УДК 539.3

Р. М. Кушнір[1], М. М. Николишин[1], У. В. Жидик[2], В. М. Флячок[3]

ДО ТЕОРІЇ НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК З ВЛАСНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Розвинуто уточнену математичну модель динамічної задачі неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями. На основі цієї моделі сформульовано низку варіаційних принципів та доведено деякі загальні теореми.

Вступ. При проектуванні тонкостінних елементів конструкцій потрібно враховувати внутрішні (власні) напруження, які зумовлені несумісними початковими деформаціями (дисторсіями) [4, 7, 9, 14]. Природа дисторсій різноманітна. Вони, наприклад, можуть виникнути внаслідок неоднорідності проходження технологічних процесів при виготовленні елементів конструкцій, внаслідок помилок монтажу, а також як початкові недосконалості в будівельних конструкціях. Тому розвиток і вдосконалення математичних моделей для розрахунку оболонкових елементів конструкцій із власними напруженнями залишається важливою проблемою. Більшість досліджень у цьому напрямі стосувались однорідних конструкцій на основі моделей ізотропного [6, 9], трансверсально ізотропного [8] або ортотропного [10, 14] тіла. Для неоднорідних і анізотропних матеріалів такі дослідження проводилися значно менше [3, 5].

Метою статті є розвиток деяких основних питань лінійної уточненої теорії неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями (початковими деформаціями).

Загальний варіаційний принцип. Вихідні рівняння. Розглянемо пружне неоднорідне анізотропне тіло, яке має об'єм v, обмежене поверхнею Σ і точки простору якого віднесено до криволінійної системи координат $x^i = (x^\alpha, x^3)$. Будемо вважати, що у кожній точці криволінійно анізотропного тіла є лише одна площина симетрії, яка паралельна до поверхні $x^3 = \text{const}$. Нехай у момент часу τ під дією масових сил X^i, поверхневих навантажень $\sigma^i = \sigma^{ij} n_j$ і викликаних полем дисторсій e_{ij}^0 власних напружень [4, 7, 14] тіло буде деформуватися. При цьому виникнуть переміщення $U^i(x^i,\tau)$, деформації $e_{ij}(x^i,\tau)$ і напруження $\sigma^{ij}(x^i,\tau)$, що задовольняють добре відомі [2, 7, 12] рівняння лінійної теорії пружності, які можна одержати із умови стаціонарності $\delta\Phi = 0$ функціонала [1]

$$\Phi = \iiint\limits_v \Big\{ W_e(e_{ij}, e_{ij}^0) - \sigma^{ij} * \Big[e_{ij} - \frac{1}{2}(\nabla_j U_i + \nabla_i U_j) \Big] - X^i * U_i + \\ + \frac{1}{2}\rho \dot{U}^i * \dot{U}_i - \mathbf{V}^0 \mathbf{U}(x^i,\tau') + \rho \dot{\mathbf{U}}(x^i,\tau')[\mathbf{U}(x^i,0) - \mathbf{U}^0] \Big\} dv - \\ - \iint\limits_{\Sigma_u} \sigma^i * (U_i - \tilde{U}_i)\, d\Sigma - \iint\limits_{\Sigma_\sigma} \tilde{\sigma}^i * U_i \, d\Sigma , \tag{1}$$

де

$$W_e(e_{ij}, e_{ij}^0) = \frac{1}{2} C^{\alpha\beta\gamma\delta}(e_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}^0) * (e_{\gamma\delta} - e_{\gamma\delta}^0) + \\ + \frac{1}{2} C^{3333}(e_{33} - e_{33}^0) * (e_{33} - e_{33}^0) + C^{\alpha\beta 33}(e_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}^0) * (e_{33} - e_{33}^0) + \\ + 2C^{\alpha 3\beta 3}(e_{\alpha 3} - e_{\alpha 3}^0) * (e_{\beta 3} - e_{\beta 3}^0) .$$

Тут $C^{ijk\ell}(x^i)$ – компоненти тензора пружності анізотропного матеріалу; $\tilde{U}_i$, $\tilde{\sigma}^i$ – задані відповідно на поверхнях Σ_u і Σ_σ $(\Sigma = \Sigma_u + \Sigma_\sigma)$ компоненти вектора переміщення і напруження; $\mathbf{U}^0$, $\mathbf{V}^0$ – задані в початковий момент часу вектори переміщення і швидкості; $\rho(x^i)$ – густина матеріалу; n_i – компоненти одиничного вектора нормалі до поверхні Σ; $e^0_{ij}(x^i)$ – компоненти тензора вільної від напружень деформації (дисторсії) [4, 6, 7, 9]; δ – символ варіації; ∇_i – коваріантна похідна у тривимірному просторі; символом «$*$» позначено інтеграл згортки; крапкою зверху позначено похідну за часом; індекси, позначені грецькими буквами, приймають значення 1, 2, а латинськими – 1, 2, 3; використовуємо звичайне правило підсумовування за індексами, що повторюються.

