

РІВНОВАГА ПРУЖНОГО КЛИНА З НАПІВНЕСКІНЧЕННОЮ ТРІЩИНОЮ

Розглянуто рівновагу пружного клина з напівнескінченною тріщиною вздовж осі симетрії, до берегів якої прикладено нормальні зосереджені сили. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа побудовано точні розв'язки задачі як за умови відсутності обертання на нескінченності, так і без накладання зазначеної умови. Знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень, розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини, нормальні переміщення берегів тріщини.

Задача про рівновагу пружного клина з напівнескінченною тріщиною на його осі симетрії розглядалася раніше [1, 11, 12, 20]. У роботі [20] задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, але результати розрахунків відсутні. У роботах [1, 11, 12] методом Вінера – Гопфа побудовано точні розв'язки однорідної задачі, коли береги тріщини вільні від сил, а на нескінченності задано головний вектор і головний момент напружень.

Частковий випадок задачі, коли клин є півплощиною і містить напівнескінченну тріщину, перпендикулярну до межі півплощини, розглядали у роботах [6, 8, 10, 16–19, 21–23], аналіз яких наведено у [9]. Коефіцієнти інтенсивності напружень у випадку, якщо на берегах тріщини прикладені зосереджені сили і обертання на нескінченності відсутнє, визначено у роботах [6, 8, 10, 22]. Розтяг на нескінченності півплощини з напівнескінченною тріщиною з вільними від сил берегами розглянуто у роботах [16–19, 21, 22]. Як з'ясовано в [21, 22], обертання на нескінченності у цьому випадку відсутнє, якщо відстань між лінією дії розтягувальних сил і краєм півплощини складає 0.736 відстані між краєм півплощини і вершиною тріщини. Як показано в [9], це дає змогу методом суперпозиції з використанням однорідного розв'язку для заданих на нескінченності моментів [23] одержати значення коефіцієнта інтенсивності напружень у випадку, коли півплощина на нескінченності розтягується заданими силами, лінія дії яких віддалена на будь-яку відстань від краю півплощини. При цьому, взагалі кажучи, виникає обертання на нескінченності.

У цій роботі методом Вінера – Гопфа з використанням інтегрального перетворення Мелліна спочатку будемо розв'язок задачі для клина з напівнескінченною тріщиною за умови, що обертання на нескінченності відсутнє. Це, зокрема, означає, що береги тріщини, до яких прикладене навантаження, на нескінченності паралельні, так що колові переміщення обмежені. Якщо ж на нескінченності прикладено навантаження, колові переміщення зростають за логарифмічним законом. Накладена умова є суттєвою для побудови розв'язку задачі, оскільки за її відсутності перетворення Мелліна від колових переміщень, які в цьому випадку стають лінійними на нескінченності, не існує. Відсутність обертання на нескінченності справджується за рахунок певних моментів, заданих на нескінченності і прикладених до кожного з півклинів, розділених напівнескінченим розрізом. Далі будемо розв'язок задачі, вільний від обмеження щодо відсутності обертання на нескінченності. При цьому береги розрізу на нескінченності повертаються один від одного, а головний момент напружень на нескінченності дорівнює нулеві. Цей розв'язок будемо із попереднього методом суперпозиції з однорідним розв'язком, у якому напруження на нескінченності мають задані головні моменти, протилежні для кожного з півклинів. Розв'язок для заданих на нескінченності моментів будемо, в свою чергу, як граничний випадок розв'язку для заданих на кожному березі тріщини пари сил за умови, що ці сили переносимо на нескінченність, а їх величини зростають пропор-

ційно до квадрата відстані до вершини клина. При переході до границі умова відсутності повороту на нескінченності зникає. Також показано, що розв'язок задачі з вільним обертанням на нескінченності можна отримати безпосередньо, застосовуючи узагальнене перетворення Мелліна функцій степеневого зростання на нескінченності.

Інтегральне рівняння задачі. Розглянемо плоску деформацію пружного клина $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$ з напівнескінченною тріщиною $\ell < r < \infty$, $\vartheta = 0$, до берегів якої в точках $(r_0, \pm 0)$, де $r_0 > \ell$, прикладено зосереджені нормальні сили P . Грані клина $0 \leq r < \infty$, $\vartheta = \pm \alpha$, вільні від напружень, а на нескінченності в кожному з півклінів $0 < \vartheta \leq \alpha$ і $-\alpha \leq \vartheta < 0$ напруження мають головний вектор P_∞ , направлений перпендикулярно до осі клина (рис. 1).

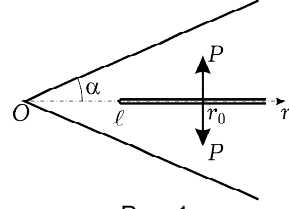


Рис. 1

За термінологією Г. П. Черепанова [15], область, яку займає клин з напівнескінченною тріщиною, має дві нескінченно віддалені точки. У кожній з цих точок повинні бути заданими головний вектор і головний момент. Питання про задання головного моменту напружень на нескінченності буде з'ясовано нижче.

З огляду на симетричність напружено-деформованого стану клина відносно його осі $\vartheta = 0$ обмежимося розглядом верхнього півклина $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \alpha$. Змішані крайові умови задачі запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_\vartheta|_{\vartheta=0} &= 0, & 0 \leq r \leq \ell, & & \sigma_\vartheta|_{\vartheta=0} &= -P\delta(r - r_0), & \ell < r < \infty, \\ \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=0} &= 0, & \sigma_\vartheta|_{\vartheta=\alpha} &= 0, & \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= 0, & 0 \leq r < \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\delta(r - r_0)$ – дельта-функція Дірака. Крім того, повинна виконуватися умова рівноваги

$$\int_0^\ell \sigma_\vartheta|_{\vartheta=0} dr = P + P_\infty. \quad (2)$$

Введемо невідому функцію нормальних напружень на лінії продовження тріщини:

$$g(r) = \frac{1}{2G} \sigma_\vartheta|_{\vartheta=0}, \quad 0 < r < \ell, \quad (3)$$

де G – модуль зсуву. Розв'язок першої крайової задачі для півклина $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_\vartheta|_{\vartheta=0} &= \begin{cases} g(r), & 0 < r < \ell, \\ -\frac{P}{2G} \delta(r - r_0), & \ell \leq r < \infty, \end{cases} \\ \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=0} &= 0, & \sigma_\vartheta|_{\vartheta=\alpha} &= 0, & \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= 0, & 0 \leq r < \infty, \end{aligned} \quad (4)$$

