

СИММЕТРИЧНЫЕ УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ОТСУТСТВИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА ТОРЦАХ И ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ СЛОЕВ

Рассмотрена трехмерная задача об установившихся колебаниях упругих трехслойных изотропных пластин со свободными от усилий плоскими гранями. На границе раздела слоев выполняются условия скользящего контакта. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях. Исследованы дисперсионные уравнения, возникающие при построении потенциального и вихревого состояний. Представлены диаграммы спектральных кривых, спектры частот записания. Найдены асимптотические значения фазовых скоростей для больших и малых частот.

Введение. В обзорных статьях [17, 20, 21, 26–30] и монографиях [5, 6, 9, 11, 12, 18, 23, 24] проведен анализ основных методов и полученных на их основе решений частных задач теории упругости для однородных и слоистых пластин. В частности, отмечается, что актуальным является развитие известных и создание новых аналитических методов решения трехмерных краевых задач теории упругости для слоистых тел. Переход от однородных упругих волноводов к неоднородным по толщине слоям связан с резким возрастанием трудностей при исследовании по трехмерной теории упругости. Трехслойные пластины занимают особое место среди многослойных тел. Для рассматриваемого класса задач важную роль сыграли однородные решения [1–4, 7, 8, 12, 24, 25], предложенные в работе [14]. Симметричные колебания трехслойной пластины в случае идеального контакта слоев исследовались с использованием однородных решений в работе [3]. Характеристики волнового поля в слоистых средах рассчитываются, как правило, в предположении идеального контакта всех слоев [5, 6, 19, 22]. Однако в горной механике существует понятие поверхностей ослабленного механического контакта [13]. В частности, на границе слоев может иметь место условие полного проскальзывания при неразрывности нормальных компонент смещений и напряжений [10, 15, 16]. Такой контакт уже нельзя считать идеальной стыковкой сред.

В данной работе на основе полубратного метода И. И. Воровича [8] получены однородные решения уравнений упругих симметричных колебаний трехслойной пластины, плоские грани которой свободны от усилий, с учетом скользящего контакта слоев.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную пластину толщиной $2h$ симметричного строения относительно ее срединной плоскости. Внешние одинаковые и внутренний слой пластины находятся в условиях скользящего контакта и являются изотропными. Торцы пластины свободны от напряжений, а симметричные колебания вызваны внешними усилиями, приложенными к боковой поверхности и гармонически изменяющимися во времени. Отнесем пластину к прямоугольным координатам x_1, x_2, x_3 , причем срединная плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью Ox_1x_2 . Величины, относящиеся к внешним слоям, имеют индекс «(1)», к внутреннему – индекс «(2)». Обозначим через h_1 толщину внешних одинаковых слоев, через $2h_2$ – толщину внутреннего слоя, а физико-механические характеристики материалов слоев – через $\tilde{G}_m, \rho_m, \nu_m, m = 1, 2$, где \tilde{G}_m – модуль сдвига, ρ_m – плотность материала, а ν_m – коэффициент Пуассона, m – номер слоя. Введем безразмерные величины и координаты:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\tilde{x}_1}{R}, & x_2 &= \frac{\tilde{x}_2}{R}, & x_3 &= \frac{\tilde{x}_3}{h} = \frac{\tilde{x}_3}{\lambda R}, \\
\lambda &= \frac{h}{R}, & h &= h_1 + h_2, & \lambda_1 &= \frac{h_1}{h}, & \lambda_2 &= \frac{h_2}{h}, \\
u_{i(m)} &= \frac{\tilde{u}_{i(m)}}{R}, & \sigma_{ij(m)} &= \frac{\tilde{\sigma}_{ij(m)}}{2\tilde{G}_2}, & i, j &= 1, 2, 3, \\
G_m &= \frac{\tilde{G}_m}{\tilde{G}_2}, & G_1 &= G, & m &= 1, 2.
\end{aligned}$$

Задача построения однородных решений упругих колебаний рассматриваемой трехслойной пластины сводится к интегрированию известной системы уравнений движения Ляме

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^2} \partial_3^2 u_{j(m)} + \left(D^2 + \frac{1}{\lambda^2} \Omega_m^2 \right) u_{j(m)} + v_{0(m)} \partial_j \theta_m &= 0, & j &= 1, 2, \\
\frac{1}{\lambda^2} \partial_3^2 u_{3(m)} + \left(D^2 + \frac{1}{\lambda^2} \Omega_m^2 \right) u_{3(m)} + \frac{1}{\lambda} v_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0
\end{aligned} \tag{1}$$

