

ЗБУДЖЕННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНКИ МЕТАЛ – П'ЄЗОКЕРАМІКА НЕСТАЦІОНАРНИМ ЕЛЕКТРИЧНИМ СИГНАЛОМ

Досліджується поведінка електрично навантаженої тонкої прямокутної асиметричної біморфної пластинки. Коливання розглядаються в рамках узагальнених гіпотез Кірхгофа. Розв'язок отримано з використанням перетворення Лапласа за часом з наступним зведенням задачі до інтегрального рівняння Вольтерра. На підставі виконаних розрахунків виявлено закономірності деформування перетворювача в залежності від конфігурації електричного сигналу. Наведено також методика розв'язання оберненої задачі про визначення електричного сигналу як функції часу, який забезпечує заданий закон руху певної точки пластини.

Вступ. Багатошарові п'єзоелектричні перетворювачі одержали широке розповсюдження в машинобудуванні, медицині, акустиці тощо [7]. Особливо ефективним є їх застосування як прецизійних приводів малих переміщень (актуаторів) у технічних пристроях, що працюють у режимі реального часу. Цим зумовлений підвищений інтерес до досліджень поведінки шаруватих п'єзоперетворювачів при статичних і динамічних електричних навантаженнях.

З точки зору технології виготовлення і простоти керуючого електричного навантаження найбільший інтерес становлять асиметричні біморфні перетворювачі енергії [7], базовими елементами яких є плоскопаралельні шари з п'єзокераміки та п'єзоелектрично пасивного матеріалу. Статичний деформований стан електрично навантажених двошарових електропружних пластин вивчали в роботах [2, 12, 13]. Гармонічні коливання п'єзокерамічних пластин досліджували в [3, 4, 8]. У нестационарній постановці для тонкостінних перетворювачів біморфної структури типу метал – п'єзокераміка при їх збудженні електричним сигналом розглядалися задачі для смуги [1] та балки [10]. Дослідженням перехідних процесів у товстостінних циліндричних і сферичних п'єзоперетворювачах у режимі зворотного п'єзо-ефекту присвячені публікації [9, 11, 14].

У цій роботі вивчається поведінка прямокутної асиметричної біморфної пластини у випадку, коли до суцільних електродних покриттів п'єзощару підводиться нестационарний електричний сигнал. Наведено також алгоритм розв'язання оберненої задачі, яка формулюється як визначення закону зміни за часом керуючого електричного сигналу для забезпечення заданого руху певної точки пластини. Актуальність задач у такій постановці зумовлена широким застосуванням тонкостінних елементів, поведінкою яких необхідно керувати в процесі роботи (адаптивна оптика, високошвидкісні клапани, супутникові антени тощо).

Постановка задачі. Розглядається тонкостінна прямокутна пластина розміром у плані $2L \times 2B$, яка складається з п'єзокерамічного шару товщини h_1 і пружної підкладки товщини h_2 . На лицьовій поверхні поляризованого по товщині електропружного шару нанесено нескінченно тонкі суцільні електродні покриття (впливом електродів на пружні властивості біморфу нехтуємо). При цьому на зовнішньому покритті задається нестационарний електричний потенціал $v(t)$ (t – час), а внутрішнє електрично не навантажено. В результаті створення в п'єзощарі електричного поля виникає згинальний момент, який збуджує низькочастотні згинні коливання пластини.

Припускаємо, що до подачі електричного сигналу перетворювач перебуває в стані спокою. Граничні умови відповідають шарнірному закріпленню торців.

У такій постановці напруга $v(t)$, геометричні параметри біморфної пластини і константи, які характеризують фізико-механічні властивості її матеріалів, вважаємо відомими, а форма вигнутої поверхні є шуканою функцією часу.

Вихідна система рівнянь. Віднесемо пластинку до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$. При цьому вісь Ox_3 спрямована уздовж силових ліній електричного поля попередньої поляризації п'єзоелектрика і проходить через геометричний центр пластини, а площина контакту шарів має координату $x_3 = z_0$ [7], де $z_0 = (B_{11}h_1^2 - A_{11}h_2^2)/(2(B_{11}h_1 + A_{11}h_2))$. Зазначимо, що механічні характеристики, які входять у формулу для z_0 , і розрахункові вирази для них, наведено в статті [2].

З точних розв'язків задач про згин пластин описаної будови впливає доцільність залучення узагальнених на теорію п'єзоелектрики гіпотез Кірхгофа [3, 7, 13]. Тоді рівняння механічних коливань перетворювача мають звичайний для теорії тонких пружних пластин вигляд [3]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, w – нормальні переміщення точок поверхні зведення біморфної пластини ($z = 0$).