Зведемо тривимірну варіаційну задачу неоднорідного анізотропного тіла до відповідної двовимірної задачі теорії оболонок. Для цього подамо компоненти вектора переміщень $U_i(x^i,\tau)$ у вигляді лінійних функцій [3, 5, 13] від нормальної координати x^3:

$$U_i(x^i,\tau) = u_i(x^\alpha,\tau) + x^3\gamma_i(x^\alpha,\tau)\,, \tag{2}$$

де $u_i(x^\alpha,\tau)$, $\gamma_i(x^\alpha,\tau)$ – узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки.

Тоді способом усереднення за координатою x^3 із (1) одержимо такий двовимірний функціонал:

$$\begin{aligned}\Phi_0 = \iint_G \Big\{ & W_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{æ},\boldsymbol{\varepsilon}^0,\boldsymbol{æ}^0) - N^{\alpha\beta} * \big[\varepsilon_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha) - b_{\alpha\beta}u_3\big] - \\
& - N^{\alpha 3} * [\varepsilon_{\alpha 3} - (\gamma_\alpha + \nabla_\alpha u_3 + b^\nu_\alpha u_\nu)] - \\
& - M^{\alpha\beta} * \big[æ_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}(\nabla_\alpha\gamma_\beta + \nabla_\beta\gamma_\alpha) - b_{\alpha\beta}\gamma_3\big] - \\
& - M^{\alpha 3} * (æ_{\alpha 3} - \nabla_\alpha\gamma_3) - N^{33} * (\varepsilon_{33} - \gamma_3) - (q^i * u_i + \\
& + m^i * \gamma_i) + \tfrac{1}{2}(\dot{I}^i\dot{u}_i + \dot{J}^i\dot{\gamma}_i) + [u_i(x^\alpha,0) - u^0_i]\dot{I}^i(x^\alpha,\tau') + \\
& + [\gamma_i(x^\alpha,0) - \gamma^0_i]\dot{J}^i(x^\alpha,\tau') - v^0_i I^i(x^\alpha,\tau') - \chi^0_i J^i(x^\alpha,\tau')\Big\} dG - \\
& - \int_{g_u} [N^i * (u_i - \tilde{u}_i) + M^i * (\gamma_i - \tilde{\gamma}_i)]\,dg - \\
& - \int_{g_\sigma} (\tilde{N}^i * u_i + \tilde{M}^i * \gamma_i)\,dg\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Тут

$$\begin{aligned}W_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{æ},\boldsymbol{\varepsilon}^0,\boldsymbol{æ}^0) = \tfrac{1}{2}\big[& D^{\alpha\beta\delta\gamma}_{(1)}(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^0_{\alpha\beta}) * (\varepsilon_{\delta\gamma} - \varepsilon^0_{\delta\gamma}) + D^{\alpha 3\delta 3}_{(1)}(\varepsilon_{\alpha 3} - \\
& - \varepsilon^0_{\alpha 3}) * (\varepsilon_{\delta 3} - \varepsilon^0_{\delta 3}) + 2D^{\alpha\beta 33}_{(1)}(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^0_{\alpha\beta}) * (\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) + \\
& + D^{3333}_{(1)}(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) * (\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) + 2D^{\alpha\beta\delta\gamma}_{(2)}(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^0_{\alpha\beta}) * (æ_{\delta\gamma} -\end{aligned}$$

$$-\text{æ}^0_{\delta\gamma}) + 2D^{\alpha 3\delta 3}_{(2)}(\varepsilon_{\alpha 3} - \varepsilon^0_{\alpha 3}) * (\text{æ}_{\delta 3} - \text{æ}^0_{\delta 3}) + 2D^{\alpha\beta 33}_{(2)}(\text{æ}_{\alpha\beta} -$$

$$-\text{æ}^0_{\alpha\beta}) * (\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) + D^{\alpha\beta\delta\gamma}_{(3)}(\text{æ}_{\alpha\beta} - \text{æ}^0_{\alpha\beta}) * (\text{æ}_{\delta\gamma} - \text{æ}^0_{\delta\gamma}) +$$

$$+ D^{\alpha 3\delta 3}_{(3)}(\text{æ}_{\alpha 3} - \text{æ}^0_{\alpha 3}) * (\text{æ}_{\delta 3} - \text{æ}^0_{\delta 3})\big],$$

$$D^{ijk\ell}_{(r)} = \int_{-h}^{h} C^{ipkq}\delta^j_a \delta^\ell_b \mu\mu^a_p \mu^b_q (x^3)^{r-1}\, dz,$$

$$D^{ijk\ell}_{(r)} = D^{k\ell ij}_{(r)}, \qquad D^{\alpha\beta\lambda 3}_{(r)} = D^{333\alpha}_{(r)} = 0,$$

$$I^i = \rho_{(1)}u^i + \rho_{(2)}\gamma^i, \qquad J^i = \rho_{(2)}u^i + \rho_{(3)}\gamma^i,$$