отримаємо, застосовуючи інтегральне перетворення Мелліна. Зокрема, на межі $\vartheta = 0$ будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} &= -\frac{m-1}{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Delta(s)}{\lambda(s)} a(s) r^{-s-1} ds, \\ \frac{\sigma_\vartheta}{2G} \Big|_{\vartheta=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds, \\ \Delta(s) &= \sin 2s\alpha + s \sin 2\alpha, & \lambda(s) &= \sin^2 s\alpha - s^2 \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

де m – число Пуассона; c – будь-яке дійсне число з інтервалу $-\operatorname{Re} \delta_1 < c < 0$; δ_1 – найменший за модулем корінь рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощи-

ни $\operatorname{Re} s > 0$, причому цей корінь комплексний і $\operatorname{Re} \delta_1 > 1$, якщо $0 < \alpha < \pi/2$, і дійсний, $1/2 \leq \delta_1 < 1$, якщо $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ [13].

Подання (5) радіальної похідної від нормальних переміщень через інтеграл Рімана – Мелліна вимагає її згасання на нескінченності. Це обмеження призводить до того, що обернання $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right)$ [2] на нескінченності дорівнює нулеві. Тому, за постановкою задачі, поки що будемо вважати, що обернання на нескінченності відсутнє. Остання умова забезпечується прикладанням на нескінченності деякого моменту, значення якого буде знайдено у процесі розв'язування задачі.

Застосовуючи до другої з рівностей (5) обернене перетворення Мелліна, з урахуванням першої умови (4) знайдемо

$$a(s) = \int_0^\ell g(y) y^s dy - \frac{P}{2G} r_0^s \quad (6)$$

і підставимо цей вираз у першу рівність (5). Виконавши заміни

$$s = -i\tau, \quad r = \ell e^{-\xi}, \quad y = \ell e^{-\eta}, \quad g(\ell e^{-\eta}) e^{-\eta} = \varphi(\eta), \quad 0 < \eta < \infty, \quad (7)$$

маємо

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} \right|_{\vartheta=0} &= -\frac{m-1}{m} e^\xi \left(\int_0^\infty \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - f(\xi) \right), \\ \mathbf{k}(\xi - \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\mathcal{K}(\tau)}{-i\tau} e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau, \quad \mathcal{K}(\tau) = \frac{-i\tau\Delta(-i\tau)}{\lambda(-i\tau)}, \\ f(\xi) &= \bar{P} \mathbf{k}(\xi - \xi_0), \quad \bar{P} = \frac{1}{2G\ell} P, \quad \xi_0 = \ln \frac{\ell}{r_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Задовольнивши продиференційовану першу з крайових умов (1) за допомогою (8), отримуємо інтегральне рівняння задачі

$$\int_0^\infty \mathbf{k}(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi), \quad 0 \leq \xi < \infty. \quad (9)$$

Розв'язання інтегрального рівняння методом Вінера – Гопфа. Щоб надалі мати можливість застосувати теорему про згортку для інтегрального перетворення Фур'є, змістимо контур інтегрування для ядра $\mathbf{k}(\xi - \eta)$ із (8) на дійсну вісь. Оскільки підінтегральна функція має простий полюс у точці $\tau = 0$, вказане перетворення контуру інтегрування змінить значення інтеграла на півлишок у точці $\tau = 0$ з множником $(-2\pi i)$. Таким чином, будемо мати

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\xi - \eta) &= -\frac{1}{2} \mathcal{K}(0) + \mathbf{k}_1(\xi - \eta), \\ \mathbf{k}_1(\xi - \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}(\tau)}{-i\tau} e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

де останній сингулярний інтеграл має особливість у точці $\tau = 0$.

Після диференціювання (9) з урахуванням (10) перейдемо до інтегрального рівняння

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^\infty \mathbf{k}_1(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f'(\xi), \quad 0 \leq \xi < \infty. \quad (11)$$

Праву частину рівняння (11) перетворимо за теорією лишків:

$$f'(\xi) = -\bar{P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \Delta(s_k)}{\lambda'(s_k)} e^{-s_k(\xi-\xi_0)}, \quad (12)$$

де $s_k, k = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $\lambda(s) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$, причому $s_1 = 1$.

Приймаючи, що $\varphi(\xi) = 0$ при $\xi < 0$, розповсюдимо рівняння (11) на всю числову вісь:

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} \mathbf{k}_1(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \begin{cases} 0, & \xi \geq 0, \\ \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} \mathbf{k}_1(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, & \xi < 0, \end{cases} = \begin{cases} f'(\xi), & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases} \quad (13)$$

До рівняння (13) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\xi} d\xi \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} \mathbf{k}_1(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} \mathbf{k}_1(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f'(\xi) e^{iz\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Введемо невідомі функції

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Phi^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} \mathbf{k}_1(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

аналітичні у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ ($c^+ < 0, c^- > 0$) відповідно. Перша складова лівої частини рівняння (14) після інтегрування частинами і застосування теореми про згортку перетворюється до вигляду $\mathcal{K}(z)\Phi^+(z)$. Отже, із (14) отримуємо функціональне рівняння Вінера – Гопфа [4]

$$\mathcal{K}(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-, \quad (16)$$

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f'(\xi) e^{iz\xi} d\xi = -\frac{\bar{P}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \Delta(s_k)}{\lambda'(s_k)} \frac{e^{s_k \xi_0}}{s_k - iz}.$$

Факторизуючи коефіцієнт і праву частину функціонального рівняння [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z) &= \mathcal{K}^+(z)\mathcal{K}^-(z), \quad \frac{F^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = f^+(z) - f^-(z), \\ \mathcal{K}^+(z) &= \mathcal{K}(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\delta_n}\right) \left(1 - \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \quad \mathcal{K}^-(z) \equiv \frac{\mathcal{K}^+(-z)}{\mathcal{K}(0)}, \\ \mathcal{K}(0) &= \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}, \quad f^+(z) = -\frac{\bar{P}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \Delta(s_k)}{\lambda'(s_k) \mathcal{K}^+(-is_k)} \frac{e^{s_k \xi_0}}{s_k - iz}, \end{aligned} \quad (17)$$