с учетом краевых условий

$$\begin{aligned}
\sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0, & i &= 1, 2, 3, \\
\sigma_{13(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{13(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) = \\
&= \sigma_{23(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{23(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) = 0, \\
u_{3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), \\
\sigma_{33(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{33(2)}(x_1, x_2, \lambda_2).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\theta_m &= \partial_1 u_{1(m)} + \partial_2 u_{2(m)} + \frac{1}{\lambda} \partial_3 u_{3(m)}, & \partial_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, & i &= 1, 2, 3, \\
D^2 &= \partial_1^2 + \partial_2^2, & v_{0(m)} &= \frac{1}{1 - 2\nu_m}.
\end{aligned}$$

Однородные решения задачи. Значения векторов перемещений представим суммой вихревого и потенциального состояний [7, 8]

$$\begin{aligned}
u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) &= u_{i(m)}^V(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)}^P(x_1, x_2, x_3), \\
i &= 1, 2, 3, & m &= 1, 2.
\end{aligned}$$

Потенциальное решение будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_{j(m)}^P(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}(x_3) \partial_j C(x_1, x_2), & j &= 1, 2, \\
u_{3(m)}^P(x_1, x_2, x_3) &= q_{(m)}(x_3) C(x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{3}$$

Из выражений (1)–(3) следует, что функция $C(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma/\lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0,$$

а для неизвестных функций $n_{(m)}(x_3)$, $q_{(m)}(x_3)$ получаем задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned}
n''_{(m)} + [\Omega_m^2 + \gamma^2(1 + v_{0(m)})]n_{(m)} + \lambda v_{0(m)}q'_{(m)} &= 0, \\
q''_{(m)} + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + v_{0(m)}}q_{(m)} + \frac{\gamma^2 v_{0(m)}}{\lambda(1 + v_{0(m)})}n'_{(m)} &= 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
q_{(1)}(1) + \lambda^{-1}n'_{(1)}(1) &= 0, & q_{(1)}(\lambda_2) + \lambda^{-1}n'_{(1)}(\lambda_2) &= 0, \\
q_{(2)}(\lambda_2) + \lambda^{-1}n'_{(2)}(\lambda_2) &= 0, & q_{(1)}(\lambda_2) &= q_{(2)}(\lambda_2), \\
\gamma^2\lambda^{-1}(v_{0(1)} - 1)n_{(1)}(1) + (v_{0(1)} + 1)q'_{(1)}(1) &= 0, \\
G[\gamma^2\lambda^{-1}(v_{0(1)} - 1)n_{(1)}(\lambda_2) + (v_{0(1)} + 1)q'_{(1)}(\lambda_2)] &= \\
= \gamma^2\lambda^{-1}(v_{0(2)} - 1)n_{(2)}(\lambda_2) + (v_{0(2)} + 1)q'_{(2)}(\lambda_2), &
\end{aligned} \tag{5}$$

где γ – параметр разделения переменных.

Системы (4) имеют следующие характеристические уравнения:

$$s_{(m)}^4 + s_{(m)}^2(\gamma_{1(m)}^2 + \gamma_{2(m)}^2) + \gamma_{1(m)}^2\gamma_{2(m)}^2 = 0,$$

в которых $\gamma_{1(m)}^2 = \gamma^2 + \frac{1 - 2v_m}{2 - 2v_m}\Omega_m^2$, $\gamma_{2(m)}^2 = \gamma^2 + \Omega_m^2$.

Следовательно, общим решением системы (4) для симметричных колебаний являются функции

$$\begin{aligned}
n_1(x_3) &= H_1 \cos \gamma_{1(1)}x_3 + H_2 \sin \gamma_{1(1)}x_3 + H_3 \cos \gamma_{2(1)}x_3 + H_4 \sin \gamma_{2(1)}x_3, \\
q_1(x_3) &= Q_1 \sin \gamma_{1(1)}x_3 + Q_2 \cos \gamma_{1(1)}x_3 + Q_3 \sin \gamma_{2(1)}x_3 + Q_4 \cos \gamma_{2(1)}x_3, \\
n_2(x_3) &= H_5 \cos \gamma_{1(2)}x_3 + H_6 \cos \gamma_{2(2)}x_3, \\
q_2(x_3) &= Q_5 \sin \gamma_{1(2)}x_3 + Q_6 \sin \gamma_{2(2)}x_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