$$\rho_{(r)} = \int_{-h}^{h} \mu\rho(x^3)^{r-1}\, dz, \qquad r = 1,2,3,$$

$N^i = N^{\alpha i}\nu_\alpha$; $M^i = M^{\alpha i}\nu_\alpha$; $\mu = \det(\mu^\beta_\alpha)$; $\mu^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - x^3 b^\beta_\alpha$ – так звані тензори оболонки [13]; b^β_α – поверхневий тензор кривини; ∇_α – символ коваріантної похідної в метриці серединної поверхні; $2h$ – товщина оболонки; ν_α – компоненти одиничного вектора нормалі до контуру g, який обмежує серединну поверхню G; $\mathbf{q} = \{q^\alpha, q^3\}$, $\mathbf{m} = \{m^\alpha, m^3\}$ – зовнішнє поверхневе навантаження; $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \{\varepsilon^0_{\alpha\beta}, \varepsilon^0_{\alpha 3}, \varepsilon^0_{33}\}$, $\boldsymbol{\text{æ}}^0 = \{\text{æ}^0_{\alpha\beta}, \text{æ}^0_{\alpha 3}\}$ – інтегральні характеристики компонентів тензора дисторсій; $\mathbf{N} = \{N^{\alpha\beta}, N^{\alpha 3}, N^{33}\}$, $\mathbf{M} = \{M^{\alpha\beta}, M^{\alpha 3}\}$ – віднесені до одиниці довжини відповідних елементів дуг серединної поверхні компоненти зусиль і моментів; $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha 3}, \varepsilon_{33}\}$, $\boldsymbol{\text{æ}} = \{\text{æ}_{\alpha\beta}, \text{æ}_{\alpha 3}\}$ – компоненти деформації серединної поверхні; $\tilde{u}_i$, $\tilde{\gamma}_i$ і $\tilde{N}^i$, $\tilde{M}^i$ – задані відповідно на g_u і g_σ $(g = g_u + g_\sigma)$ компоненти узагальнених переміщень і зусиль-моментів; u^0_i, γ^0_i і v^0_i, χ^0_i – задані в початковий момент часу узагальнені переміщення і їх швидкості; δ^j_i – символ Кронекера.

Відносно функціонала (3) справджується ***загальна варіаційна***

Теорема. *Рівняннями Ейлера варіаційної задачі*

$$\delta\Phi_0 = 0 \tag{4}$$

є повна система диференціальних рівнянь теорії неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями, а природними (ейлеровими) крайовими умовами – граничні умови на контурі оболонки g та початкові умови в момент часу $\tau = 0$.

Для д о в е д е н н я теореми необхідно проваріювати функціонал (3) за всіма функціональними аргументами $\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\text{æ}}, \mathbf{N}, \mathbf{M}$, які вважатимемо незалежними, а їх варіації довільними [1, 2]. Далі, прирівнюючи до нуля вирази, що є множниками біля варіацій $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\gamma}$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, $\delta\boldsymbol{\text{æ}}$, $\delta\mathbf{N}$, $\delta\mathbf{M}$, $\delta\mathbf{u}(x^\alpha, \tau')$, $\delta\boldsymbol{\gamma}(x^\alpha, \tau')$, $\delta\dot{\mathbf{u}}(x^\alpha, \tau')$, $\delta\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x^\alpha, \tau')$, для розглядуваних оболонок одержимо

– рівняння руху:

$$\nabla_\beta N^{\beta\alpha} - b^\alpha_\beta N^{\beta 3} + q^\alpha = \ddot{I}^\alpha, \qquad \nabla_\beta N^{\beta 3} + b_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha} + q^3 = \ddot{I}^3,$$

$$\nabla_\beta M^{\beta\alpha} - N^{\alpha 3} + m^\alpha = \ddot{J}^\alpha, \qquad \nabla_\beta M^{\beta 3} + b_{\alpha\beta} M^{\beta\alpha} - N^{33} + m^3 = \ddot{J}^3; \tag{5}$$

– геометричні співвідношення:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta) - b_{\alpha\beta} u_3, \qquad \varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha + \nabla_\alpha u_3 + b_\alpha^\beta u_\beta,$$

$$\text{æ}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta \gamma_\alpha + \nabla_\alpha \gamma_\beta) - b_{\alpha\beta}\gamma_3, \qquad \text{æ}_{\alpha 3} = \nabla_\alpha \gamma_3, \qquad \varepsilon_{33} = \gamma_3; \tag{6}$$

– фізичні співвідношення:

$$N^{\nu\alpha} = D_{(1)}^{\alpha\nu\delta\gamma} \varepsilon_{\delta\gamma} + D_{(2)}^{\alpha\nu\delta\gamma} \text{æ}_{\delta\gamma} + D_{(1)}^{\alpha\nu 33} \varepsilon_{33} - N_0^{\nu\alpha},$$

$$N^{33} = D_{(1)}^{33\delta\gamma} \varepsilon_{\delta\gamma} + D_{(2)}^{33\delta\gamma} \text{æ}_{\delta\gamma} + D_{(1)}^{3333} \varepsilon_{33} - N_0^{33},$$

$$M^{\nu\alpha} = D_{(2)}^{\alpha\nu\delta\gamma} \varepsilon_{\delta\gamma} + D_{(3)}^{\alpha\nu\delta\gamma} \text{æ}_{\delta\gamma} + D_{(2)}^{\alpha\nu 33} \varepsilon_{33} - M_0^{\nu\alpha},$$

$$N^{\alpha 3} = D_{(1)}^{\alpha 3\delta 3} \varepsilon_{\delta 3} + D_{(2)}^{\alpha 3\delta 3} \text{æ}_{\delta 3} - N_0^{\alpha 3},$$

$$M^{\alpha 3} = D_{(2)}^{\alpha 3\delta 3} \varepsilon_{\delta 3} + D_{(3)}^{\alpha 3\delta 3} \text{æ}_{\delta 3} - M_0^{\alpha 3}, \tag{7}$$

