

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА З ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИМ ІЗОТРОПНИМ ШАРОМ

Із використанням лінеаризованої теорії пружності побудовано розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа складної конфігурації на попередньо напружений ізотропний шар. Розглянуто числовий приклад побудови функції розподілу контактних напружень. Проаналізовано вплив залишкових деформацій у шарі, а також форми жорсткого штампа на розподіл контактних напружень.

Підвищення надійності та довговічності конструкцій і механізмів є одним із найактуальніших завдань сучасного будівництва та машинобудування. Як відомо [2], в елементах конструкцій і деталях машин майже завжди є наявні залишкові деформації. Природа їх виникнення може бути дуже різною: незворотні деформації (пластичність, повзучість), структурні перетворення в матеріалі, зміна агрегатного стану в окремих місцях конструкцій, механічні, хімічні та технологічні процеси тощо. Напруження, що при цьому виникають, так само, як і будь-які інші, можуть викликати руйнування, прискорити певні фазові переходи, корозію. Врахування залишкових деформацій при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин та споруд дозволяє більш точно оцінювати запас міцності матеріалу, а отже, суттєво зменшити його витрати, зберігаючи при цьому необхідні функціональні характеристики елементів в цілому.

Саме тому дослідження контактної взаємодії пружних тіл із залишковими деформаціями є надзвичайно актуальним завданням сьогодні та залишатиметься таким у майбутньому.

Дослідження проблем контактної взаємодії попередньо напружених тіл у нашій країні та закордоном появились у достатній кількості лише наприкінці минулого століття. В першу чергу, це пов'язано із тим, що лінійна теорія пружності не враховує наявності у тілах залишкових напружень. У загальному випадку строга постановка таких задач потребує застосування апарату нелінійної теорії пружності, проте, при достатньо великих значеннях початкових напружень можна обмежитись її лінеаризованим варіантом.

Сучасний рівень лінеаризованої теорії пружності та математичних методів у сукупності із бурхливим розвитком комп'ютерної техніки дають можливість ефективно формувати різноманітні розрахункові моделі стосовно широкого кола задач. Так, у працях [5, 6] апарат лінеаризованої теорії пружності успішно використано для побудови тривимірної моделі скінченного елемента та вивчення з її допомогою ефектів взаємодії волокон під час мікродеформацій у з'єднаннях, підсиленних ізотропними та анізотропними волокнами.

Достатньо повний опис та класифікацію робіт, присвячених теорії контактної взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими штампами, можна знайти у статті [1]. Однак недостатньо вивченим залишається питання взаємодії кільцевих штампів складної конфігурації з пружним півпростором або шаром із залишковими деформаціями.

Розглянемо осесиметричну задачу про тиск жорсткого кільцевого штампа на попередньо напружений ізотропний шар товщини h , що лежить на жорсткій абсолютно гладкій основі.

Розв'язання задачі проводитимемо у рамках лінеаризованої теорії пружності із використанням термінології і позначень монографії [3]. Вважатимемо, що пружні потенціали є неперервними двічі диференційовними функціями алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Γ ріна [3].

Усі викладки проведемо у координатах деформованого стану y_i , що пов'язані із лагранжевими координатами (які в початковому, недеформованому, стані співпадають із декартовими) співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, 2, 3$, де λ_i – коефіцієнти видовження лінійного елемента, спрямованого вздовж декартової осі x_i . Також вважатимемо, що дія штампа викликає у шарі малі збурення основного однорідного напружено-деформованого стану, для якого виконуються умови

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}, \quad (1)$$

де S_0^{ii} – складові тензора початкових напружень.

Штамп втискується у шар поступально без обертання та тертя під дією постійної сили P . Його утворено обертанням навколо спільної осі двох віток парабол, спряжених у вершинах відрізком прямої, перпендикулярної до осі обертання. Осі парабол, що обмежують штамп, паралельні до спільної осі обертання, яка співпадає із лінією дії сили P .

Виберемо циліндричну систему координат (O, r, θ, z) так, щоб координатна площина (O, r, θ) співпадала з верхньою граничною площиною шару, а вісь Oz – із лінією дії сили P (рис. 1).