де $\delta_n, n = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$, знаходимо його розв'язок [4, 5]

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\mathcal{K}^+(z)} (f^+(z) + C), \quad \Phi^-(z) = \mathcal{K}^-(z) (f^-(z) + C). \quad (18)$$

Сталу C визначаємо з умови рівноваги (2). Перетворивши інтеграл із (2):

$$\int_0^{\ell} \sigma_{\mathfrak{g}} \Big|_{\mathfrak{g}=0} dr = 2G\ell \int_0^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = 2\sqrt{2\pi} G\ell \Phi^+(0), \quad (19)$$

знаходимо

$$C = -f^+(0) + \frac{\mathcal{K}(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{P + P_{\infty}}{2G\ell}. \quad (20)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (9) отримуємо оберненим перетворенням Фур'є першої з рівностей (15) за умови, що $\varphi(\xi) = 0$ при $\xi < 0$. З урахуванням перших рівностей (18), (17) і третьої з рівностей (8) маємо

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(-i\tau)}{\tau\Delta(-i\tau)} \mathcal{K}^-(\tau)(f^+(\tau) + C) e^{-i\tau\xi} d\tau.\end{aligned}\quad (21)$$

Напруження та переміщення за умови відсутності обертання на нескінченності. Нормальні напруження на лінії продовження тріщини ($0 < r < \ell$, $\vartheta = 0$) знайдемо, використовуючи заміни (3), (7). Обчислюючи інтеграл із (21) за теорією лишків, отримуємо

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} &= \frac{P}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)}{\Delta'(\delta_k)} \mathcal{K}^-(-i\delta_k) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_m)}{\lambda'(s_m) \mathcal{K}^-(-is_m)} \frac{(\ell/r_0)^{s_m}}{s_m - \delta_k} - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{P_{\infty}}{P}\right) \frac{\mathcal{K}(0)}{\delta_k} \right] \left(\frac{r}{\ell}\right)^{\delta_k-1}, \quad 0 < r < \ell.\end{aligned}\quad (22)$$

У вершині клина напруження (22) перетворюються в нуль ($\text{Re } \delta_1 > 1$), якщо $0 < \alpha < \pi/2$, і необмежені зі степеневою особливістю r^{δ_1-1} , $1/2 \leq \delta_1 < 1$, якщо $\pi/2 < \alpha \leq \pi$.

Застосовуючи до першої із рівностей (15) лему Ватсона [14], розв'язок (18) і асимптотичну оцінку

$$\mathcal{K}^+(z) \sim \sqrt{-2i\mathcal{K}(0)z}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (23)$$

знаходимо поведінку нормальних напружень поблизу вершини тріщини

$$\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} \sim \frac{2GC\sqrt{\ell}}{\sqrt{\mathcal{K}(0)(\ell-r)}}, \quad r \rightarrow \ell-0, \quad (24)$$

і визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень

$$\begin{aligned}K_I &= \lim_{r \rightarrow \ell-0} \sqrt{2\pi(\ell-r)} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \\ &= \frac{P}{\sqrt{\mathcal{K}(0)\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)(\ell/r_0)^{s_k}}{\lambda'(s_k) \mathcal{K}^-(-is_k)} + (P + P_{\infty}) \sqrt{\frac{\mathcal{K}(0)}{\ell}}.\end{aligned}\quad (25)$$

У випадку $P = 0$, $P_{\infty} \neq 0$ для K_I маємо значення, отримане в роботах [1, 11].

Для знаходження нормальних переміщень верхнього берега тріщини виходимо з виразу (8) для радіальної похідної від переміщень, який з урахуванням першої з рівностей (15) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{m-1}{m} \frac{e^{\xi}}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\Delta(-i\tau)}{\lambda(-i\tau)} (\sqrt{2\pi} \Phi^+(\tau) e^{-i\tau\xi} - \bar{P} e^{-i\tau(\xi-\xi_0)}) d\tau. \quad (26)$$

Обчислюючи інтеграл через лишки, знаходимо (при $\xi < 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} &= \frac{m-1}{m} \bar{P} e^{\xi} \left\{ \mathcal{K}(0) \left(1 + \frac{P_{\infty}}{P} - H(\xi_0 - \xi)\right) + \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{\lambda'(s_k)} \left[\left(s_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_m)}{\lambda'(s_m) \mathcal{K}^+(is_m)} \frac{e^{s_m \xi_0}}{s_m + s_k} + 1 + \frac{P_{\infty}}{P} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{e^{s_k \xi}}{\mathcal{K}^-(-is_k)} + \text{sgn}(\xi - \xi_0) e^{-s_k |\xi - \xi_0|} \right] \right\},\end{aligned}\quad (27)$$

де $H(\xi_0 - \xi)$ – функція Гевісайда. Інтегруючи (27), маємо

$$\begin{aligned}
u_g|_{g=0} &= \int_{\ell}^r \frac{\partial u_g}{\partial r} \Big|_{g=0} dr = \ell \int_{\xi}^0 \frac{\partial u_g}{\partial r} \Big|_{g=0} e^{-\xi} d\xi = \\
&= \frac{m-1}{m} \bar{P} \ell \left\{ -\mathcal{K}(0) \left[\left(1 + \frac{P_\infty}{P} \right) \xi - H(\xi_0 - \xi)(\xi - \xi_0) \right] + \right. \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{s_k \lambda'(s_k)} \left[\left(s_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_m)}{\lambda'(s_m) \mathcal{K}^+(is_m)} \frac{e^{s_m \xi_0}}{s_m + s_k} + 1 + \frac{P_\infty}{P} \right) \times \right. \\
&\left. \left. \times \frac{1 - e^{s_k \xi}}{\mathcal{K}^-(is_k)} + e^{-s_k |\xi - \xi_0|} - e^{s_k \xi_0} \right] \right\}. \tag{28}
\end{aligned}$$

Суми рядів із (28) зі слабкою степеневою збіжністю є такими:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{\lambda'(s_k) \mathcal{K}^+(is_k)(s_k + s_m)} &= \frac{\mathcal{K}^-(is_m) - 1}{s_m}, \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{\lambda'(s_k) \mathcal{K}^+(is_k) s_k} &= -i\mathcal{K}'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta_n} - \frac{1}{s_n} \right). \tag{29}
\end{aligned}$$

Щоб одержати першу з рівностей (29), розкладаємо інтеграл

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\Delta(i\tau) d\tau}{\lambda(i\tau) \mathcal{K}^+(\tau)(\tau + is_m)} &= -\frac{1}{s_m} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{\lambda'(s_k) \mathcal{K}^+(is_k)(s_k + s_m)} = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\mathcal{K}^-(\tau) d\tau}{\tau(\tau + is_m)} = -\frac{\mathcal{K}^-(is_m)}{s_m}
\end{aligned}$$

у ряд за лишками у полюсах з верхньої, а потім з нижньої півплощини. Другу рівність (29) знаходимо з першої граничним переходом при $s_m \rightarrow 0$.