де

$$N_0^{\nu\alpha} = D_{(1)}^{\alpha\nu\delta\gamma} \varepsilon_{\delta\gamma}^0 + D_{(2)}^{\alpha\nu\delta\gamma} \text{æ}_{\delta\gamma}^0 + D_{(1)}^{\alpha\nu 33} \varepsilon_{33}^0,$$

$$N_0^{33} = D_{(1)}^{33\delta\gamma} \varepsilon_{\delta\gamma}^0 + D_{(2)}^{33\delta\gamma} \text{æ}_{\delta\gamma}^0 + D_{(1)}^{3333} \varepsilon_{33}^0,$$

$$M_0^{\nu\alpha} = D_{(2)}^{\alpha\nu\delta\gamma} \varepsilon_{\delta\gamma}^0 + D_{(3)}^{\alpha\nu\delta\gamma} \text{æ}_{\delta 3}^0 + D_{(2)}^{\alpha\nu 33} \varepsilon_{33}^0,$$

$$N_0^{\alpha 3} = D_{(1)}^{\alpha 3\delta 3} \varepsilon_{\delta 3}^0 + D_{(2)}^{\alpha 3\delta 3} \text{æ}_{\delta 3}^0, \qquad M_0^{\alpha 3} = D_{(2)}^{\alpha 3\delta 3} \varepsilon_{\delta 3}^0 + D_{(3)}^{\alpha 3\delta 3} \text{æ}_{\delta 3}^0;$$

– граничні умови

статичні на частині контуру g_σ:

$$N^{\alpha i} \nu_\alpha = \tilde{N}^i, \qquad M^{\alpha i} \nu_\alpha = \tilde{M}^i, \tag{8}$$

геометричні на частині контуру g_u:

$$u_i = \tilde{u}_i, \qquad \gamma_i = \tilde{\gamma}_i; \tag{9}$$

– початкові умови при $\tau = 0$:

$$u_i = u_i^0, \qquad \gamma_i = \gamma_i^0, \qquad \dot{u}_i = v_i^0, \qquad \dot{\gamma}_i = \chi_i^0. \tag{10}$$

Теорему доведено. ♦

Таким чином, дійсний рух оболонки в проміжку часу $(0, \tau')$ *такий, що функціонал* Φ_0 *при цьому має стаціонарне значення.*

Сформульований ***варіаційний принцип***, як аналог відомого в теорії пружності принципу Ху–Васідзу [2], є найзагальнішим інтегральним варіаційним принципом теорії неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями. Як часткові випадки з нього випливають інші, менш загальні принципи.

За допомогою основних рівнянь, наведених вище, покажемо, що низка теорем лінійної теорії пружності [2, 7, 12] має аналоги в уточненій теорії неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями.

Принцип Лагранжа. Теорема про мінімум потенціальної енергії. Розглянемо загальне варіаційне рівняння (4) для статичних задач, вважаючи при цьому, що попередньо задовольняються співвідношення (6) і (7). Тоді одержимо таку рівність:

$$\delta\mathcal{E} = \delta U\,, \tag{11}$$

де робота зовнішніх сил і моментів $\mathcal{E}$ та енергія деформації U задаються формулами

$$\mathcal{E} = \iint\limits_G (q^i u_i + m^i \gamma_i)\, dG + \int\limits_g (N^i u_i + M^i \gamma_i)\, dg\,, \tag{12}$$

$$U = \mathcal{W}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{æ}) - \iint\limits_G (\mathbf{N}^0 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}^0 \boldsymbol{æ})\, dG\,, \tag{13}$$

причому

$$\mathcal{W}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{æ}) = \frac{1}{2} \iint\limits_G \big[D_{(1)}^{\alpha\beta\delta\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\delta\gamma} + D_{(1)}^{\alpha 3\delta 3} \varepsilon_{\alpha 3} \varepsilon_{\delta 3} + 2D_{(1)}^{\alpha\beta 33} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{33} + D_{(1)}^{3333} \varepsilon_{33} \varepsilon_{33} +$$
$$+ 2D_{(2)}^{\alpha\beta\delta\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta} æ_{\delta\gamma} + 2D_{(2)}^{\alpha 3\delta 3} \varepsilon_{\alpha 3} æ_{\delta 3} + 2D_{(2)}^{\alpha\beta 33} æ_{\alpha\beta} \varepsilon_{33} +$$
$$+ D_{(3)}^{\alpha\beta\delta\gamma} æ_{\alpha\beta} æ_{\delta\gamma} + D_{(3)}^{\alpha 3\delta 3} æ_{\alpha 3} æ_{\delta 3} \big]\,, \tag{14}$$

$$\mathbf{N}^0 = \{N_0^{\alpha\beta}, N_0^{\alpha 3}, N_0^{33}\}, \qquad \mathbf{M}^0 = \{M_0^{\alpha\beta}, M_0^{\alpha\beta}\}.$$

Співвідношення (11) є узагальненням ***принципу Лагранжа*** (принципу віртуальної енергії) [2, 7] на задачі неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями:

При віртуальному переміщенні оболонки із деякого миттєвого стану робота зовнішніх сил дорівнює зміні енергії деформації.