При этом

$$\begin{aligned}
Q_i &= \lambda^{-1}a_i H_i, & i &= 1, \dots, 6, \\
a_1 &= -\gamma_{1(1)}, & a_2 &= \gamma_{1(1)}, & a_3 &= -\gamma^2/\gamma_{2(1)}, \\
a_4 &= \gamma^2/\gamma_{2(1)}, & a_5 &= -\gamma_{1(2)}, & a_6 &= -\gamma^2/\gamma_{2(2)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) в граничные условия (5) с учетом соотношений (7), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений шестого порядка относительно H_i , аналогичную случаю жесткого сцепления слоев [3]:

$$\begin{aligned}
2\gamma_{1(1)} \sin(\gamma_{1(1)})H_1 - 2\gamma_{1(1)} \cos(\gamma_{1(1)})H_2 + \alpha_{2(1)} \sin(\gamma_{2(1)})H_3 - \\
- \alpha_{2(1)} \cos(\gamma_{2(1)})H_4 &= 0, \\
\alpha_{2(1)}^2 \cos(\gamma_{1(1)})H_1 + \alpha_{2(1)}^2 \sin(\gamma_{1(1)})H_2 + 2\gamma^2 \cos(\gamma_{2(1)})H_3 + \\
+ 2\gamma^2 \sin(\gamma_{2(1)})H_4 &= 0, \\
\gamma_{1(1)} \sin(\gamma_{1(1)}\lambda_2)H_1 - \gamma_{1(1)} \cos(\gamma_{1(1)}\lambda_2)H_2 + \beta_{2(1)} \sin(\gamma_{2(1)}\lambda_2)H_3 - \\
- \beta_{2(1)} \cos(\gamma_{2(1)}\lambda_2)H_4 - \gamma_{1(2)} \sin(\gamma_{1(2)}\lambda_2)H_5 - \\
- \beta_{2(2)} \sin(\gamma_{2(2)}\lambda_2)H_6 &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G\alpha_{2(1)}^2 \cos(\gamma_{1(1)}\lambda_2)H_1 + G\alpha_{2(1)}^2 \sin(\gamma_{1(1)}\lambda_2)H_2 + 2G\gamma^2 \cos(\gamma_{2(1)}\lambda_2)H_3 + \\
& + 2G\gamma^2 \sin(\gamma_{2(1)}\lambda_2)H_4 - \alpha_{2(2)}^2 \cos(\gamma_{1(2)}\lambda_2)H_5 - \\
& - 2\gamma^2 \cos(\gamma_{2(2)}\lambda_2)H_6 = 0, \\
& 2\gamma_{1(1)} \sin(\gamma_{1(1)}\lambda_2)H_1 - 2\gamma_{1(1)} \cos(\gamma_{1(1)}\lambda_2)H_2 + \alpha_{2(1)} \sin(\gamma_{2(1)}\lambda_2)H_3 - \\
& - \alpha_{2(1)} \cos(\gamma_{2(1)}\lambda_2)H_4 = 0, \\
& 2\gamma_{1(2)} \sin(\gamma_{1(2)}\lambda_2)H_5 + \alpha_{2(2)} \sin(\gamma_{2(2)}\lambda_2)H_6 = 0, \tag{8}
\end{aligned}$$

где $\alpha_{2(m)} = \alpha_{2(m)}^2/\gamma_{2(m)}$, $\alpha_{2(m)}^2 = \gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2$, $\beta_{2(m)} = \gamma^2/\gamma_{2(m)}$, $m = 1, 2$.

Вычисляя значение определителя системы (8) и приравнявая его к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
F(\gamma, \Omega) \equiv \frac{\eta}{G^2} \gamma_{1(1)} [\xi_1 C_{11} S_{21} - \tau_1 S_{11} C_{21}] [\xi_2 C_{12} S_{22} - \tau_2 S_{12} C_{22}] - \\
- \gamma_{1(2)} [2\xi_1 \tau_1 (C_{11} C_{21} - 1) + (\xi_1^2 + \tau_1^2) S_{11} S_{21}] S_{12} S_{22} = 0. \tag{9}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\eta = \rho_1/\rho_2, \quad \xi_m = (\gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2)^2, \quad \tau_m = 4\gamma^2 \gamma_{1(m)} \gamma_{2(m)}, \\
S_{jm} = \sin \gamma_{j(m)} \lambda_m, \quad C_{jm} = \cos \gamma_{j(m)} \lambda_m, \quad j, m = 1, 2.
\end{aligned}$$

Если $\omega \rightarrow 0$, тогда уравнение (9) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
F(\gamma) \equiv K(\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)(\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) - \\
- 4(\sin^2 \gamma\lambda_1 - (\gamma\lambda_1)^2) \sin^2 \gamma\lambda_2 = 0,
\end{aligned}$$

где $K = G^{-1}(1 - \nu_1)/(1 - \nu_2)$, и совпадает с ранее полученным [4].