Використовуючи значення сум (29), із (28) отримуємо нормальні переміщення верхнього берега тріщини

$$\begin{aligned}
u_g|_{g=0} &= \frac{m-1}{m} \frac{P}{2G} \left\{ \mathcal{K}(0) \left[H(r_0 - r) \ln \frac{r}{r_0} + \ln \frac{r_0}{\ell} + \frac{P_\infty}{P} \ln \frac{r}{\ell} - \right. \right. \\
&- i\mathcal{K}'(0) \left(1 + \frac{P_\infty}{P} \right) \left. \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{s_k \lambda'(s_k) \mathcal{K}^-(is_k)} \left[\left(\frac{r_0}{\ell} \right)^{-s_k} + \right. \\
&+ \left(s_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_m)}{\lambda'(s_m) \mathcal{K}^+(is_m)} \frac{(\ell/r_0)^{s_m}}{s_m + s_k} + 1 + \frac{P_\infty}{P} \right) \left(\frac{r}{\ell} \right)^{-s_k} - \\
&\left. \left. - \mathcal{K}^-(is_k) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{s_k \operatorname{sgn}(r_0 - r)} \right] \right\}, \quad \ell < r < \infty. \tag{30}
\end{aligned}$$

У точці прикладання сили P нормальні переміщення мають характерну логарифмічну особливість:

$$u_g|_{g=0} \sim -\frac{m-1}{m} \frac{P}{\pi G} \ln |r - r_0|, \quad r \rightarrow r_0. \tag{31}$$

Цей результат одержимо, зважаючи на те, що в (30) розбіжним у точці $r = r_0$ є тільки ряд

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{s_k \lambda'(s_k)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{s_k \operatorname{sgn}(r_0 - r)} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2s_k \alpha + s_k \sin 2\alpha}{s_k (\alpha \sin 2s_k \alpha - 2s_k \sin^2 \alpha)} e^{-s_k |\xi - \xi_0|}.
\end{aligned}$$

З огляду на асимптотичні оцінки

$$s_k \sim \pi k / (2\alpha), \quad \cos 2s_k \alpha \sim -2s_k^2 \sin^2 \alpha, \quad \sin 2s_k \alpha \sim \pm 2is_k^2 \sin^2 \alpha, \quad k \rightarrow \infty,$$

маємо

$$S \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-(\pi k / \alpha)(\xi - \xi_0)} = -\frac{2}{\pi} \ln(1 - e^{-(\pi / \alpha)|\xi - \xi_0|}) \sim -\frac{2}{\pi} \ln|r - r_0|,$$

$$r \rightarrow r_0.$$

Звідси одержуємо асимптотичну формулу (31).

Застосувавши до рівності (26) обернене перетворення Фур'є, з урахуванням першої крайової умови (1), розв'язку (18) і оцінки (23) за лемою Ватсона знаходимо асимптотичну поведінку нормальних переміщень поблизу вершини тріщини

$$u_{\vartheta} \big|_{\vartheta=0} \sim \frac{2(m-1)}{mG} K_I \sqrt{\frac{r-\ell}{2\pi}}, \quad r \rightarrow \ell + 0, \quad (32)$$

що узгоджується з асимптотикою полів напружень і переміщень в околі вершини тріщини [15].

На нескінченності нормальні переміщення (30) обмежені, якщо $P_{\infty} = 0$, і логарифмічно зростають у випадку $P_{\infty} \neq 0$, що вказує на відсутність обертання. Необхідний для цього момент на нескінченності визначимо з умови рівноваги

$$M_{\infty} = \int_0^{\ell} r \sigma_{\vartheta} \big|_{\vartheta=0} dr - Pr_0 - P_{\infty} d, \quad (33)$$

де d – плече сили P_{∞} відносно вершини клина. У випадку $P_{\infty} \neq 0$, $\alpha < \pi/2$ формула (33) втрачає зміст, оскільки плече d стає нескінченним. Однак момент $-M_{\infty}$ також стає нескінченним, і умова рівноваги (33) залишається правильною при скінченному значенні $M_{\infty} + P_{\infty} d$. Тому для зручності будемо вважати, що у вказаному випадку лінія дії сили P_{∞} може бути перенесена на скінченну відстань d від вершини клина і момент M_{∞} приймає скінченні значення.

На підставі (3), (7), (15) перетворимо інтеграл із (33):

$$\int_0^{\ell} r \sigma_{\vartheta} \big|_{\vartheta=0} dr = 2G\ell^2 \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\xi} d\xi = 2\sqrt{2\pi} G\ell^2 \Phi^+(i).$$

Тоді з урахуванням (18), (20), (17) отримаємо значення моменту на нескінченності

$$M_{\infty} = \frac{(P + P_{\infty})\ell}{\mathcal{K}^-(i)} - Pr_0 - P_{\infty} d + \frac{P\ell}{\mathcal{K}^+(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)(\ell/r_0)^{s_k}}{(s_k + 1)\lambda'(s_k)\mathcal{K}^-(is_k)}, \quad (34)$$

яке забезпечує відсутність обертання на нескінченності.

