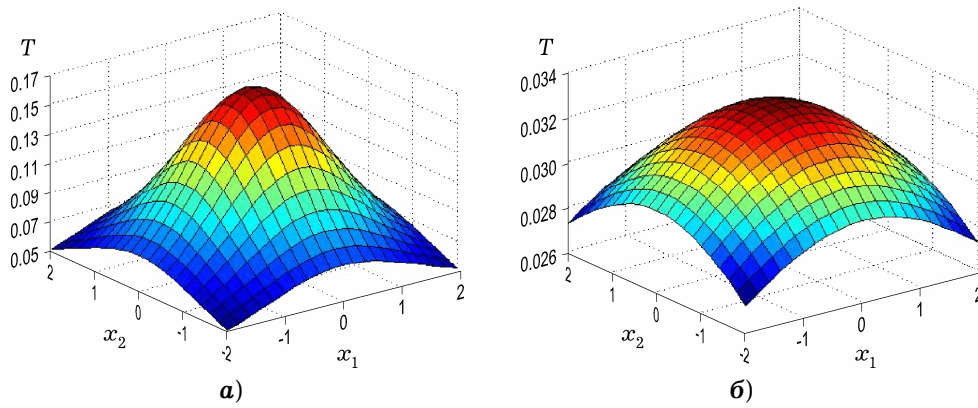


Рис. 2

**Приклад 2.** Нехай поверхня порожнини має параметричне подання

$$\Gamma_3 = \{ \mathbf{z}(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) \mathbf{p}(\theta, \varphi) + \mathbf{c}, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi] \},$$

де  $\mathbf{c} = (0, 0, 3)$  і  $r(\theta, \varphi) = 0.8 \sqrt{0.8 + 0.5(\cos 2\varphi - 1)(\cos 4\theta - 1)}$ . Граничні поверхні такої частково необмеженої області зображено на рис. 3. Граничну функцію

задамо як  $\beta(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{k(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2}$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_1$ . Інші вхідні дані такі ж, як і в при-

кладі 1. На рис. 4 зображено наближений розв'язок задачі (1)–(5) з параметрами дискретизації, як і в попередньому прикладі, у перерізах  $x_3/\ell = 0.5$  (рис. 4а) і  $x_3/\ell = 4.5$  (рис. 4б). Як бачимо з отриманих результатів, найбільш істотний вплив порожнини на розподіл температури має місце в її околі і суттєво залежить від форми поверхні.

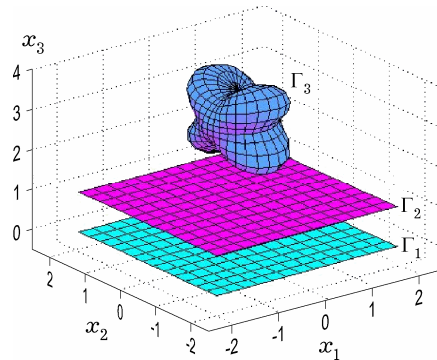


Рис. 3

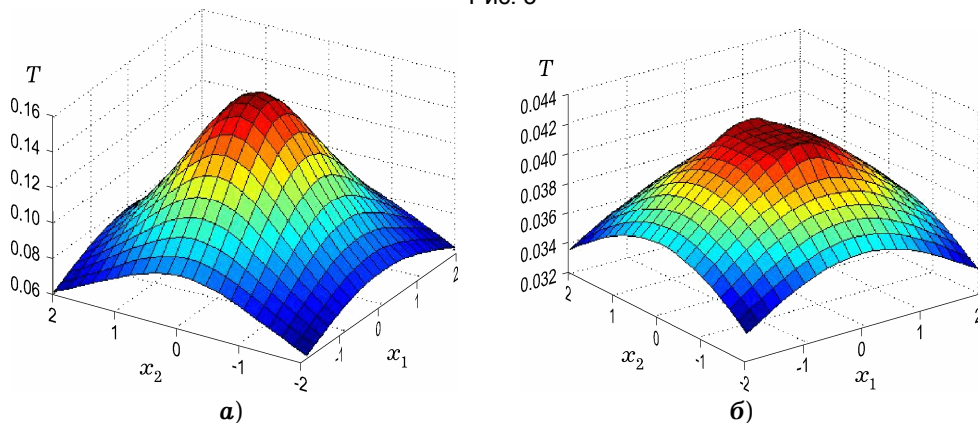


Рис. 4

**6. Висновки.** Використання матриці Гріна дало можливість редукувати крайову задачу в частково необмеженій багатопаровій області з порожниною до граничного інтегрального рівняння на поверхні порожнини. Для класу поверхонь, які гомеоморфні сфері, запропоновано проєкційний метод розв'язування інтегрального рівняння з супералгебраїчним порядком збіжності.