Вихревое решение имеет вид

$$\begin{aligned}
u_{1(m)}^V(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2), \\
u_{2(m)}^V(x_1, x_2, x_3) &= - \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), \\
u_{3(m)}^V(x_1, x_2, x_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь $B_k(x_1, x_2)$ – метагармонические функции, являющиеся решением уравнений

$$D^2 B_k(x_1, x_2) - (\delta_k/\lambda)^2 B_k(x_1, x_2) = 0,$$

собственные функции $p_{(m)k}(x_3)$ находятся из спектральной задачи

$$\begin{aligned}
p_{(m)}''(x_3) + \ell_{(m)}^2 p_{(m)}(x_3) &= 0, \\
p_{(1)}'(1) = 0, \quad p_{(1)}'(\lambda_2) = 0, \quad p_{(2)}'(\lambda_2) &= 0,
\end{aligned}$$

и получаются такими:

$$\begin{aligned}
p_{(1)k}(x_3) = \cos \ell_{(1)k}(1 - x_3), \quad p_{(2)k}(x_3) = \cos \ell_{(2)k} x_3, \\
\ell_{(m)k}^2 = \Omega_m^2 + \delta_k^2.
\end{aligned}$$

Счетное множество собственных значений δ_k определяется в явном виде из дисперсионного уравнения

$$\sin \ell_{(1)k} \lambda_1 \sin \ell_{(2)k} \lambda_2 = 0. \quad (10)$$

Важной характеристикой распространения волн являются частоты запираания [9]. Для их определения полагаем в уравнении (9) $\gamma = 0$:

$$(k_1 \Omega_1 c_{11} c_{12} - \eta k_2 \Omega_2 s_{11} s_{12}) s_{21} s_{22} = 0, \quad (11)$$

где

$$s_{1m} = \sin(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad s_{2m} = \sin(\Omega_m \lambda_m),$$

$$c_{1m} = \cos(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad c_{2m} = \cos(\Omega_m \lambda_m),$$

$$k_m = \sqrt{(1 - 2v_m)/(2 - 2v_m)}.$$

Трансцендентное уравнение (11) определяет три независимые серии частот запираания:

$$\Omega_{q(1)}^* = \pi q / \lambda_1, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$\Omega_{t(2)}^* = \pi t / \lambda_2, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$k_1 \Omega_1 c_{11} s_{12} - \eta k_2 \Omega_2 s_{11} c_{12} = 0. \quad (14)$$

Частоты (12), (13) получены в явном виде и не зависят от значений коэффициентов Пуассона v_1, v_2 , в отличие от корней уравнения (14), образующих третье семейство частот. При некоторых сочетаниях физико-механических характеристик материалов слоев частоты разных серий могут совпадать. Частоты запираания дисперсионного уравнения (10) совпадают с (12), (13).

Для исследования процесса переноса энергии основное значение имеют распространяющиеся моды, соответствующие мнимым участкам дисперсионных ветвей. Важнейшие характеристики распространяющихся мод – фазовая и групповая скорости [9]. В каждой точке ветви кривой безразмерные фазовая и групповая скорости представляются соответственно равенствами

$$v_p = i \frac{\Omega}{\gamma}, \quad v_g = i \frac{d\Omega}{d\gamma}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Если фазовую скорость для каждой ветви представить в виде зависимости $c_p = c_p(\gamma)$, тогда групповая скорость вычисляется по формуле

$$c_g = c_p + \gamma \frac{dc_p}{d\gamma}.$$

Безразмерные фазовые и групповые скорости поперечных волн, соответствующих дисперсионному уравнению (10), находятся в явном виде:

$$v_{p(1)} = \Omega \frac{1}{\sqrt{\Omega_1^2 - (\pi\ell/\lambda_1)^2}}, \quad v_{g(1)} = \Omega \frac{\sqrt{\Omega_1^2 - (\pi\ell/\lambda_1)^2}}{\Omega_1^2},$$

$$v_{p(2)} = \Omega \frac{1}{\sqrt{\Omega_2^2 - (\pi\ell/\lambda_2)^2}}, \quad v_{g(2)} = \Omega \frac{\sqrt{\Omega_2^2 - (\pi\ell/\lambda_2)^2}}{\Omega_2^2}, \quad \ell = 1, 2, \dots$$

В случае идеального контакта слоев в работе [3] для нахождения фазовых и групповых скоростей используются приближенные методы.

Асимптотический анализ уравнений и предельные соотношения. Для симметричных колебаний в особом положении оказываются первые две ветви, проходящие через начало координат $\gamma = 0$, $\Omega = 0$. Соответствующие моды оказываются распространяющимися при любой частоте. Для анализа скоростей этих мод при малых частотах в окрестности начала координат можно существенно упростить дисперсионное уравнение (9) за счет малости величин γ , Ω . При этом получаем

$$\Omega_1 = -2i\gamma\sqrt{1-k_1^2}, \quad \Omega_2 = -2i\gamma\sqrt{1-k_2^2}.$$

При $\gamma = 0$ находим

$$c_{p(1)}(0) = 2\sqrt{1-k_1^2}, \quad c_{p(2)}(0) = 2\sqrt{1-k_2^2}.$$

В низкочастотном диапазоне две волны в данной структуре являются бездисперсными. Одна из мод описывает низкочастотную продольную волну в пластине, изготовленную из материала внешнего слоя, а другая – в пластине из материала внутреннего слоя. Асимптотическими значениями двух мод являются значения пластиночных скоростей в первом и втором слоях.