У частковому випадку $\alpha = \pi$ пружної площини з двома напівнескінченими розрізами $\ell < r < \infty$, $\vartheta = 0$ і $0 < r < \infty$, $\vartheta = \pi$ розв'язок задачі спрощується:

$$\lambda(s) = \sin \pi s, \quad \Delta(s) = 2 \cos \pi s,$$

$$\mathcal{K}(z) = 2z \operatorname{cth} \pi z, \quad \mathcal{K}(0) = \frac{2}{\pi},$$

$$\mathcal{K}^+(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1-iz)}{\Gamma(1/2-iz)}, \quad \mathcal{K}^-(z) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1+iz)}{\Gamma(1/2+iz)}, \quad \mathcal{K}^-(i) = 2,$$

$$s_k = k, \quad \delta_k = k - \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad K_I = \sqrt{\frac{2}{\pi\ell}} \left(P \sqrt{\frac{r_0}{r_0 - \ell}} + P_{\infty} \right),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}=0} &= -\frac{P}{\ell} \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(k-1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1/2)}{(m-k+1/2)m!} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^m - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1+P_{\infty}/P}{k-1/2} \right) \left(\frac{r}{\ell} \right)^{k-3/2} = \frac{1}{\pi\sqrt{r(\ell-r)}} \left(P \frac{\sqrt{r_0(r_0-\ell)}}{r_0-r} + P_{\infty} \right), \\
&\hspace{15em} 0 < r < \ell, \\
\frac{\partial u_{\mathfrak{g}}}{\partial r} \Big|_{\mathfrak{g}=0} &= \frac{(m-1)P}{\pi m G r} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(k-1)!} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1/2)}{(m+k)m!} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^m + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{k} \left(1 + \frac{P_{\infty}}{P} \right) \right] \left(\frac{\ell}{r} \right)^k + 1 + \frac{P_{\infty}}{P} - H(r-r_0) + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sgn}(r_0-r) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{k \operatorname{sgn}(r_0-r)} \right\} = \\
&= \frac{m-1}{\pi m G} \frac{1}{\sqrt{r(r-\ell)}} \left(P \frac{\sqrt{r_0(r_0-\ell)}}{r_0-r} + P_{\infty} \right), \quad \ell < r < \infty, \\
u_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}=0} &= -\frac{m-1}{\pi m G} \left[P \ln \frac{\ell|r-r_0|}{(\sqrt{(r_0-\ell)r} + \sqrt{r_0(r-\ell)})^2} - 2P_{\infty} \ln \left(\sqrt{\frac{r}{\ell}} + \sqrt{\frac{r}{\ell}-1} \right) \right], \\
M_{\infty} &= -P\sqrt{r_0(r_0-\ell)} - P_{\infty}d. \tag{35}
\end{aligned}$$

Значення K_I із (35), знайдене іншим шляхом, наведено в [7].

Зауважимо, що із формул (22), (30), (35) випливає, що розв'язок задачі для заданих на нескінченності сил $P_{\infty} \neq 0$, $P = 0$ є граничним випадком розв'язку для заданих на берегах розрізу сил $P \neq 0$, $P_{\infty} = 0$, якщо точка r_0 прикладання сил прямує до нескінченності, з формальною заміною P на P_{∞} .

Побудова розв'язку з вільним обертанням і відсутністю моменту на нескінченності. Спочатку побудуємо однорідний розв'язок, коли на нескінченності напруження мають нульовий головний вектор і заданий головний момент M_{∞} . Для цього розглянемо допоміжний стан від дії на кожному березі тріщини пари зосереджених сил – сили P у точці $r_0 + \Delta r$ і сили $-P$ у точці r_0 – з відсутністю обертання і головного вектора на нескінченності. Розв'язок, який відповідає допоміжному стану, на підставі формул (22), (25), (30), (34) має такий вигляд ($P_{\infty} = 0$):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathfrak{g}}^{(2)}|_{\mathfrak{g}=0} &= \frac{P}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)}{\Delta'(\delta_k)} \mathcal{K}^{-}(-i\delta_k) \left(\frac{r}{\ell} \right)^{\delta_k-1} \times \\
&\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_m)[(\ell/(r_0+\Delta r))^{s_m} - (\ell/r_0)^{s_m}]}{\lambda'(s_m)\mathcal{K}^{-}(is_m)(s_m-\delta_k)}, \quad 0 < r < \ell, \\
K_I^{(2)} &= \frac{P}{\sqrt{\mathcal{K}(0)}\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)[(\ell/(r_0+\Delta r))^{s_k} - (\ell/r_0)^{s_k}]}{\lambda'(s_k)\mathcal{K}^{-}(is_k)}, \\
u_{\mathfrak{g}}^{(2)}|_{\mathfrak{g}=0} &= \frac{m-1}{m} \frac{P}{2G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{s_k \lambda'(s_k) \mathcal{K}^{-}(is_k)} \left\{ \mathcal{K}^{-}(is_k) \left[\left(\frac{r}{r_0+\Delta r} \right)^{s_k} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{s_k} \right] - \left(\frac{\ell}{r_0+\Delta r} \right)^{s_k} + \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^{s_k} - s_k \left(\frac{\ell}{r} \right)^{s_k} \times \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_m)[(\ell/(r_0+\Delta r))^{s_m} - (\ell/r_0)^{s_m}]}{\lambda'(s_m)\mathcal{K}^{+}(is_m)(s_m+s_k)} \right\}, \quad \ell < r < r_0,
\end{aligned}$$

$$M_\infty^{(2)} = -P\Delta r + \frac{P\ell}{\mathcal{K}^+(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)[(\ell/(r_0 + \Delta r))^{s_k} - (\ell/r_0)^{s_k}]}{(s_k + 1)\lambda'(s_k)\mathcal{K}^-(is_k)}. \quad (36)$$

Асимптотика цього розв'язку при необмеженому віддаленні зосереджених сил від вершини клина є наступною ($s_1 = 1$):