Якщо врахувати, що при віртуальному переміщенні поверхневі і контурні навантаження, а також початкові деформації не змінюються, а $\delta u_i = \delta\gamma_i = 0$ на тій частині контуру, на якій задано узагальнені переміщення, тобто на g_u, то з (11) одержимо рівняння

$$\delta\Pi = \delta\Big\{ \mathcal{W}_\varepsilon - \iint\limits_G (q^i u_i + m^i \gamma_i)\, dG - \int\limits_{g_\sigma} (\tilde{N}^i u_i + \tilde{M}^i \gamma_i)\, dg -$$
$$- \iint\limits_G (\mathbf{N}^0 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}^0 \boldsymbol{æ})\, dG \Big\} = 0\,, \tag{15}$$

яке узагальнює на задачі неоднорідних анізотропних оболонок з початковими деформаціями відому в лінійній теорії пружності [7] ***теорему про мінімум потенціальної енергії***:

Серед усіх кінематично можливих узагальнених переміщень в дійсності мають місце ті, для яких потенціальна енергія Π *досягає мінімуму.*

Мінімальне значення функціонала Π випливає із додатного значення його другої варіації $\delta^2\Pi > 0$.

Аналогія масових сил. Перетворимо в (13) інтеграл з початковими деформаціями, використавши геометричні співвідношення (6) і формулу Ґріна. Тоді рівняння (11) набуде вигляду

$$\delta\mathcal{W}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{æ}) = \iint\limits_G \big\{ (q^\alpha - \nabla_\nu N_0^{\alpha\nu} + b_\nu^\alpha N_0^{\nu 3}) \delta u_\alpha + (q^3 - \nabla_\nu N_0^{\nu 3} - b_{\alpha\nu} N_0^{\alpha\nu}) \delta u_3 +$$
$$+ (m^\alpha - \nabla_\nu M_0^{\alpha\nu} + N_0^{\alpha 3}) \delta\gamma_\alpha +$$
$$+ (m^3 - \nabla_\nu M_0^{\nu 3} - b_{\alpha\nu} M_0^{\alpha\nu} + N_0^{33}) \delta\gamma_3 \big\}\, dG +$$
$$+ \int\limits_g \big\{ (N^\alpha + N_0^{\alpha\delta} \nu_\delta) \delta u_\alpha + (N^3 + N_0^{\delta 3} \nu_\delta) \delta u_3 +$$
$$+ (M^\alpha + M_0^{\alpha\delta} \nu_\delta) \delta\gamma_\alpha + (M^3 + M_0^{\delta 3} \nu_\delta) \delta\gamma_3 \big\}\, dg\,. \tag{16}$$

Порівняємо цей вираз з віртуальною роботою в оболонці такої ж форми, виготовленої з такого ж матеріалу і яка деформується під дією поверхневих $\tilde{q}^{\alpha}, \tilde{q}^{3}, \tilde{m}^{\alpha}, \tilde{m}^{3}$ і контурних $\tilde{N}^{\alpha}, \tilde{N}^{3}, \tilde{M}^{\alpha}, \tilde{M}^{3}$ навантажень при $e_{ij}^{0} = 0$. В результаті одержимо ***аналогію масових сил*** [7] для динамічних задач теорії неоднорідних анізотропних оболонок з початковими деформаціями:

Напружено-деформований стан оболонки з початковими деформаціями буде таким же, як і оболонки без початкових деформацій, якщо до неї прикласти такі еквівалентні навантаження:

поверхневі

$$\tilde{q}^{\alpha} = q^{\alpha} - \nabla_{\delta} N_{0}^{\alpha\delta} + b_{\delta}^{\alpha} N_{0}^{\delta 3}, \qquad \tilde{q}^{3} = q^{3} - \nabla_{\delta} N_{0}^{\delta 3} - b_{\alpha\delta} N_{0}^{\alpha\delta},$$

$$\tilde{m}^{\alpha} = m^{\alpha} - \nabla_{\delta} M_{0}^{\alpha\delta} + N_{0}^{\alpha 3}, \qquad \tilde{m}^{3} = m^{3} - \nabla_{\delta} M_{0}^{\delta 3} - b_{\alpha\delta} M_{0}^{\alpha\delta} + N_{0}^{33}; \quad (17)$$

контурні

$$\tilde{N}^{\alpha} = N^{\alpha} + N_{0}^{\alpha\delta} \nu_{\delta}, \qquad \tilde{N}^{3} = N^{3} + N_{0}^{\delta 3} \nu_{\delta},$$

$$\tilde{M}^{\alpha} = M^{\alpha} + M_{0}^{\alpha\delta} \nu_{\delta}, \qquad \tilde{M}^{3} = M^{3} + M_{0}^{\delta 3} \nu_{\delta}. \quad (18)$$

Звідси випливає, таким чином, що розв'язок задачі теорії оболонок, який відповідає сумісній дії силового навантаження і поля дисторсій, одержується за принципом суперпозиції шляхом взаємного накладання розв'язків силової задачі і задачі дисторсії.