Рассмотрим случай соотношений параметров упругости в слоях: $G = 1$, $\eta = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Дисперсионное уравнение (9) имеет вид

$$2(\xi C_1 S_2 - \tau S_1 C_2)^2 - (\xi S_2 - \tau S_1)^2 = 0, \quad (15)$$

где

$$\xi = (\gamma^2 + \gamma_2^2)^2, \quad \tau = 4\gamma^2\gamma_1\gamma_2,$$

$$\gamma_1^2 = \gamma^2 + k^2\Omega^2, \quad \gamma_2^2 = \gamma^2 + \Omega^2,$$

$$k^2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}, \quad S_j = \sin \frac{1}{2}\gamma_j,$$

$$C_j = \cos \frac{1}{2}\gamma_j, \quad j = 1, 2.$$

Из уравнения (15) получаются предельные соотношения, описывающие асимптотические значения фазовой скорости на низких и высоких частотах, к которым должны стремиться численные решения этого уравнения. Упрощенное уравнение (15) в области низких частот сводится к виду

$$((2 - c_p^2)^2 - 4(1 - k^2 c_p^2))^2 = 0.$$

Корень данного уравнения является двухкратным и предельным значением фазовой скорости первой и второй мод в области низких частот является значение (пластиночная скорость [9])

$$c_p(0) = 2\sqrt{1-k^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что в низкочастотном пределе волны в пластине являются бездисперсными. Групповая и фазовая скорости равны между собой.

В области высоких частот уравнение (15) также упрощается и сводится к обычному уравнению Рэлея, но удвоенной кратности:

$$\left((2 - c_p^2)^2 - 4\sqrt{1 - k^2 c_p^2} \sqrt{1 - c_p^2} \right)^2 = 0.$$

Данный факт свидетельствует о наличии двух ветвей (первая и вторая моды), являющихся решениями полного уравнения (15), стремящихся при $\Omega \rightarrow \infty$ к значениям рэлеевского корня сверху и снизу. При анализе пове-

дения остальных ветвей уравнение (15) преобразуется к виду

$$(2 - c_p^2)^2 \sin\left(\frac{1}{2i} \gamma \sqrt{c_p^2 - 1}\right) - 4\sqrt{1 - k^2 c_p^2} \sqrt{c_p^2 - 1} \cos\left(\frac{1}{2i} \gamma \sqrt{c_p^2 - 1}\right) = 0.$$

Единственным решением этого уравнения, согласующимся со смыслом задачи ($c_p \rightarrow \text{const}$ при $\gamma/i \rightarrow \infty$), является решение $c_p = 1$. Скорость приближения к предельному значению и оценку величины c_p для n -й моды можно получить по формуле [9]

$$c_{pn} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{\text{Im } \gamma} \right)^2.$$

Частоты загибания мод уравнения (15) получаются такими:

$$\Omega_q^* = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2} + q \right) \pi, \quad q = 1, 2, \dots,$$

$$\Omega_n^* = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

причем вторая серия частот загибания является двухкратной.

Если $G \rightarrow 0$, тогда дисперсионное уравнение (9) преобразуется к виду

$$(\xi_1 C_{11} S_{21} - \tau_1 S_{11} C_{21})(\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) = 0.$$

В результате дисперсионный спектр состоит из двух спектров. Один спектр соответствует симметричным колебаниям внешних слоев со свободными плоскими гранями, а другой – симметричному равновесию внутреннего слоя с аналогичными условиями на плоских гранях.

При $G \rightarrow \infty$ дисперсионное уравнение (9) принимает вид

$$(\sin \gamma\lambda_1 - \gamma\lambda_1)(\sin \gamma\lambda_1 + \gamma\lambda_1) S_{12} S_{22} = 0.$$

Из данного уравнения следует, что спектр колебаний состоит из трех спектров, соответствующих симметричным колебаниям внутреннего слоя с граничными условиями типа плоского торца, растяжению-сжатию и изгибу внешних слоев со свободными плоскими гранями.

В случае $\lambda_1 \rightarrow 0$ дисперсионное уравнение (9) сводится к следующему:

$$\left(\Omega_1^2 + \frac{2}{1 - \nu_1} \gamma^2 \right) (\xi_2 C_{12} S_{22} - \tau_2 S_{12} C_{22}) = 0.$$

Таким образом, получаем спектр симметричных колебаний внутреннего слоя со свободными плоскими гранями и бездисперсную моду $\Omega_1 = -i\gamma\sqrt{2/(1 - \nu_1)}$, зависящую только от коэффициента Пуассона внешнего слоя.