$$\begin{aligned} \sigma_9^{(2)}|_{9=0} &\sim \frac{C_0\ell^2}{r_0^2} \sigma_9^{(0)}|_{9=0}, \quad K_I^{(2)} \sim \frac{C_0\ell^2}{r_0^2} K_I^{(0)}, \quad u_9^{(2)}|_{9=0} \sim \frac{C_0\ell^2}{r_0^2} u_9^{(0)}|_{9=0}, \\ M_\infty^{(2)} &\sim -P\Delta r + \frac{C_0\ell^2}{r_0^2} M_\infty^{(0)}, \quad r_0 \rightarrow \infty, \quad C_0 = -\frac{2\Delta r}{(\text{tg}\alpha - \alpha)\mathcal{K}^-(i)\ell}, \\ K_I^{(0)} &= -\frac{P}{\sqrt{\mathcal{K}(0)\ell}}, \quad M_\infty^{(0)} = -\frac{P\ell}{2\mathcal{K}^+(i)}, \\ \sigma_9^{(0)}|_{9=0} &= \frac{P}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)\mathcal{K}^-(i\delta_k)}{(\delta_k - 1)\Delta'(\delta_k)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{\delta_k - 1}, \\ u_9^{(0)}|_{9=0} &= \frac{m-1}{m} \frac{P}{2G} \left[1 - \mathcal{K}^-(i) \frac{r}{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{(s_k + 1)\lambda'(s_k)\mathcal{K}^+(is_k)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{-s_k} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Співвідношення (37) визначають напружено-деформований стан клина, відмічений верхнім індексом (0), який з точністю до множника $M_\infty/M_\infty^{(0)}$ відповідає шуканому однорідному розв'язку. Отже, однорідний розв'язок з заданим моментом M_∞ на нескінченності отримуємо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_9^{(M)}|_{9=0} &= -\frac{2M_\infty}{P\ell} \mathcal{K}^+(i) \sigma_9^{(0)}|_{9=0}, \quad 0 < r < \ell, \\ K_I^{(M)} &= 2M_\infty \mathcal{K}^-(i) \sqrt{\frac{\mathcal{K}(0)}{\ell^3}}, \\ u_9^{(M)}|_{9=0} &= -\frac{2M_\infty}{P\ell} \mathcal{K}^+(i) u_9^{(0)}|_{9=0}, \quad \ell < r < \infty. \end{aligned} \quad (38)$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень $K_I^{(M)}$ із (38) виражається через нескінченний добуток $\mathcal{K}^-(i)$ згідно з (17). Значення $K_I^{(M)}$ можна звести до вигляду, отриманого в [1, 11] і наведеного також у [9], якщо факторизацію (17) коефіцієнта $\mathcal{K}(z)$ виконати в інтегралах типу Коші.

Розв'язок задачі з відсутнім на нескінченності моментом отримуємо у вигляді суперпозиції розв'язків з відсутнім обертанням і прикладеним на нескінченності моментом:

$$\begin{aligned} \sigma_9^*|_{9=0} &= \sigma_9|_{9=0} - \sigma_9^{(M)}|_{9=0}, \quad K_I^* = K_I - K_I^{(M)}, \\ u_9^*|_{9=0} &= u_9|_{9=0} - u_9^{(M)}|_{9=0}. \end{aligned} \quad (39)$$

Перші складові у (39) визначені формулами (22), (25), (30), другі – рівностями (37), (38), де значення M_∞ задано у (34). Зокрема, розподіл нормальних напружень на продовженні тріщини і коефіцієнт інтенсивності напружень виражаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_9^*|_{9=0} &= \frac{P}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)}{\Delta'(\delta_k)} \mathcal{K}^-(i\delta_k) \left[\left(1 + \frac{P_\infty}{P} \right) \frac{\mathcal{K}(0)(\delta_k + 1)}{\delta_k(\delta_k - 1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\mathcal{K}^+(i)}{\delta_k - 1} \left(\frac{r_0}{\ell} + \frac{P_\infty}{P} \frac{d}{\ell} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_m)(\ell/r_0)^{s_m}}{\lambda'(s_m)\mathcal{K}^-(is_m)} \left(\frac{1}{s_m - \delta_k} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{(\delta_k - 1)(s_m + 1)} \right) \right] \left(\frac{r}{\ell}\right)^{\delta_k - 1}, \quad 0 < r < \ell, \end{aligned}$$

$$K_I^* = \frac{P}{\sqrt{\mathcal{K}(0)\ell}} \left(2\mathcal{K}^+(i) \frac{r_0}{\ell} - \mathcal{K}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s_k - 1)\Delta(s_k)(\ell/r_0)^{s_k}}{(s_k + 1)\lambda'(s_k)\mathcal{K}^-(is_k)} \right) + P_{\infty} \left(\frac{2d}{\ell} \mathcal{K}^-(i) - 1 \right) \sqrt{\frac{\mathcal{K}(0)}{\ell}}. \quad (40)$$

Якщо сили прикладені тільки на нескінченності ($P = 0$, $P_{\infty} \neq 0$), K_I^* лінійно залежить від відстані d між лінією дії сил P_{∞} і вершиною клина. Для відстані $d = d_0 = \ell/\mathcal{K}^-(i)$ значення K_I^* співпадає з K_I із (25), тобто у цьому разі обертання на нескінченності відсутнє. При $d < d_0/2$ коефіцієнт K_I^* стає від'ємним, і задача втрачає зміст. Більш детальний аналіз за допомогою виразів (30), (36), (37) для переміщень і (34) для моменту показує, що

$$u_g^* \Big|_{g=0} \sim \frac{m-1}{m} \frac{P_{\infty}}{2G} (\mathcal{K}^-(i)d - \ell)r, \quad r \rightarrow \infty, \quad P = 0. \quad (41)$$

Тобто у випадку $d < d_0$ береги розрізу на нескінченності взаємно перекриваються ($u_g^* \Big|_{g=0} < 0$, $\mathcal{K}^-(i) > 0$), і задачу необхідно розглядати в уточненій постановці, вважаючи, що виникає область контакту $\ell_1 \leq r < \infty$, де $\ell_1 > \ell$, берегів напівнескінченної тріщини. Отже, випадок відсутності обертання на нескінченності є граничним випадком, коли відстань між лінією дії сил P_{∞} і вершиною клина стає найменшою за умови, що береги тріщини не взаємодіють.