Основна енергетична теорема. **Єдиність розв'язку крайових задач**. Якщо у варіаційному рівнянні (11) врахувати сили інерції як масові сили, то одержимо ***принцип Даламбера***

$$\delta \mathcal{W}_{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{æ}) = \iint_{G} [(q^{i} - \ddot{I}^{i})\delta u_{i} + (m^{i} - \ddot{J}^{i})\delta\gamma_{i}]\, dG + \int_{g} (N^{i}\delta u_{i} + M^{i}\delta\gamma_{i})\, dg +$$
$$+ \iint_{G} (\mathbf{N}^{0}\delta\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}^{0}\delta\boldsymbol{æ})\, dG, \quad (19)$$

який використаємо для виведення енергетичного рівняння в теорії розглядуваних оболонок. Припустимо, що віртуальні прирости δu_i, $\delta\gamma_i$ співпадають з дійсними приростами, тобто

$$\delta u_{i} = \dot{u}_{i}\, d\tau, \quad \delta\gamma_{i} = \dot{\gamma}_{i}\, d\tau,$$

а також

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\, d\tau, \qquad \delta\boldsymbol{æ} = \dot{\boldsymbol{æ}}\, d\tau, \qquad \delta\mathcal{W}_{\varepsilon} = \dot{\mathcal{W}}_{\varepsilon} d\tau.$$

Тоді варіаційне рівняння (19) набуде вигляду

$$\frac{d}{d\tau}(\mathcal{W}_{\varepsilon} + \mathcal{K}) = \iint_{G} (q^{i}\dot{u}_{i} + m^{i}\dot{\gamma}_{i})\, dG +$$
$$+ \int_{g} (N^{i}\dot{u}_{i} + M^{i}\dot{\gamma}_{i})\, dg + \iint_{G} (\mathbf{N}^{0}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{M}^{0}\dot{\boldsymbol{æ}})\, dG, \quad (20)$$

де $\mathcal{K}$ − кінетична енергія неоднорідної анізотропної оболонки:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\iint_{G} (\dot{I}^{i}\dot{u}_{i} + \dot{J}^{i}\dot{\gamma}_{i})\, dG.$$

Рівняння (20) виражає ***закон збереження енергії*** [7] в теорії неоднорідних анізотропних оболонок з початковими деформаціями: *сумарний приріст в часі кінетичної енергії і енергії деформації дорівнює приросту роботи, виконаної зовнішніми силами та власними напруженнями.*

Енергетичне рівняння (20) можна використати для доведення ***теореми єдиності*** розв'язку крайових задач теорії неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями. Для цього припускаємо, що існує два розв'язки [7], а потім, використовуючи рівняння (20), доводимо, що ці два розв'язки співпадають.

Теорема Клапейрона. Робота зовнішніх сил і моментів на викликаних ними узагальнених переміщеннях виражається співвідношенням (12). Застосувавши до криволінійного інтеграла, що входить у праву частину (12), формулу Ґріна і врахувавши рівняння рівноваги (5) та геометричні співвідношення (6), дістанемо

$$\mathcal{E} = \iint_G (\mathbf{N}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}\boldsymbol{æ})\, dG\,. \tag{21}$$

Енергія деформації (13) з врахуванням фізичних співвідношень (7) може бути переписана у вигляді

$$U = \frac{1}{2}\iint_G (\mathbf{N}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}\boldsymbol{æ})\, dG - \frac{1}{2}\iint_G (\mathbf{N}^0\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}^0\boldsymbol{æ})\, dG\,. \tag{22}$$

Порівнюючи (21) з (22), одержуємо співвідношення

$$\mathcal{E} = 2U + \iint_G (\mathbf{N}^0\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}^0\boldsymbol{æ})\, dG\,, \tag{23}$$

яке є узагальненням на задачі неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями відомої теореми Клапейрона [7–9, 11].

Теорема взаємності. Виведемо рівняння взаємності для задач динаміки з початковими умовами, виходячи з інтегрального варіаційного принципу (4), який стверджує, що для дійсного руху оболонки в проміжку часу $(0,\tau')$ при довільному виборі варіацій $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\gamma}$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, $\delta\boldsymbol{æ}$, $\delta\mathbf{N}$, $\delta\mathbf{M}$, $\delta\mathbf{u}(x^\alpha,\tau')$, $\delta\boldsymbol{\gamma}(x^\alpha,\tau')$, $\delta\dot{\mathbf{u}}(x^\alpha,\tau')$, $\delta\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x^\alpha,\tau')$ функціонал (3) набуває стаціонарного значення (4).