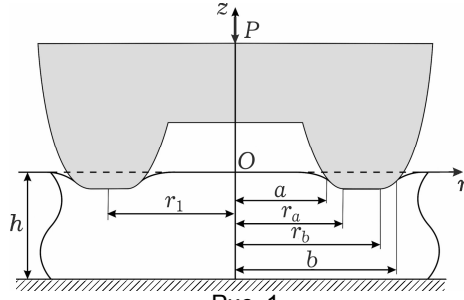


Рис. 1

Граничні умови поставленої задачі подамо так:

$$\sigma_{rz}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad b \leq r, \quad (3)$$

$$u_z(r, 0) = w(r), \quad a \leq r \leq b, \quad (4)$$

$$\sigma_{rz}(r, -h) = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (5)$$

$$u_z(r, -h) = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (6)$$

Функція $w(r)$, що описує форму жорсткого штампа, має вигляд

$$w(r) = \begin{cases} w(a) + \frac{1}{2R_1} [(r_a - r)^2 - (r_a - a)^2], & a \leq r < r_a, \\ w(a) - \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2, & r_a \leq r < r_1, \\ w(b) - \frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2, & r_1 \leq r < r_b, \\ w(b) + \frac{1}{2R_2} [(r_b - r)^2 - (r_b - b)^2], & r_b \leq r \leq b, \end{cases} \quad (7)$$

де $r_1 = \frac{r_a + r_b}{2}$, R_1 та R_2 – радіуси кривин парабол, якими обмежено штамп. Компоненти вектора переміщень і тензора контактних напружень в осесиметричному випадку за допомогою двох невідомих функцій $\varphi_1(r, z)$ і $\varphi_2(r, z)$ можна записати у вигляді [2]

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 + \varphi_2) + z \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \varphi_2, \\ u_z = m_1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) + s_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right],$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= c_{33} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi_1 + s\varphi_2) + z \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z^3} \right], \\ \sigma_{rz} &= c_{31} \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (\varphi_1 + s_0 \varphi_2) + z \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial r \partial z^2} \right].\end{aligned}\quad (8)$$

Функції $\varphi_1(r, z)$ і $\varphi_2(r, z)$ при цьому повинні задовольняти рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + n_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Співвідношення (8) записано у загальному вигляді для випадку теорії великих (скінченних) деформацій, а також для різних варіантів теорії малих початкових деформацій. Вони враховують наявність пружного потенціалу довільної структури і побудовані для стискуваних та нестискуваних тіл без будь-яких обмежень. Коефіцієнти c_{31} , c_{33} , m_1 , n_1 , s , s_0 та s_1 у співвідношеннях (8), (9) залежать від характеру пружного потенціалу і їх визначають для кожного конкретного випадку [3].

Застосувавши до рівнянь (9) інтегральне перетворення Ганкеля нульового порядку

$$\bar{\varphi}_i(\alpha, z) = \int_0^\infty r \varphi_i(r, z) J_0(\alpha r) dr,$$

отримуємо рівняння для трансформант

$$\left(n_1 \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right) \bar{\varphi}_i(\alpha, z) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

розв'язки якого будемо вибирати у вигляді

$$\bar{\varphi}_i(\alpha, z) = A_i(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha z) + B_i(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha z). \quad (11)$$

Застосувавши до співвідношень (11) формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля, із виразів (8) матимемо