Когда $\lambda_2 \rightarrow 0$, из уравнения (9) следует

$$(\xi_1 C_{11} S_{21} - \tau_1 S_{11} C_{21}) \left(\Omega_2^2 + \frac{2}{1 - \nu_2} \gamma^2 \right) = 0.$$

В этом случае полный спектр колебаний состоит из спектра симметричных колебаний внешнего слоя со свободными плоскими гранями и бездисперсной моды $\Omega_2 = -i\gamma\sqrt{2/(1 - \nu_2)}$.

Анализ результатов численных исследований. Расчеты были проведены для пластин из алюминия, для которого

$$\rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \tilde{G} = 2.61 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \nu = 0.35,$$

и вольфрама с характеристиками

$$\rho = 18.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \tilde{G} = 15.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \nu = 0.29.$$

Рассмотрены четыре варианта:

варианты **I, II** – внешний слой из алюминия, внутренний из вольфрама ($\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$ для варианта **I** и $\lambda_1/\lambda_2 = 2$ для варианта **II**),

варианты **III, IV** – внешний слой из вольфрама, внутренний из алюминия ($\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$ для варианта **III**, $\lambda_1/\lambda_2 = 2$ для варианта **IV**).

В табл. 1 приведены первые пятнадцать ненулевых частот запираения уравнения (9) для вариантов **I–IV**. Ячейки таблицы содержат два значения: в числителе – значения частот запираения при неидеальном контакте слоев, а в знаменателе – при идеальном контакте [3].

Таблица 1

Номер частоты	Значения частот запираения			
	вариант I	вариант II	вариант III	вариант IV
1	3.9815072	4.5687713	1.6808202	1.6755209
	3.9815072	2.7012249	1.6808202	1.6755209
2	4.6838588	5.0211055	5.0211055	4.6838588
	4.0353818	4.5687713	2.7012249	4.0353818
3	9.3677175	8.9563745	9.2388067	8.7491916
	5.7057768	7.2276460	7.2276460	5.7057768
4	9.9588381	9.2388067	10.042211	9.3677175
	9.4234971	8.9563745	9.4259042	8.7491916
5	10.182332	10.042211	10.253097	10.182332
	9.9588381	9.4259042	10.253097	9.4234971
6	13.824028	15.063316	15.063316	14.051576
	13.638621	12.660779	12.660779	13.638621
7	14.051576	15.809242	16.687398	16.628349
	13.824028	15.809242	16.687398	15.580951
8	18.735435	18.477613	18.477613	18.735435
	15.580951	17.095076	17.095076	16.628349
9	20.364664	20.084422	20.084422	20.364664
	18.852991	18.898072	18.898072	18.852991
10	21.508403	24.119887	21.446279	21.298222
	21.508403	22.634725	21.446279	21.298222
11	23.419294	25.105527	25.105527	23.419294
	23.150681	24.119886	22.634725	23.150681
12	28.103153	27.528485	27.716420	26.341233
	25.533958	26.851792	26.851792	25.533958
13	29.064974	27.716420	30.126633	28.103153
	28.296849	27.528485	28.474371	26.341233
14	30.546996	30.126633	30.563204	30.546996
	29.064974	28.474371	30.563204	28.296849
15	32.687048	35.147738	34.616969	32.787011
	32.614355	32.613438	32.613438	32.614355

Для дисперсионного уравнения потенциального состояния (9) на рис. 1–рис. 4 соответственно для вариантов **I–IV** приведены спектральные кривые зависимостей параметра γ от частоты Ω для действительных, мнимых и комплексных ветвей при заданных параметрах G , η , λ_1 , λ_2 , ν_1 , ν_2 . Сплошными линиями изображены дисперсионные кривые действительных и чисто мнимых корней, а штриховыми – проекции комплексных дисперсионных кривых на действительную ($\text{Re } \gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im } \gamma, \Omega$) плоскости.