Введемо позначення

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}', \qquad \delta\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}', \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}', \qquad \delta\boldsymbol{æ} = \boldsymbol{æ}',$$

$$\delta\mathbf{N} = \mathbf{N}', \qquad \delta\mathbf{M} = \mathbf{M}',$$

$$\delta\mathbf{u}(x^\alpha,\tau') = \mathbf{u}'(x^\alpha,\tau'), \qquad \delta\boldsymbol{\gamma}(x^\alpha,\tau') = \boldsymbol{\gamma}'(x^\alpha,\tau'),$$

$$\delta\dot{\mathbf{u}}(x^\alpha,\tau') = \dot{\mathbf{u}}'(x^\alpha,\tau'), \qquad \delta\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x^\alpha,\tau') = \dot{\boldsymbol{\gamma}}'(x^\alpha,\tau')$$

і припустимо, що штриховані функції $\mathbf{u}'$, $\boldsymbol{\gamma}',\ldots$ є розв'язком крайової задачі теорії оболонок (5)–(7), (8)–(10) при дії зовнішніх поверхневих q'^i, m'^i і контурних $\tilde{N}'^i, \tilde{M}'^i$ зусиль і моментів при заданому полі дисторсій $\boldsymbol{\varepsilon}'_0$, $\boldsymbol{æ}'_0$, а також при заданих узагальнених переміщеннях $\tilde{\mathbf{u}}'$, $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}'$ на контурі g_u і початкових умовах u'^0_i, γ'^0_i, v'^0_i, χ'^0_i. Тоді з умови стаціонарності (4) після деяких перетворень одержимо таке співвідношення:

$$\iint_G [q^i * u'_i + m^i * \gamma'_i + u^0_i \dot{I}'^i(x^\alpha,\tau') + v^0_i I'^i(x^\alpha,\tau') + \gamma^0_i \dot{J}'^i(x^\alpha,\tau') +$$

$$+ \chi^0_i J'^i(x^\alpha,\tau')]dG + \iint_G (\mathbf{N}^0 * \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{M}^0 * \boldsymbol{æ}')\, dG +$$

$$+ \int_{g_\sigma} (\tilde{N}^i * u'_i + \tilde{M}^i * \gamma'_i)\, dg - \int_{g_u} (N'^i * \tilde{u}_i + M'^i * \tilde{\gamma}_i)\, dg =$$

$$= \iint\limits_G [q'^i * u_i + m'^i * \gamma_i + u_i'^0 \dot{I}^i(x^\alpha, \tau') + v_i'^0 I^i(x^\alpha, \tau') +$$

$$+ \gamma_i'^0 \dot{J}^i(x^\alpha, \tau') + \chi_i'^0 J^i(x^\alpha, \tau')] dG +$$

$$+ \iint\limits_G (\mathbf{N}'^0 * \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}'^0 * \boldsymbol{æ}) dG + \int\limits_{g_\sigma} (\tilde{N}'^i * u_i + \tilde{M}'^i * \gamma_i) dg -$$

$$- \int\limits_{g_u} (N^i * \tilde{u}_i' + M^i * \tilde{\gamma}_i') dg \ . \qquad (24)$$

Співвідношення (24) є узагальненням ***теореми взаємності*** в динамічній теорії пружності [7] на випадок неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями, коли граничні умови змішані, а початкові умови неоднорідні. Для задач статики з урахуванням сил інерції як масових сил при заданих лише статичних граничних умовах рівняння взаємності запишемо у вигляді

$$\iint\limits_G [(q^i - \ddot{I}^i) u_i' + (m^i - \ddot{J}^i) \gamma_i'] dG + \iint\limits_G (\mathbf{N}^0 \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{M}^0 \boldsymbol{æ}') dG +$$

$$+ \int\limits_g (\tilde{N}^i u_i' + \tilde{M}^i \gamma_i') dg =$$

$$= \iint\limits_G [(q'^i - \ddot{I}'^i) u_i + (m'^i - \ddot{J}'^i) \gamma_i] dG +$$

$$+ \iint\limits_G (\mathbf{N}'^0 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}'^0 \boldsymbol{æ}) dG + \int\limits_g (\tilde{N}'^i u_i + \tilde{M}'^i \gamma_i) dg \, . \qquad (25)$$

Подібне співвідношення в рамках класичної теорії однорідних ізотропних оболонок при дії поля дисторсії наведено в роботі [9], а при дії стаціонарного температурного поля − в [11].

Розв'язок задач в квадратурах. Метод Майзеля. Використовуючи теорему взаємності покажемо, що розв'язок задачі теорії оболонок з власними напруженнями може бути одержаний в квадратурах, якщо для цієї оболонки відомий розв'язок задачі про напружено-деформований стан, викликаний зосередженими силовими факторами. Нехай при відсутності поля дисторсій $\mathbf{N}'^0 = 0, \mathbf{M}'^0 = 0$ в точці x_0^α серединної поверхні прикладено миттєве одиничне зосереджене силове навантаження, напрямлене вздовж однієї з координатних осей x^j:

$$q'^i = \delta(x^\alpha - x_0^\alpha) \delta(\tau) \delta_j^i \qquad (26)$$

або

$$m'^i = \delta(x^\alpha - x_0^\alpha) \delta(\tau) \delta_j^i , \qquad (27)$$

де $\delta(\tau)$ − функція Дірака; δ_j^i − символ Кронекера.