$$\begin{aligned}u_r(r, z) &= - \int_0^\infty \alpha^2 \{ A_1 \operatorname{ch}(\alpha z) + A_2 [\operatorname{ch}(\alpha z) + \alpha z \operatorname{sh}(\alpha z)] + \\ &\quad + B_1 \operatorname{sh}(\alpha z) + B_2 [\operatorname{sh}(\alpha z) + \alpha z \operatorname{ch}(\alpha z)] \} J_1(\alpha r) d\alpha, \\ u_z(r, z) &= m_1 \int_0^\infty \alpha^2 \{ A_1 \operatorname{sh}(\alpha z) + A_2 [s_1 \operatorname{sh}(\alpha z) + \alpha z \operatorname{ch}(\alpha z)] + \\ &\quad + B_1 \operatorname{ch}(\alpha z) + B_2 [s_1 \operatorname{ch}(\alpha z) + \alpha z \operatorname{sh}(\alpha z)] \} J_0(\alpha r) d\alpha, \\ \sigma_{rz}(r, z) &= -c_{31} \int_0^\infty \alpha^3 \{ A_1 \operatorname{sh}(\alpha z) + A_2 [s_0 \operatorname{sh}(\alpha z) + \alpha z \operatorname{ch}(\alpha z)] + \\ &\quad + B_1 \operatorname{ch}(\alpha z) + B_2 [s_0 \operatorname{ch}(\alpha z) + \alpha z \operatorname{sh}(\alpha z)] \} J_1(\alpha r) d\alpha, \\ \sigma_{zz}(r, z) &= c_{33} \int_0^\infty \alpha^3 \{ A_1 \operatorname{ch}(\alpha z) + A_2 [s \operatorname{ch}(\alpha z) + \alpha z \operatorname{sh}(\alpha z)] + \\ &\quad + B_1 \operatorname{sh}(\alpha z) + B_2 [s \operatorname{sh}(\alpha z) + \alpha z \operatorname{ch}(\alpha z)] \} J_0(\alpha r) d\alpha.\end{aligned}\quad (12)$$

На верхній граничній площині шару (при $z = 0$) зі співвідношень (12) отримаємо

$$\sigma_{zz} = c_{33} \int_0^\infty \alpha^3 (A_1 + A_2 s) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (13)$$

$$\sigma_{rz} = -c_{31} \int_0^{\infty} \alpha^3 (B_1 + B_2 s_0) J_1(\alpha r) d\alpha, \quad (14)$$

$$u_z = m_1 \int_0^{\infty} \alpha^2 (B_1 + B_2 s_1) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (15)$$

На нижній граничній площині шару (при $z = -h$), використавши (12), матимемо

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = & -c_{31} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{-A_1 \operatorname{sh}(\alpha h) + A_2[-s_0 \operatorname{sh}(\alpha h) - \alpha h \operatorname{ch}(\alpha h)] + \\ & + B_1 \operatorname{ch}(\alpha h) + B_2[s_0 \operatorname{ch}(\alpha h) + \alpha h \operatorname{sh}(\alpha h)]\} J_1(\alpha r) d\alpha, \\ u_z = & m_1 \int_0^{\infty} \alpha^2 \{-A_1 \operatorname{sh}(\alpha h) + A_2[-s_1 \operatorname{sh}(\alpha h) - \alpha h \operatorname{ch}(\alpha h)] + \\ & + B_1 \operatorname{ch}(\alpha h) + B_2[s_1 \operatorname{ch}(\alpha h) + \alpha h \operatorname{sh}(\alpha h)]\} J_0(\alpha r) d\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Вимагаючи виконання граничної умови (2), із рівності (14) одержуємо співвідношення між функціями B_1 та B_2 :

$$B_1 + B_2 s_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = -s_0 B_2. \quad (17)$$

Підставивши (17) у співвідношення (16) та задовольнивши граничні умови (5), (6), одержуємо систему відносно невідомих A_1 та A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{sh}(\alpha h) + A_2[s_0 \operatorname{sh}(\alpha h) + \alpha h \operatorname{ch}(\alpha h)] &= B_2 \alpha h \operatorname{sh}(\alpha h), \\ A_1 \operatorname{sh}(\alpha h) + A_2[s_1 \operatorname{sh}(\alpha h) + \alpha h \operatorname{ch}(\alpha h)] &= \\ &= B_2[(s_1 - s_0) \operatorname{ch}(\alpha h) + \alpha h \operatorname{sh}(\alpha h)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язавши (18), одержуємо вирази для A_1 та A_2 через функцію B_2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\alpha h + s_0 \operatorname{sh}(\alpha h) \operatorname{ch}(\alpha h)}{\operatorname{sh}^2(\alpha h)} B_2, \\ A_2 &= \frac{\operatorname{sh}(\alpha h) \operatorname{ch}(\alpha h)}{\operatorname{sh}^2(\alpha h)} B_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Із урахуванням співвідношень (17) і (19) вирази (13) і (15) набувають вигляду

$$\sigma_{zz} = c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \frac{(s - s_0) \operatorname{sh}(\alpha h) \operatorname{ch}(\alpha h) - \alpha h}{\operatorname{sh}^2(\alpha h)} B_2 J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (20)$$

$$u_z = m_1 (s_1 - s_0) \int_0^{\infty} \alpha^2 B_2 J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (21)$$