Граничні умови на контурі у випадку шарнірного закріплення описуються рівностями

$$w|_{x_1=\ell} = 0, \quad w|_{x_2=b} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_1=\ell} = -v, \quad \left(\nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_2=b} = -v, \quad (2)$$

де $\ell = 1$; $b = B/L$; ν_0 – зведений коефіцієнт Пуассона [2, 3].

Рівняння (1) та умови (2) записано у безрозмірному виді: x_1 і x_2 віднесені до L ; v – до $D/\alpha L^2$; t – до $L^4 \sqrt{\gamma/D}$, де $\gamma = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$, ρ_j – густини матеріалів шарів, а α і D – керуючий коефіцієнт і ефективна циліндрична жорсткість [2].

Рівності (1), (2) разом з нульовими початковими умовами складають замкнуту систему розв'язувальних рівнянь вимушених коливань біморфної прямокутної пластини при електричному її навантаженні.

Розв'язання задачі. Перетворювачі розглянутого конструкційного виконання використовуються переважно в області частот, менших від першої резонансної частоти згинних коливань. Тому ефективним прийомом розв'язання задачі є залучення принципу суперпозиції [10, 14], відповідно до якого функцію поперечних переміщень пластини $w(x_1, x_2, t)$ можемо подати у вигляді суми

$$w = w_s + w_d, \quad (3)$$

де w_s апроксимує поверхню пластини та задовольняє граничні умови (2). Вираз для w_s можна одержати, розглянувши задачу про згин шарнірно закріпленої прямокутної пружної пластини, на контурі якої задано рівномір-

но розподілений згинальний момент $M = -\alpha v$. У випадку симетрії поверхні відносно координатних осей Ox_1 і Ox_2 відповідно до викладеної в [5] методики одержимо

$$w_s = -v(t) \cdot F(x_1, x_2), \quad (4)$$

де

$$F(x_1, x_2) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) \left[\frac{\cos(\mu_k x_1)}{\ell \cdot \mu_k^3} \left(1 - \frac{\text{ch}(\mu_k x_2)}{\text{ch}(\mu_k b)} \right) + \frac{\cos(\eta_k x_2)}{b \cdot \eta_k^3} \left(1 - \frac{\text{ch}(\eta_k x_1)}{\text{ch}(\eta_k \ell)} \right) \right],$$

μ_k і η_k – хвильові числа: $\mu_k = (k - 0.5)\pi/\ell$, $\eta_k = (k - 0.5)\pi/b$.

Друга складова прогину (3) описує переміщення шарнірно закріпленої пластини при однорідних граничних умовах. Тоді функцію w_d можна подати у вигляді розвинення за власними формами коливань [5]:

$$w_d = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \cos(\mu_m x_1) \cos(\eta_n x_2), \quad (5)$$

де $A_{mn}(t)$ – невідомі коефіцієнти, для знаходження яких підставимо вирази (3)–(5) у трансформоване з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом рівняння (1) (з урахуванням нульових початкових умов). Далі на підставі властивості ортогональності тригонометричних функцій в межах зміни аргументів (x_1, x_2) одержимо співвідношення для шуканих коефіцієнтів:

$$A_{mn}^L(s) = -\frac{4}{\ell b} \frac{(-1)^{m+n}}{\mu_m \eta_n \omega_{mn}} v^L(s) \frac{2s^2 + \omega_{mn}^2}{s^2 + \omega_{mn}^2}. \quad (6)$$

Тут індексом L позначено відповідні трансформанти; s – параметр перетворення; $\omega_{mn} = \mu_m^2 + \eta_n^2$.

Перехід у простір оригіналів (6) з використанням теореми про згортку двох функцій не викликає принципових ускладнень:

$$A_{mn}(t) = \frac{4}{\ell b} \frac{(-1)^{m+n+1}}{\mu_m \eta_n} \left[\frac{2}{\omega_{mn}} v(t) - \int_0^t v(\tau) \sin(\omega_{mn}(t - \tau)) d\tau \right]. \quad (7)$$

Вирази (3)–(5) і (7) дозволяють записати функцію w наступним чином:

$$w = -v(t) \Psi_v^{(1)}(x_1, x_2) + \int_0^t v(\tau) \Psi_v^{(2)}(x_1, x_2, t - \tau) d\tau, \quad (8)$$

де

$$\Psi_v^{(1)}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) + \frac{8}{\ell b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{\mu_m \eta_n \omega_{mn}} \cos(\mu_m x_1) \cos(\eta_n x_2),$$

$$\Psi_v^{(2)}(x_1, x_2, t) = \frac{4}{\ell b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{\mu_m \eta_n} \cos(\mu_m x_1) \cos(\eta_n x_2) \sin(\omega_{mn} t).$$

При проведенні конкретних розрахунків нормальних переміщень за формулою (8) використовували метод квадратур.