Припустимо, що це навантаження викликає переміщення $\mathbf{u}^{(j)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(j)}$ і деформації $\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}$, $\boldsymbol{æ}^{(j)}$ при однорідних початкових і граничних умовах. Вважаючи, що функції $\mathbf{u}^{(j)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(j)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}$, $\boldsymbol{æ}^{(j)}$ уже визначені і підставляючи (26) або (27) у рівняння взаємності (24), одержимо формули для узагальнених переміщень $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\gamma}$, викликаних у цій же оболонці довільним навантаженням $\mathbf{q}$, $\mathbf{m}$, N^i, M^i і полем дисторсій $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, $\boldsymbol{æ}^0$ при довільних початкових u_i^0, v_i^0, γ_i^0, χ_i^0 і змішаних граничних умовах. Зокрема, для переміщень $u_j(x_0^\alpha, \tau)$, використовуючи навантаження (26), маємо вираз

$$u_j(x_0^\alpha,\tau) = \iint_G (\mathbf{q} * \mathbf{u}^{(j)} + \mathbf{m} * \boldsymbol{\gamma}^{(j)})\,dG + \iint_G (\mathbf{N}^0 * \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} + \mathbf{M}^0 * \boldsymbol{\ae}^{(j)})\,dG +$$

$$+ \iint_G (u_i^0 \dot{I}_{(j)}^i(x^\alpha,\tau') + v_i^0 I_{(j)}^i(x^\alpha,\tau') +$$

$$+ \gamma_i^0 \dot{J}_{(j)}^i(x^\alpha,\tau') + \chi_i^0 J_{(j)}^i(x^\alpha,\tau'))\,dG +$$

$$+ \int_{g_\sigma} (\tilde{N}^i * u_i^{(j)} + \tilde{M}^i * \gamma_i^{(j)})\,dg -$$

$$- \int_{g_u} (N_{(j)}^i * \tilde{u}_i + M_{(j)}^i * \tilde{\gamma}_i)\,dg\,. \tag{28}$$

Аналогічну формулу можна записати для $\gamma_j(x_0^\alpha,\tau)$, якщо використати навантаження (27).

Формула (28) є результатом поширення методу Майзеля [7, 9, 11] на динамічні задачі теорії неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями. В часткових випадках зі співвідношення (28) можна одержати відповідні формули, коли на оболонку діє лише силове навантаження або оболонка перебуває лише під дією поля дисторсій. При одночасній дії цих факторів переміщення в оболонці дорівнює сумі переміщень, викликаних кожним з них окремо. Метод Майзеля на основі класичної теорії однорідних ізотропних оболонок з початковими деформаціями розглядався в роботі [9], а для термопружних задач – в роботі [11].

Висновки. Розвинуто уточнену лінійну математичну модель динамічного деформування неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями. Сформульовано варіаційну постановку динамічних крайових задач розглядуваних оболонок в криволінійних координатах. Показано, що низка загальних теорем лінійної пружності мають аналоги в уточненій теорії неоднорідних анізотропних оболонок з власними напруженнями. Наведені в роботі основні рівняння і теореми можна використовувати для дослідження напружено-деформованого стану анізотропних оболонок з неперервною неоднорідністю по товщині, оболонок шаруватої структури, а також однорідних ортотропних оболонок, у яких осі ортотропії не співпадають з осями координат. Зокрема, теорема взаємності дає можливість задачу про визначення напружено-деформованого стану оболонки внаслідок дії силових факторів і поля дисторсій звести до задачі про напружено-деформований стан оболонки під дією зосередженого силового одиничного навантаження.

1. *Айнола Л. Я.* Вариационный принцип динамики линейной теории упругости // Докл. АН СССР. – 1967. – **172**, № 2. – С. 306–308.
2. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
   Те саме: *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1982.
3. *Жидик У. В.* Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 72–75.
4. *Кренер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. – Москва: Мир, 1965. – 103 с.
5. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Жидик У. В., Флячок В. М.* Моделювання термопружних процесів в неоднорідних анізотропних оболонках з початковими деформаціями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 2. – С. 122–136.
6. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.

7. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
8. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
9. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Марголин А. М.* Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – Киев: Наук. думка, 1991. – 296 с.
10. *Подстригач Я. С., Пелех Б. Л., Ганулич В. К.* Расчет податливых на сдвиг ортотропных оболочек с остаточными напряжениями // Прикл. механика. – 1973. – **9**, № 8. – С. 22–30.
    Те саме: *Podstrigach Ya. S., Pelekh B. L., Ganulich V. K.* Calculation of an orthotropic shell elastic in shear with residual stresses // Int. Appl. Mech. – 1973. – **9**, No. 8. – P. 830–836.
11. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
12. *Hetnarsli R. B., Ignaczak J.* The mathematical theory of elasticity. – Boca Raton: CRC Press, 2011. – 800 p.
13. *Rychter Z.* On linear theory of anisotropic shells of moderate thickness // Mechanika teoretychna i stosowana. – 1983. – **21**, No. 2-3. – P. 147–154.
14. *Selim M. M.* Orthotropic elastic medium under the effect of initial and couple stresses // Appl. Math. and Comput. – 2006. – **181**. – P. 185–192.

К ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С СОБСТВЕННЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Развита уточненная математическая модель динамической задачи неоднородных анизотропных оболочек с собственными напряжениями. На основании этой модели сформулирован ряд вариационных принципов и доказаны некоторые общие теоремы.

TO THE THEORY OF INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC SHELLS WITH INITIAL STRESSES

A refined mathematical model of dynamic problem of heterogeneous anisotropic shells with initial stresses is developed. On the basis of this model the variational principles are formulated and some general theorems are proved.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[3] Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано
15.12.10