Задовольнивши граничну умову (3), зважаючи на (20), матимемо

$$\begin{aligned} c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \frac{(s - s_0) \operatorname{sh}(\alpha h) \operatorname{ch}(\alpha h) - \alpha h}{\operatorname{sh}^2(\alpha h)} B_2 J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \\ 0 \leq r \leq a, \quad b \leq r. \end{aligned} \quad (22)$$

Введемо невідому функцію $x(r)$, $a \leq r \leq b$, за допомогою якої продовжимо співвідношення (22) на проміжок $0 \leq r < \infty$:

$$\begin{aligned} c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \frac{(s - s_0) \operatorname{sh}(\alpha h) \operatorname{ch}(\alpha h) - \alpha h}{\operatorname{sh}^2(\alpha h)} B_2 J_0(\alpha r) d\alpha = \\ = x(r) \{U(r - a) - U(r - b)\}, \quad 0 \leq r < \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

де $U(r)$ – функція Гевісайда.

Функція $x(r)$ визначає розподіл контактних напружень під штампом. Врахувавши її неперервність, а також рівність нулеві на границі області контакту (при $r = a$ та $r = b$), подамо $x(r)$ у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є за функціями

$$L_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right)Y_0(\gamma_n) - Y_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right)J_0(\gamma_n),$$

тобто у вигляді

$$x(r) = \sigma_{zz}(r, 0) = \sum_{n=1}^N a_n L_n(r), \quad (24)$$

де a_n – невідомі коефіцієнти, а γ_n – додатні корені рівняння

$$J_0\left(\frac{b}{a}t\right)Y_0(t) - Y_0\left(\frac{b}{a}t\right)J_0(t) = 0.$$

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (23), враховуючи подання (24), одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha^2 B_2 \frac{(s-s_0) \operatorname{sh}(\alpha h) \operatorname{ch}(\alpha h) - \alpha h}{\operatorname{sh}^2(\alpha h)} &= \frac{1}{c_{33}} \int_a^b r \sum_{n=1}^N a_n L_n(r) J_0(\alpha r) dr = \\ &= \frac{1}{c_{33}} \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b r L_n(r) J_0(\alpha r) dr. \end{aligned} \quad (25)$$

Ввівши позначення

$$\begin{aligned} \Phi_n(\alpha) &= \int_a^b r L_n(r) J_0(\alpha r) dr = \frac{\gamma_n \alpha^2}{\gamma_n^2 - (\alpha a)^2} \left\{ \frac{b}{a} \left[J_1\left(\frac{b}{a}\gamma_n\right) Y_0(\gamma_n) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Y_1\left(\frac{b}{a}\gamma_n\right) J_0(\gamma_n) \right] J_0(\alpha b) - \right. \\ &\quad \left. - [J_1(\gamma_n) Y_0(\gamma_n) - Y_1(\gamma_n) J_0(\gamma_n)] J_0(\alpha a) \right\}, \end{aligned}$$

зі співвідношень (25) одержуємо

$$\alpha^2 B_2 = \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha h)}{(s-s_0) \operatorname{sh}(\alpha h) \operatorname{ch}(\alpha h) - \alpha h} \frac{1}{c_{33}} \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n(\alpha). \quad (26)$$

Підставивши співвідношення (26) у рівність (21), отримаємо

$$\begin{aligned} u_z(r) &= m_1(s_1 - s_0) \int_0^\infty \alpha^2 B_2 J_0(\alpha r) d\alpha = \frac{m_1(s_1 - s_0)}{c_{33}(1 + m_1)\ell_1 n_1} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha h)}{(s-s_0) \operatorname{sh}(\alpha h) \operatorname{ch}(\alpha h) - \alpha h} \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha \end{aligned}$$

або

$$u_z(r) = -\omega \sum_{n=1}^N a_n \int_0^\infty \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (27)$$