Якщо вважати, що $P = 0$, а на нескінченності задано силу P_{∞} і момент M_{∞} , то, комбінуючи другу складову із другої формули (40) і другу рівність із (38), отримаємо коефіцієнт інтенсивності напружень у вигляді

$$K_I^* = P_{\infty} \left(\frac{2d}{\ell} \mathcal{K}^-(i) - 1 \right) \sqrt{\frac{\mathcal{K}(0)}{\ell}} + 2M_{\infty} \mathcal{K}^-(i) \sqrt{\frac{\mathcal{K}(0)}{\ell^3}}. \quad (42)$$

Слід відмітити, що аналогічна формула, яка отримана в роботі [1] і наводиться також у довіднику [9], помилково містить замість першої складової відповідний доданок із (25), який відповідає відсутності обертання на нескінченності. У той же час, за постановкою задачі з [1], лінія дії сили P_{∞} проходить через вершину клина ($d = 0$). На нашу думку, розбіжність результатів можна пояснити тим, що в [1] однією з невідомих аналітичних функцій у функціональному рівнянні Вінера – Гопфа є перетворення Мелліна другої радіальної похідної від нормальних переміщень, яке не існує через неінтегровну особливість з показником $-3/2$ підінтегральної функції. Відмітимо також, що у випадку півплощини з напівнескінченим розрізом ($\alpha = \pi/2$, $1/\mathcal{K}^-(i) = 0.73608$) значення K_I^* із (42) співпадає з результатами, наведеними в [9], а також з наближеною формулою [3, 7]

$$K_I^* = \sqrt{\pi} \frac{4\pi - 12}{\pi^2 - 8} \frac{P_{\infty}}{\sqrt{\ell}} + \sqrt{\pi} \frac{4\pi - 8}{\pi^2 - 8} \frac{M_{\infty}}{\sqrt{\ell^3}}, \quad d = \frac{\ell}{2} \quad (43)$$

з точністю 2.35 % і 8.89 % для сили і моменту відповідно.

Зауважимо, що існує прямиий шлях побудови розв'язку з вільним обертанням на нескінченності. Для цього необхідно доповнити подання (5) радіальної похідної від нормальних переміщень сталим доданком $A = \frac{\partial u_g}{\partial r} \Big|_{g=0, r \rightarrow \infty}$,

який враховує поворот берегів тріщини на нескінченності. Введення невідомо-

мої сталої A еквівалентно зміні щільності $\Delta(s)\frac{a(s)}{\lambda(s)}$ на доданок $-2\pi\frac{m}{m-1}A\delta(i(s+1))$ на підставі узагальненого перетворення Мелліна

$$\int_0^{\infty} r^{a+s-1} dr = 2\pi\delta(i(s+a)), \quad r^a = \frac{1}{i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \delta(i(s+a))r^{-s} ds \quad (44)$$

функції r^a при $a=1$. При цьому щільність $a(s)$ разом з поданням (5) для нормальних напружень не змінюється, оскільки функція $\lambda(s)/\Delta(s)$ має простий нуль у точці $s=-1$.

Праві частини інтегрального та функціонального рівнянь (9) і (16), а також функція $f^+(z)$ із (17) зміняться відповідно на доданки

$$\frac{m}{m-1}Ae^{-\xi}, \quad -\frac{m}{m-1}\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-iz}, \quad -\frac{m}{m-1}\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\mathcal{K}^-(i)}\frac{1}{1-iz}.$$

Значення сталої A знаходимо з умови рівноваги (33) у вигляді

$$A = \frac{m-1}{m} \frac{\mathcal{K}^-(i)}{G\ell} \left(\mathcal{K}^+(i) \frac{Pr_0 + P_\infty d}{\ell} - \mathcal{K}(0)(P + P_\infty) - P \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)(\ell/r_0)^{s_k}}{(s_k+1)\lambda'(s_k)\mathcal{K}^-(is_k)} \right).$$

Після вказаних змін приходимо безпосередньо до розв'язання (39), (40).

Результати обчислень. На рис. 2 показано розподіл безрозмірних нормальних напружень $\bar{\sigma}$ на лінії продовження тріщини ($0 \leq r < \ell$), на рис. 3 – безрозмірні нормальні переміщення \bar{u} верхнього берега тріщини ($r \geq \ell$, $m = 10/3$) у випадку, коли клин є чвертю площини ($\alpha = \pi/4$). Криві 1 відповідають умові відсутності обертання на нескінченності, криві 2 – вільному обертанню і відсутності моментів на нескінченності. При цьому відносна координата прикладання зосереджених сил на берегах тріщини $r_0/\ell = 2$, сили на нескінченності відсутні ($P_\infty = 0$), а безрозмірними є величини $\bar{\sigma} = (\ell/P)\sigma_9|_{9=0}$, $\bar{u} = (2G/P)u_9|_{9=0}$ для кривих 1 і $\bar{\sigma} = (\ell/P)\sigma_9^*|_{9=0}$, $\bar{u} = (2G/P)u_9^*|_{9=0}$ для кривих 2. Криві 3 показують розподіл величин $\bar{\sigma} = (\ell^2/M_\infty)\sigma_9^{(M)}|_{9=0}$, $\bar{u} = (2G\ell/M_\infty)u_9^{(M)}|_{9=0}$ у випадку дії на нескінченності заданих моментів M_∞ , $P = 0$, $P_\infty = 0$.

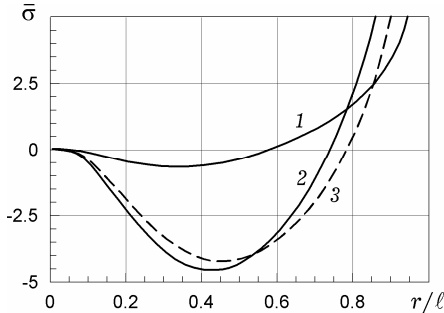


Рис. 2

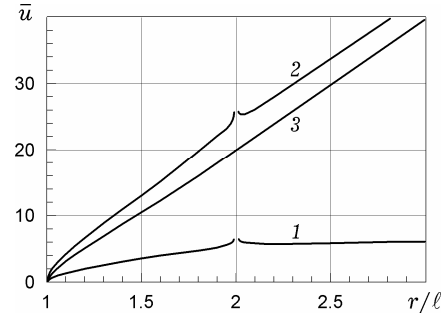


Рис. 3

У всіх трьох розглянутих випадках напруження розтягу ($\bar{\sigma} > 0$), які є необмеженими у вершині тріщини ($K_I = 3.485P/\sqrt{\ell}$, $M_\infty = -0.9445P\ell$, $K_I^* = 10.801P/\sqrt{\ell}$, $K_I^{(M)} = 7.745M_\infty/\sqrt{\ell^3}$), змінюються при наближенні до вершини клина напруженнями стиску ($\bar{\sigma} < 0$). Зняття умови відсутності обертання на нескінченності (перехід від кривої 1 до кривої 2 на рис. 2) значно збільшує рівень напружень на перешийку і зменшує зону розривних напружень поблизу вершини тріщини. Розкриття тріщини при цьому також значно збільшується і стає необмеженим з віддаленням від вершини тріщини (рис. 3).