У подальшому становить інтерес застосування непрямого варіанту методу інтегральних рівнянь до крайових задач стаціонарної теплопровідності в шаруватій області з умовами типу Діріхле, Неймана і Робіна на поверхні порожнини.

Автори висловлюють вдячність доктор О. Іванишин (університет м. Дармштадт, ФРН) за надані консультації стосовно імплементації чисельного методу розв'язування інтегральних рівнянь.

1. Гавеля С. П. Об одном способе построения матриц Грина для сочлененных оболочек // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1969. – № 12. – С. 1107–1111.
2. Михаськів В. В., Станкевич В. З., Глушков Є. В., Глушкова Н. В. Динамічні напруження у складеному тілі з круговою тріщиною за ковзного контакту його компонент // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 80–87.  
Te same: Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z., Glushkov E. V., Glushkova N. V. Dynamic stresses in a compound body with circular crack under sliding contact on an interface // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 590–599.
3. Процюк Б. В. Функції Гріна стаціонарних задач теплопровідності для трансверсально-ізотропних багатопарових тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 3. – С. 80–88.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.  
Te same: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables* / Eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. – Washington: U.S. Gov. Print. Office, 1964.
5. Chapko R. On a hybrid method for shape reconstruction of buried object in an elastostatic half plane // Inverse Probl. Imag. – 2009. – **3**. – P. 199–210.
6. Chapko R. On the numerical solution of direct and inverse problems for the heat equation in a semi-infinite region // J. Comput. and Appl. Math. – 1999. – **108**. – P. 41–55.
7. Chapko R., Johansson B. T. An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in semi-infinite regions // Inverse Probl. Imag. – 2008. – **2**. – P. 317–333.
8. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. – New York: Springer-Verlag, 1993. – 334 p.
9. Duffy D. G. Green's function with application. – Boca Raton–London–New York–Washington: Chapman & Hall/CRC, 2001. – 404 p.
10. Ganesh M., Graham I. G. A high-order algorithm for obstacle scattering in three dimensions // J. Comput. Phys. – 2004. – **198**. – P. 211–242.
11. Graham I. G., Sloan I. H. Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in  $\mathbb{R}^3$  // Numer. Math. – 2002. – **92**, No. 2. – P. 289–323.
12. Hsiao G. C., Wendland W. L. Boundary integral equations. – New York: Springer-Verlag, 2008. – 640 p.
13. Ivanyshyn O., Kress R. Identification of sound-soft 3D obstacles from phaseless data // Inverse Probl. Imag. – 2010. – **4**. – P. 131–149.
14. Kress R. Linear integral equations. – New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. – 365 p.
15. Melnikov Y. A. Influence functions and matrices. – New York–Basel: Marcel Dekker, 1998. – 456 p.
16. Stenger F. Numerical methods based on sinc and analytic functions. – New York: Springer-Verlag, 1993. – xvi + 565 p.
17. Wienert L. Die numerische Approximation von Randintegraloperatoren für die Helmholtzgleichung im  $\mathbb{R}^3$ : Dissertation. – Göttingen, 1990. – PhD thesis. University of Göttingen.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ  
СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ  
СО СЛОЕМ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ГРИНА**

Рассматривается граничная задача стационарной теплопроводности в трехмерной области, образованной слоем и полупространством с полостью, которая ограничена гладкой замкнутой поверхностью. На границе контакта слоя и полупространства выполняются условия идеального теплового контакта, на другой границе слоя задан тепловой поток. Через поверхность полости осуществляется конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. С помощью построенной матрицы Грина для соответствующей слоистой области граничная задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с неизвестной функцией на поверхности полости. Численное решение осуществлено с использованием *sinc*-кватратур, кватратурных формул Гаусса – Лежандра и проекционного метода со сферическими базисными функциями. Приведены примеры численных экспериментов.

**NUMERICAL SOLUTION OF 3D STATIONARY HEAT  
CONDUCTION BOUNDARY-VALUE PROBLEM IN A HALF-SPACE  
WITH A LAYER BY GREEN'S FUNCTIONS TECHNIQUE**

*A stationary heat conduction boundary-value problem in a 3D domain formed by an infinite strip layer and half-space with a cavity bounded by the smooth closed surface is considered. The ideal contact thermal conditions on the interface layer boundary are satisfied. The heat flux on the other layer boundary is given and through the cavity surface the convective heat exchange with the environment of zero temperature is realized. Using Green's matrix constructed for the corresponding layered domain the boundary-value problem is reduced to Fredholm integral equation of the second kind with unknown function on the cavity surface. Numerical solution is realized by projection method with spherical basis functions and with use of sinc-quadratures and Gauss – Legendre quadrature rules. The results of numerical experiments are presented.*

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано  
01.02.11