Тут позначено

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{(s_0 - s_1)m_1}{c_{33}(1 + m_1)\ell_1 n_1}, \\ \Delta(\alpha) &= \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha h)}{(s-s_0) \operatorname{sh}(\alpha h) \operatorname{ch}(\alpha h) - \alpha h} = \frac{1 - 2e^{-2\alpha h} + e^{-4\alpha h}}{(s-s_0)[1 - e^{-4\alpha h}] - 4\alpha h e^{-2\alpha h}}. \end{aligned}$$

Вимагаючи виконання граничної умови (4) і підставивши у співвідношення (7) вирази для $w(a)$ і $w(b)$, отримані із (27), матимемо

$$\begin{aligned}
& -\omega \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{J_0(\alpha r) - J_0(\alpha a)\} d\alpha = w_1^*(r), \\
& -\omega \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{J_0(\alpha r) - J_0(\alpha b)\} d\alpha = w_2^*(r). \tag{28}
\end{aligned}$$

Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned}
w_1^*(r) &= \begin{cases} -\frac{1}{2R_1} [(r_a - a)^2 - (r_a - r)^2], & a \leq r < r_a, \\ -\frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2, & r_a \leq r < r_1, \end{cases} \\
w_2^*(r) &= \begin{cases} -\frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2, & r_1 \leq r < r_b, \\ -\frac{1}{2R_2} [(r_b - b)^2 - (r_b - r)^2], & r_b \leq r \leq b. \end{cases}
\end{aligned}$$

Помноживши співвідношення (28) на $r L_q(r)$ та проінтегрувавши одержані вирази за r від a до b , отримаємо

$$\begin{aligned}
& \omega \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{ \Phi_q(\alpha) - \mathcal{R}_q^{(1)} J_0(\alpha a) - \mathcal{R}_q^{(2)} J_0(\alpha b) \} d\alpha = \\
& = \frac{1}{2R_1} \left\{ (r_a - a)^2 \mathcal{R}_q^{(1)} - \int_a^{r_a} (r_a - r)^2 r L_q(r) dr \right\} + \\
& + \frac{1}{2R_2} \left\{ (r_b - b)^2 \mathcal{R}_q^{(2)} - \int_{r_b}^b (r_b - r)^2 r L_q(r) dr \right\}, \quad q=1, \dots, N, \tag{29}
\end{aligned}$$

де

$$\mathcal{R}_q^{(1)} = \int_a^{r_1} r L_q(r) dr, \quad \mathcal{R}_q^{(2)} = \int_{r_1}^b r L_q(r) dr.$$

Використавши метод суперпозиції та ввівши позначення

$$a_n = \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{2R_1} a_n^{(1)} + \frac{1}{2R_2} a_n^{(2)} \right], \quad z_1 = \frac{1}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{1}{2R_2}, \tag{30}$$

із (29) одержуємо дві системи відносно невідомих $a_n^{(1)}$ та $a_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N a_n^{(1)} K_q &= (r_a - a)^2 \mathcal{R}_q^{(1)} - \int_a^{r_a} (r_a - r)^2 r L_q(r) dr, \\
\sum_{n=1}^N a_n^{(2)} K_q &= (r_b - b)^2 \mathcal{R}_q^{(2)} - \int_{r_b}^b (r_b - r)^2 r L_q(r) dr, \quad q = 1, \dots, N,
\end{aligned}$$

де

$$K_q = \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{ \Phi_n(\alpha) - \mathcal{R}_q^{(1)} J_0(\alpha a) - \mathcal{R}_q^{(2)} J_0(\alpha b) \} d\alpha.$$

Величини z_i в співвідношеннях (30) знаходимо з умов рівноваги штамп:

$$2\pi \int_a^b r \sigma_{zz}(r, 0) dr = -P, \tag{31}$$

та рівності вертикальних переміщень верхньої граничної площини шару при $r = r_a$ та $r = r_b$:

$$u_z(r_a) = u_z(r_b). \tag{32}$$

Із умови (31), співвідношень (30) і (24) матимемо

$$\int_a^b r x(r) dr = \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b r L_n(r) dr = \frac{1}{\omega} \left\{ z_1 \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \mathcal{R}^q + z_2 \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \mathcal{R}^q \right\}, \quad (33)$$

$$z_1 \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \mathcal{R}^q + z_2 \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \mathcal{R}^q = -\frac{P}{2\pi} \omega,$$