Обернена задача. Співвідношення (8), яке пов'язує електричне навантаження $v(t)$ з прогинами $w(x_1, x_2, t)$, дозволяє розглянути задачу про визначення електричного сигналу як функції часу для забезпечення за-

даного руху певної точки (x_0, y_0) актуатора. Для її розв'язання з використанням методу квадратурних формул рівність (8) раціонально замінити скінченновимірним аналогом:

$$\mathbf{w} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}, \quad (9)$$

де \mathbf{w} і \mathbf{v} – вектори з компонентами, які визначають функції $w(x_0, y_0, t)$ і $v(t)$ на скінченній множині вузлів часового інтервалу; \mathbf{M} – дискретна модель інтегрального оператора (8).

У системі лінійних алгебраїчних рівнянь (9) вектор \mathbf{w} припускаємо заданим, а вектор \mathbf{v} – шуканим. Зауважимо, що при побудові розв'язку системи (9), стійкого до обчислювальних похибок, ефективним прийомом є залучення регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова [6].

Числові результати. Наведений далі графічний матеріал побудовано за результатами обчислень для випадку, коли шари пластини виконані з п'єзокераміки PZT-5 та титанового сплаву ВТ-6, фізико-механічні властивості яких наведені в [1, 10]. Геометрія перетворювача визначається розмірами $L = 25$ мм, $B = 0.6 \cdot L$, $h_1 = 1$ мм і $h_2 = 0.5$ мм. Точність розрахунків контролювали кількістю членів подвійного ряду (5) і варіюванням кроку розбиття часового інтервалу на відрізки для реалізації методу квадратур.

На рис. 1 зображено залежності нормальних переміщень центральної точки актуатора $w_0(t) = w(0, 0, t)$ при його збудженні електричним сигналом прямокутного профілю $v(t) = H(T - t)$ (де T – тривалість прикладання навантаження і $H(t)$ – одинична функція Гевісайда) та синусоїдальним імпульсом $v(t) = H(T - t) \cdot \sin(\omega t)$. Бачимо, що при навантаженні прямокутним сигналом (криві 1, 2 відповідають значенням $T = 1.02, 1.36$) пластина коливається відносно деякого статичного рівня переміщень протягом дії імпульсу ($0 < t \leq T$). При прикладанні синусоїдального навантаження з нижчою частотою власних коливань перетворювача ($\omega = \omega_{1,1} = 9.3$) амплітуда коливань на інтервалі $0 < t \leq T$ лінійно зростає (крива 3 для $T = 1.02$). Після закінчення дії електричного навантаження ($t > T$) коливання тривають відносно недеформованого стану з максимальною на момент $t = T$ амплітудою.

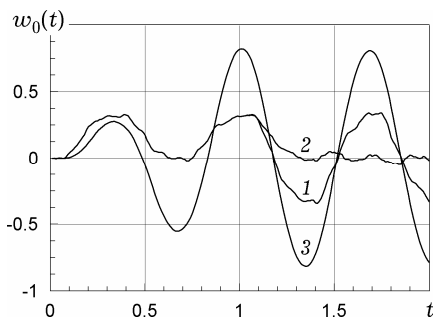


Рис. 1. Переміщення центральної точки

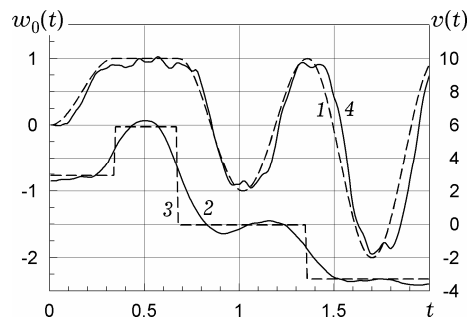


Рис. 2. Керування прогинами пластини

На рис. 2 наведено результати ідентифікації керуючого електричного сигналу $v(t)$. Нехай необхідно забезпечити рух центральної точки біморфної пластини $w_0(t) = w(0, 0, t)$ за законом, графік якого відображено штриховою кривою 1 (рис. 2). Крива 2 ілюструє результат розв'язання системи рівнянь (9) з параметром регуляризації 10^{-4} [6] (при цьому $\Delta t = 0.01$). Наступна апроксимація сигналу кусково-сталім аналогом (крива 3) і моделювання перехідних процесів в електропружній пластині за допомогою скінченно-елементного програмного комплексу ANSYS дає криву 4, яка мало відрізняється від заданої.

Задовільне узгодження кривих 1 і 4 (рис. 2), які отримані принципово різними підходами, дозволяє стверджувати про адекватність застосованих гіпотез, ефективність розроблених методик розв'язання задач і вірогідність отриманих результатів (похибка не перевищує 8%, її можна вважати цілком прийнятною).