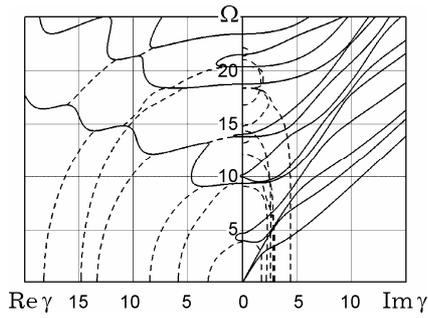


Рис. 1

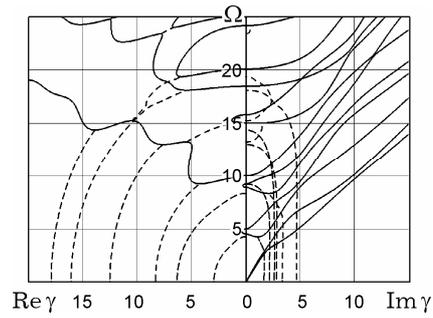


Рис. 2

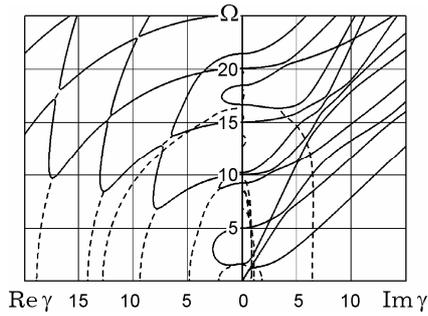


Рис. 3

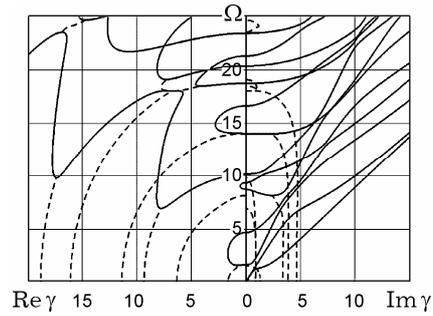


Рис. 4

На рис. 5 представлены графики изменения первой частоты запираания мод дисперсионного спектра уравнения (9) в зависимости от относительной толщины внутреннего слоя λ_2 . Кривая 1 соответствует значениям параметров пластины, внешний слой которой из алюминия, а внутренний из вольфрама; кривая 2 – внешний слой из вольфрама, внутренний из алюминия.

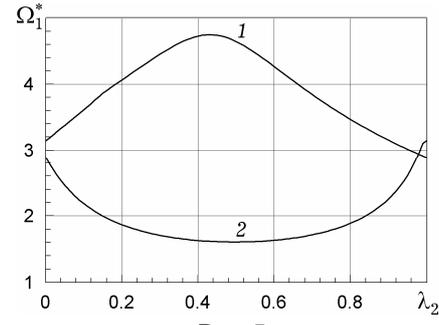


Рис. 5

Из представленных рисунков и табл. 1 следует, что в трехслойной пластине при скользящем контакте по сравнению с идеальным контактом слоев изменяется характер установившихся колебаний, в частности, изменяются значения и количество частот запираания на интервале $0 \leq \Omega \leq 25$. В то же время трехслойный изотропный волновод, аналогично однослойному, при фиксированной частоте имеет конечное число действительных и чисто мнимых корней и счетное множество комплексных корней. Фазовая скорость на ненулевых частотах запираания стремится к бесконечности, а групповая скорость равна нулю. Этот факт объясняется тем, что в стоячей волне при $\gamma = 0$ энергия не переносится. На нулевой частоте запираания групповая и фазовая скорости для первой, а также для второй бегущих мод равны между собой. Поведение групповых скоростей носит более сложный характер, чем фазовых. В частности, четко выражены локальные экстремумы. С ростом номера мнимой ветви количество таких максимумов и минимумов увеличивается. В высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды трехслойной пластины становятся бездисперсными. Характерной особенностью исследуемого дисперсионного спектра, в отличие от всех ранее рассмотренных задач [2, 3, 9], является наличие двух ветвей

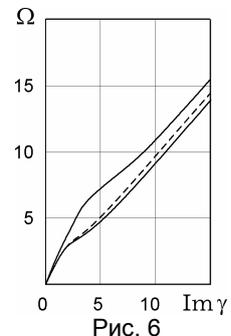


Рис. 6

мнимых корней с нулевой частотой запираания. Причем первая мода дисперсионного спектра трехслойной пластины с идеальным контактом слоев лежит между первой и второй модами дисперсионного спектра в пластине с неидеальным контактом слоев (рис. 6).

Выводы. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях для трехслойной пластины в случае свободных от напряжений плоских граней и скользящего контакта слоев. Как и при идеальном контакте слоев, однородные решения состоят из вихревого и потенциального состояний.

Собственные значения и собственные функции вихревого решения находятся в явном виде. Собственные функции потенциального решения также находятся в явном виде, а для определения собственных значений получено трансцендентное дисперсионное уравнение в форме, приспособленной для численных исследований.

Получено трансцендентное уравнение для определения частот запираания, множество которых состоит из трех независимых серий. Найдены асимптотические значения мод в низком и высоком диапазонах частот.

На основании численных исследований изучена зависимость собственных значений, частот запираания потенциального решения от условий контакта, изменения упругих характеристик материалов слоев пластины.