де

$$\mathcal{R}^q = \int_a^b r L_q(r) dr.$$

Із умови (32), співвідношень (7) і (27) матимемо

$$w(a) - \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2 = w(b) - \frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2,$$

$$z_1 (r_a - a)^2 - z_2 (r_b - b)^2 = w(a) - w(b) =$$

$$= \omega \sum_{n=1}^N a_n \int_0^\infty \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{J_0(\alpha a) - J_0(\alpha b)\} d\alpha =$$

$$= \omega \sum_{n=1}^N a_n M_n = \sum_{n=1}^N \{z_1 a_n^{(1)} + z_2 a_n^{(2)}\} M_n =$$

$$= z_1 \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} M_n + z_2 \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} M_n,$$

де

$$M_n = \int_0^\infty \Delta(\alpha) \Phi_n(\alpha) \{J_0(\alpha b) - J_0(\alpha a)\} d\alpha.$$

Остаточно отримаємо такі рівняння відносно невідомих z_1 і z_2 :

$$z_1 \left\{ (r_a - a)^2 - \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} M_n \right\} + z_2 \left\{ -(r_b - b)^2 - \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} M_n \right\} = 0. \quad (34)$$

Зробивши у рівняннях (33) та (34) заміну

$$z_i^* = z_i \frac{2\pi}{P}, \quad i = 1, 2, \quad \Rightarrow \quad z_i = \omega \frac{P}{2\pi} z_i^*, \quad (35)$$

приходимо до системи двох рівнянь відносно невідомих z_1^* та z_2^* :

$$z_1^* \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \mathcal{R}^q + z_2^* \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \mathcal{R}^q = -1,$$

$$z_1^* \left\{ (r_a - a)^2 - \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} M_n \right\} + z_2^* \left\{ -(r_b - b)^2 - \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} M_n \right\} = 0. \quad (36)$$

Розв'язавши систему (36), зі співвідношень (24), (30) і (35) одержуємо формулу для знаходження розподілу контактних напружень під штапом

$$\sigma_{zz}(r, 0) = \frac{P}{2\pi} \left\{ z_1^* \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} L_n(r) + z_2^* \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} L_n(r) \right\}.$$

За допомогою розв'язаної задачі дослідимо вплив форми жорсткого штампа, а також наявності залишкових деформацій у шарі на характер розподілу контактних напружень. Числовий аналіз проведемо для двох випадків:

- шар є стискуваним тілом із наявним пружним потенціалом гармонічного типу (рис. 2 і рис. 4);
- шар є нестискуваним тілом із потенціалом Бартенєєва – Хазановича (рис. 3 і рис. 5).

На рис. 2 і рис. 3 зображено графіки безрозмірної функції $\sigma_{zz}^* = \frac{2\pi}{P} \sigma_{zz}(r, 0)$ для випадку, коли прямолінійна ділянка в основі штампа відсутня, а конфігурація штампа визначається такими значеннями параметрів: $r_a = r_b = 0.7$, $R_1 = \frac{\pi}{14} \frac{1}{\omega P}$, $R_2 = \frac{\pi}{24} \frac{1}{\omega P}$.

Пунктирні криві на рисунках відповідають відсутності у шарі залишкових деформацій ($\lambda_1 = 1$), крива 1 – наявності залишкових деформацій стиску ($\lambda_1 < 1$), а крива 2 – розтягу ($\lambda_1 > 1$). Проведений числовий аналіз дає можливість стверджувати, що поява у тілі залишкових деформацій розтягу викликає звуження ділянки контакту та збільшення абсолютного значення контактних напружень. Виникнення деформацій стиску спричиняє розширення ділянки контакту та зменшення абсолютного значення контактних напружень.

На рис. 4 і рис. 5 зображено графіки функції σ_{zz}^* для наступних значень параметрів: $r_a = 0.65$, $r_b = 0.75$, $R_1 = \frac{\pi}{14} \frac{1}{\omega P}$, $R_2 = \frac{\pi}{24} \frac{1}{\omega P}$.