Висновки. У роботі досліджується поведінка напівпасивного прямокутного електропружного перетворювача при нестационарному електричному навантаженні. Наведено також методику розв'язування задачі про визначення електричного сигналу як функції часу, прикладання якого до суцільних електродних покриттів п'єзоелемента забезпечує заданий закон зміни в часі певної точки пластини. Для оцінки вірогідності результатів та адекватності прийнятих гіпотез розв'язано тестову задачу за допомогою прикладної програми.

1. *Бабаев А. Э., Бабаев А. А., Янчевский И. В.* Активное демпфирование нестационарных изгибных колебаний биморфной балки // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 7. – С. 84–92.
Те саме: *Babaev A. E., Babaev A. A., Yanchevskii I. V.* Active damping of the nonstationary flexural vibrations of a bimorph beam // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 7. – P. 806–811.
2. *Ватульян А. О., Лапицкая Н. Б., Наседкин А. В., Скалиух А. С., Соловьев А. Н.* Управление поверхностью секционированной биморфной пластины // Прикл. механика и техн. физика. – 1995. – **36**, № 4. – С. 131–136.
3. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 277 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.)
4. *Зинчук Л. П., Левченко В. В., Шульга Н. А.* Распространение объемных электроупругих волн сдвига в регулярно-слоистой среде типа металл – пьезоэлектрик // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 30. – С. 4–8.
Те саме: *Zinchuk L. P., Levchenko V. V., Shul'ga N. A.* Propagation of three-dimensional electroelastic shear waves in a regularly layered medium of metal-piezoelectric type // J. Sov. Math. – 1993. – **63**, No. 3. – P. 298–302.
5. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
6. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1990. – 115 с.
7. *Шарапов В. М., Мусиенко М. П., Шарапова Е. В.* Пьезокерамические преобразователи физических величин. – Черкассы: Черкас. гос. технол. ун-т, 2005. – 631 с.
8. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 270 с.
9. *Шульга Н. А., Григорьев С. А.* Нестационарные упругоэлектрические колебания сферического пьезокерамического преобразователя с закрепленной внутренней границей // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 91–97.
10. *Янчевский И. В.* Управление нестационарными колебаниями слойно-ступенчатого биморфа // Вест. НТУ «ХПИ». Вып. «Динамика и прочность машин». – 2009. – № 42. – С. 196–204.
11. *Babaev A. E., Babaev A. A., Yanchevskiy I. V.* Influence of an oscillating circuit on the radiation of transient acoustic waves by an electroelastic cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. – 2010. – **127**, No. 4. – P. 2282–2289.
12. *Halevi P.* Bimorphs piezoelectric flexible mirror: graphical solution and comparison with experiment // J. Opt. Soc. Amer. – 1983. – **73**, No. 1. – P. 110–113.
13. *Vatul'yan A. O., Getman I. P., Lapitskaya N. B.* Flexure of a piezoelectric bimorphic plate // Int. Appl. Mech. – 1991. – **27**, No. 10. – P. 1016–1019.
Те саме: *Ватульян А. О., Гетман И. П., Лапицкая Н. Б.* Изгиб пьезоэлектрической биморфной пластины // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 10. – С. 101–105.
14. *Wang H. M., Ding H. J., Chen Y. M.* Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems // Int. J. Sol. and Struct. – 2005. – **42**. – P. 85–102.

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ
МЕТАЛЛ – ПЬЕЗОКЕРАМИКА НЕСТАЦИОНАРНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ**

Исследуется поведение электрически нагруженной тонкой прямоугольной асимметричной биморфной пластинки. Колебания рассматриваются в рамках обобщенных гипотез Кирхгофа. Решение получено с использованием преобразования Лапласа по времени с последующим сведением задачи к интегральному уравнению Вольтерра. На основании выполненных расчетов выявлены закономерности деформированного состояния преобразователя в зависимости от конфигурации электрического сигнала. Представлена также методика решения обратной задачи по определению электрического сигнала как функции времени, обеспечивающего заданный закон движения выбранной точки пластины.

**EXCITATION OF RECTANGULAR METAL-PIEZOCERAMICS PLATE BENDING
VIBRATIONS BY NON-STATIONARY ELECTRIC SIGNAL**

The behavior of electrically loaded thin rectangular asymmetric bimorph plate is investigated using the generalized Kirchhoff hypotheses. A solution is obtained by means of integral Laplace transform in time which allows to reduce the problem to Volterra integral equation. On the basis of calculations the deformed state of the transducer is revealed depending on electric signal configuration. The inverse problem of an electric signal definition as a function of time, which provides the necessary law of movement of some point, is also considered.

Харків. нац. автомоб.-дор. ун-т, Харків

Одержано
19.10.10