1. Алтухов Е. В., Кулиш И. Е. Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2001. – № 1. – С. 314–321.
2. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Изгибные колебания упругих трехслойных пластин симметричного строения со свободными плоскими гранями // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2009. – № 1. – С. 117–124.
3. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 146–153.
4. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Упругое равновесие трехслойной пластины с неидеальным контактом слоев // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2010. – № 1. – С. 17–22.
5. Брезовских Л. М. Волны в слоистых средах. – Москва: Наука, 1973. – 343 с.
6. Брезовских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. – Москва: Наука, 1989. – 412 с.
7. Ворович И. И., Кадомцев И. Г. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**, № 5. – С. 870–876.
8. Ворович И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. математика и механика. – 1967. – **31**, № 2. – С. 230–241.
9. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
10. Заславский Ю. М., Митякова О. И. Дисперсия поверхностных волн в структуре: упругий слой и полупространство в скользящем контакте // Акуст. журн. – 1992. – **38**, № 2. – С. 296–303.
11. Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И. Расчет трехслойных конструкций: Справочник. – Москва: Машиностроение, 1984. – 304 с.
12. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с.
13. Крауклис П. В., Крауклис Л. А. Об одном типе волн в средах, содержащих поверхности ослабленного механического контакта // Мат. вопросы теории распространения волн. – 1988. – Вып. 18. – С. 113–122.
14. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – **6**, № 2–3. – С. 151–168.
15. Марчук А. В. Трехмерное аналитическое решение для слоистых плит с учетом проскальзывания слоев // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 9. – С. 10–14.
То же: Marchuk A. V. Three-dimensional analytical solution for laminar plates with allowance for layer slip // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 9. – P. 685–689.

16. Марчук М. В., Хом'як М. М. Змішана форма методу скінченних елементів і блочний алгоритм розв'язування задачі про міжшаровий контакт // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 2. – С. 75–84.
17. Мелешко В. В., Бондаренко А. А., Довгий С. А., Трофимчук А. Н., ван Хейст Г. Я. Ф. Упругие волноводы: история и современность. I // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 2. – С. 86–104.
То же: Meleshko V. V., Bondarenko A. A., Dovgiy S. A., Trofimchuk A. N., van Heijst G. J. F. Elastic waveguides: History and the state of the art. I // J. Math. Sci. – 2009. – **162**, No. 1. – P. 99–120.
18. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. – Ленинград: Наука, 1984. – 201 с.
19. Москаленко В. Н. О собственных колебаниях трехслойных плит // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 4. – С. 145–149.
20. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 2. – С. 22–56.
То же: Piskunov V. G., Rasskazov A. O. Evolution of the theory of laminated plates and shells // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 2. – P. 135–166.
21. Пискунов В. Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем // Механика композитных материалов. – 2003. – **39**, № 1. – С. 3–24.
22. Рязанцева М. Ю. О дисперсии волн в бесконечной упругой трехслойной пластине // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 1. – С. 166–172.
23. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. – Киев: Наук. думка, 1990. – 224 с.
24. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов на Дону: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
25. Устинов Ю. А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. АН СССР. – 1974. – **216**, № 4. – С. 755–758.
26. Шульга Н. А. Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 7. – С. 15–56.
То же: Shul'ga N. A. Propagation of elastic waves in periodically inhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 7. – P. 763–796.
27. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review // Mech. Compos. Mater. – 1998. – **34**, No. 3. – P. 243–252.
28. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, No. 3. – P. 287–308.
29. Carrera E., Brischetto S. A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates // Appl. Mech. Rev. – 2009. – **62**, No. 1. – P. 1–17.
30. Reddy J. N., Robbins D. H. (Jr.) Theories and computational models for composite laminates // Appl. Mech. Rev. – 1994. – **47**, No. 6. – P. 147–169.

СИМЕТРИЧНІ ПРУЖНІ КОЛИВАННЯ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН ПРИ ВІДСУТНОСТІ НАПРУЖЕНЬ НА ТОРЦЯХ І ПРОКОВЗУВАННІ ШАРІВ

Розглянуто тривимірну задачу про усталені коливання пружних тришарових ізотропних пластин з вільними від зусиль плоскими гранями. На межі поділу шарів виконуються умови ковзного контакту. Отримано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях. Досліджено дисперсійні рівняння, що виникають при побудові потенційного та вихрового станів. Наведено діаграми спектральних кривих, спектри частот запирання. Знайдено асимптотичні значення фазових швидкостей мод для великих і малих частот.

SYMMETRIC ELASTIC VIBRATIONS OF THREE-LAYER PLATES AT ABSENCE OF STRESSES ON FACES AND LAYERS SLIP

A three-dimensional problem on the steady-state vibrations of three-layer elastic isotropic plates with stress-free plane sides is considered. The conditions of sliding contact are satisfied on the interface of layers. The homogeneous solutions of a system of equations of motion in displacements are obtained. The dispersive equations appearing at construction of potential and vortex states are studied. Diagrams of spectral curves and spectra of cut-off frequencies are represented. Asymptotic values of phase velocities for high and low frequencies are determined.

Донецк. нац. ун-т, Донецк

Получено
14.09.10