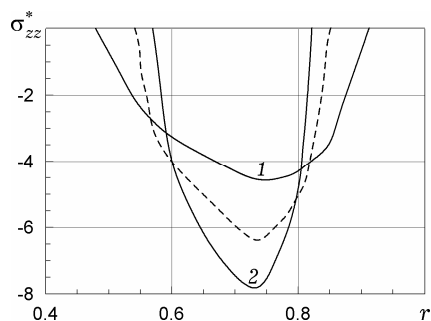


Рис. 2

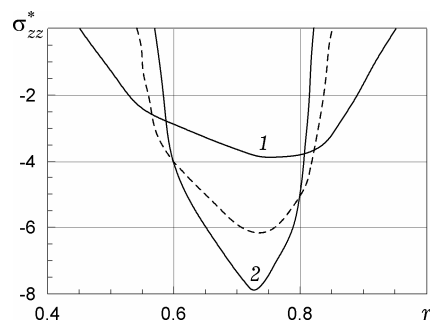


Рис. 3

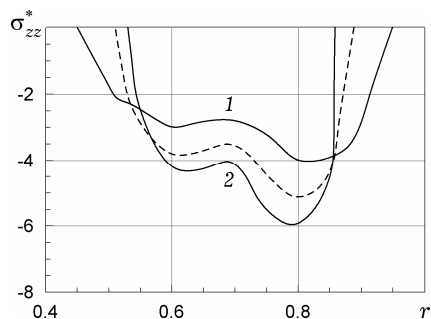


Рис. 4

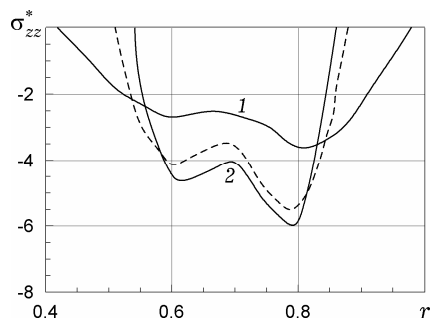


Рис. 5

З аналізу одержаних результатів можна зробити висновок, що поява в основі штампа прямолінійної ділянки $[r_a, r_b]$ викликає зменшення абсолютної величини контактних напружень і зміщення точок екстремуму до межі ділянки контакту. Достовірність зроблених висновків підтверджується їх узгодженням із результатами, одержаними, наприклад, авторами [4].

1. Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 7. – С. 41–69.

Те саме: Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitskii V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, No. 7. – P. 744–765.

2. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницкий: ПП Мельник, 2006. – 710 с.
3. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.
4. Гузь О. М., Рудницький В. Б. Контактна взаємодія тіл з початковими (залишковими) напруженнями // Проблеми мат. моделювання сучасних технологій: Зб. наук. праць за матеріалами міжнар. наук.-техн. конф. – Хмельницький: Хмельницьк. нац. ун-т, 2004. – С. 5–35.
5. Harich J., Lapusta Y., Wagner W. 3D FE-modeling of surface and anisotropy effects during micro-buckling in fiber composites // Compos. Struct. – 2009. – **89**, No. 4. – P. 551–555.
6. Lapusta Y., Harich J., Wagner W. Three-dimensional FE model for fiber interaction effects during micro-buckling in composites with isotropic and anisotropic fibers // Commun. Numer. Meth. Eng. – 2008. – **24**, No. 12. – P. 2206–2215.

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ ИЗОТРОПНЫМ СЛОЕМ

С использованием линеаризованной теории упругости построено решение контактной задачи о давлении жесткого кольцевого штампа сложной конфигурации на предварительно напряженный изотропный слой. Рассмотрен числовой пример построения функции распределения контактных напряжений. Проанализировано влияние остаточных деформаций в слое, а также формы штампа на распределение контактных напряжений.

CONTACT INTERACTION OF CIRCULAR PUNCH WITH PRESTRESSED ISOTROPIC LAYER

Using the linearized elasticity theory the solution of the contact problem on the pressure of the rigid circular punch of complex geometry on the prestressed isotropic layer is obtained. A numerical example of constructing the function of distribution of contact stresses is considered. The effect of residual strains in the layer and form of rigid punch on distribution of contact stresses is analyzed.

Тернопільськ. нац. техн. ун-т
ім. Івана Пулюя, Тернопіль

Одержано
28.11.10