На рис. 4 у випадку чверті площини ($\alpha = \pi/4$) і відсутності сил на нескінченності ($P_\infty = 0$) показано залежність безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень $\hat{K}_I = (\sqrt{\ell}/P)K_I$ за умови відсутності обертання на нескінченності (крива 1) і $\hat{K}_I = (\sqrt{\ell}/P)K_I^*$ без зазначеної умови (крива 2) від відносної координати r_0/ℓ точки прикладання зосереджених сил P . При наближенні точки прикладання сил до вершини тріщини ($r_0/\ell \rightarrow 1$) коефіцієнти інтенсивності напружень K_I і K_I^* необмежено зростають. При віддаленні вказаної точки від вершини тріщини за відсутності обертання (крива 1) коефіцієнт \hat{K}_I прямує до значення 4.691 для випадку дії сили на нескінченності ($P = P_\infty$, $r_0 \rightarrow \infty$), а у випадку вільного обертання (крива 2) зростає асимптотично лінійно.

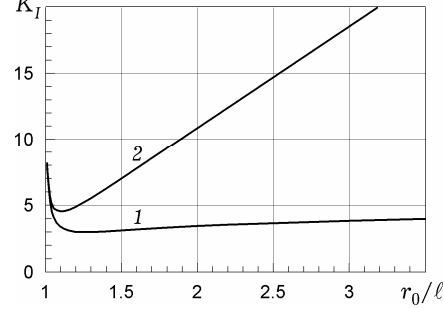


Рис. 4

При віддаленні вказаної точки від вершини тріщини за відсутності обертання (крива 1) коефіцієнт \hat{K}_I прямує до значення 4.691 для випадку дії сили на нескінченності ($P = P_\infty$, $r_0 \rightarrow \infty$), а у випадку вільного обертання (крива 2) зростає асимптотично лінійно.

Висновки. У розглянутій задачі вирішальне значення має умова на обертання на нескінченності. Якщо обертання на нескінченності відсутнє, точний розв'язок будується методом Вінера – Гопфа з використанням класичного перетворення Мелліна. У випадку вільного обертання на нескінченності задача ускладнюється і до її розв'язання необхідно застосовувати нові підходи. У той же час відсутність чи наявність обертання на нескінченності суттєво впливає на напружено-деформований стан клина з напівнескінченною тріщиною. Так, коефіцієнт інтенсивності напружень при віддаленні діючих на берегах тріщини зосереджених сил від вершини клина асимптотично не змінюється за відсутності обертання і лінійно зростає при вільному обертанні.

1. Кипнис Л. А. Упругое равновесие клина с трещиной // Прикл. математика и механика. – 1979. – 43, № 1. – С. 153–159.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
3. Нейбер Г. Концентрация напряжений. – Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
4. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
5. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
6. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
7. Парис П., Си Дж. Анализ напряженного состояния около трещин // Прикладные вопросы вязкости разрушения. – Москва: Мир, 1968. – С. 64–142.
8. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.

9. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общей ред. В. В. Панасюка. – Т. 2.)
10. Саврук М. П. Напряжения около трещины в упругой полуплоскости // Физ.-хим. механика материалов. – 1975. – **11**, № 5. – С. 59–64.
Те саме: *Savruk M. P. Stresses in the vicinity of a crack in an elastic half-plane // Mater. Sci. – 1975. – 11, No. 5. – P. 555–560.*
11. Садыхов А. Э. Клины с трещиной / Азерб. гос. пед. ин-т. – Баку, 1979. – 32 с. – Деп. в ВИНТИ 28.03.79, № 1091.
12. Садыхов А. Э. Об одной задаче теории упругости для клина с полубесконечной трещиной под действием сосредоточенного момента // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 5. – С. 91–96.
Те саме: *Sadykhov A. É. Elasticity-theory problem for wedge with semiinfinite crack subjected to point moment // Int. Appl. Mech. – 1980. – 16, No. 5. – P. 431–437.*
13. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
14. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
15. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
16. *Ventham J. P., Koiter W. T. Asymptotic approximation to crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems / Ed. G. C. Sih. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1973. – P. 131–178. – (Mechanics of fracture; Vol. 1).*
17. *Bueckner H. F. Field singularities and related integral representations // Methods of analysis and solutions of crack problems / Ed. G. C. Sih. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1973. – P. 239–314. – (Mechanics of fracture; Vol. 1).*
18. *Fracture mechanics design handbook. – Redstone Arsenal, 1976. – 238 p. – (Tech. rep. / US Army Missile Command; No. 77–5).*
19. *Freund L. B. Stress intensity factor calculations based on a conservation integral // Int. J. Solids and Struct. – 1978. – 14, No. 3. – P. 241–250.*
20. *Srivastav R. P., Narain P. Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous load // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1965. – 61, No. 4. – P. 945–954.*
21. *Stallybrass M. P. A semi-infinite crack perpendicular to the surface of an elastic half-plane // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – 9, No. 1. – P. 133–150.*
22. *Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. The stress analysis of cracks: Handbook. – Hellertown: Del. Research Corp., 1973. – 385 p.*
23. *Wilson W. K. Stress intensity factors for deep cracks in bending and compact tension specimens // Eng. Fract. Mech. – 1970. – 2, No. 2. – P. 169–171.*

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО КЛИНА С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрено равновесие упругого клина с полубесконечной трещиной вдоль оси симметрии, к берегам которой приложены нормальные сосредоточенные силы. С применением метода Винера – Хопфа построены точные решения задачи как при условии отсутствия вращения на бесконечности, так и без наложения отмеченного условия. Найденны коэффициенты интенсивности напряжений, распределение нормальных напряжений на линии продолжения трещины, нормальные перемещения берегов трещины.

EQUILIBRIUM OF ELASTIC WEDGE WITH SEMI-INFINITE CRACK

The equilibrium of elastic wedge with semi-infinite crack on the axis of symmetry is studied. The normal point forces are applied to the crack sides. Using the Wiener – Hopf method the exact solutions are constructed with and without conditions of absence of rotation at infinity. The stress intensity factors, the distribution of normal stresses at the crack extension line and normal displacements of crack sides are found.

¹ Сум. держ. пед. ун-т, Суми,

² Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми