

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

Рассматриваются свободные колебания тонких изотропных эллиптических оболочек постоянной толщины на основе методики сплайн-коллокации. Выявлено, что при сохранении массы эллиптических и круговых цилиндрических оболочек частоты свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек убывают с увеличением эксцентриситета сечения оболочки.

1. Постановка проблемы. Во многих областях техники широкое применение находят некруговые цилиндрические оболочки. Для эксплуатации таких конструкций требуются определенные условия прочности и надежности. В связи с этим особое значение приобретают надежные методы численного и экспериментального определения параметров стойкости таких конструкций, в частности, определение резонансных частот.

В данной работе исследуются свободные колебания некруговых цилиндрических оболочек постоянной толщины при разных типах закрепления торцов. Задачам о свободных колебаниях некруговых цилиндрических оболочек посвящено небольшое количество публикаций. В [12, 14] исследовались свободные колебания некруговых цилиндрических изотропных панелей. В работе [13] рассматривались свободные колебания цилиндрических оболочек произвольного очертания сечения на упругом основании. В [11] к изучению колебаний цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением применялись теории оболочек высших порядков. В [15, 16] исследуются характеристики свободных колебаний произвольных некруговых оболочек в классической постановке. Колебания гофрированных цилиндрических оболочек исследовались в работе [10]. Анализ отмеченных публикаций дает возможность сделать вывод, что не существует единственной точки зрения относительно применения того или другого подхода к решению указанного класса задач. В последнее время в задачах вычислительной математики и механики для их решения широко применяются системы ортогональных функций [9], в частности, системы сплайн-функций [7, с. 260–272]. Основное преимущество последних обусловлено следующим:

устойчивостью относительно локальных возмущений, – то есть поведение сплайнов в окрестности точки не влияет на поведение сплайна в целом;

более удовлетворительной сходимостью в отличие от случая применения многочленов как функций аппроксимации;

простотой и удобством при вычислении и реализации сплайн-функций на современных персональных компьютерах.

Стоит также отметить работы [2, 3, 5, 8], в которых использовался метод сплайн-коллокации для решения задач статики некруговых цилиндрических оболочек.

Целью настоящей работы является исследование свободных колебаний упругих изотропных цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения с использованием метода сплайн-коллокации.

2. Исходные соотношения. Будем рассматривать задачу о свободных колебаниях ортотропной цилиндрической оболочки переменной толщины $h(s, t)$ и произвольного очертания поперечного сечения. В качестве координатных линий выберем длины дуг по образующей и направляющей s и t .

Согласно классической теории Кирхгофа – Лява [1, с. 331–344; 4] уравнения, описывающие свободные колебания цилиндрических оболочек, будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial t} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \\
\frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial s} + k_t \left(Q_t + \frac{\partial H}{\partial s} \right) &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \\
\frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_t}{\partial t} - k_t N_t &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial t} &= Q_s, \quad \frac{\partial M_t}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} = Q_t,
\end{aligned} \tag{1}$$

где ρ – плотность материала, h – толщина оболочки, τ – время.

Для нормальных N_s , N_t и сдвигающих усилий S , изгибающих M_s , M_t и крутильных моментов H справедливы материальные соотношения вида:

$$\begin{aligned}
N_s &= C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_t, & M_s &= D_{11}\chi_s + D_{12}\chi_t, \\
N_t &= C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_t, & M_t &= D_{12}\chi_s + D_{22}\chi_t, \\
S &= C_{66}\varepsilon_{st}, & H &= 2D_{66}\chi_{st},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $C_{ij} = B_{ij}h(s, t)$ и $D_{ij} = B_{ij}h^3(s, t)/12$, $\{i, j\} \in \{1, 2, 6\}$, – жесткости оболочки на растяжение-сжатие и изгиб соответственно; $B_{11} = E_1/(1 - \nu_1\nu_2)$, $B_{22} = E_2/(1 - \nu_1\nu_2)$, $B_{12} = \nu_2 E_1/(1 - \nu_1\nu_2) = \nu_1 E_2/(1 - \nu_1\nu_2)$, $B_{66} = G_{12}$.

Выражения для деформаций срединной поверхности оболочки имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \chi_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \\
\varepsilon_t &= \frac{\partial v}{\partial t} + k_t w, & \chi_t &= -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
\varepsilon_{st} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}, & \chi_{st} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $u(s, t, \tau)$, $v(s, t, \tau)$ и $w(s, t, \tau)$ – перемещения точек срединной поверхности оболочки. В выражениях для изгибных деформаций не учитываются тангенциальные перемещения.

Подставив (3) в (2), а затем в (1), получим три эквивалентных дифференциальных уравнения в частных производных с переменными коэффициентами относительно трех неизвестных перемещений u , v и w :

$$\begin{aligned}
C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{11}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + \frac{\partial C_{12}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} + \\
+ \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} + k_t C_{12} \frac{\partial w}{\partial s} + k_t \frac{\partial C_{12}}{\partial s} w = 0, \\
C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial C_{22}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + \\
+ \frac{\partial C_{12}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} - k_t D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} - k_t \frac{\partial D_{22}}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k_t (D_{12} + \\
+ 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial s^2} - 4k_t \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s} + k_t C_{22} \frac{\partial w}{\partial t} - \\
- k_t \frac{\partial D_{12}}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left(k_t \frac{\partial C_{22}}{\partial t} + k_t' C_{22} \right) w = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial t} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial s^2} + 2 \frac{\partial(D_{12} + 2D_{66})}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial s} + \\
& + \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial(D_{12} + 2D_{66})}{\partial t} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial s^2} + \\
& + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial t \partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \\
& + \left(\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + k_t^2 C_{22} w + k_t C_{22} \frac{\partial v}{\partial t} + \\
& + k_t C_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \tag{4}
\end{aligned}$$

На контурах $s = \text{const}$ задаем граничные условия, которые определяются через перемещения:

– *жестко закрепленный контур (C)*:

$$u = v = w|_{s=\text{const}} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{s=\text{const}} = 0; \tag{5}$$

– *шарнирно закрепленный контур (Sc)*:

$$u = v = w|_{s=\text{const}} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right|_{s=\text{const}} = 0; \tag{6}$$

– *шарнирно опертый контур (S)*:

$$v = w|_{s=\text{const}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{s=\text{const}} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right|_{s=\text{const}} = 0; \tag{7}$$

– *свободный контур (F)*:

$$\begin{aligned}
N_s|_{s=\text{const}} = 0, \quad M_s|_{s=\text{const}} = 0, \\
(S + 2k_t H)|_{s=\text{const}} = 0, \quad \left(Q_s + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \Big|_{s=\text{const}} = 0. \tag{8}
\end{aligned}$$

Аналогичные условия могут быть заданы и на контурах $t = \text{const}$, если в уравнениях (5)–(8) сделать замену $u \leftrightarrow v$, $k_t \rightarrow 0$. Кроме того, на контурах $t = \text{const}$ можно задать условия симметрии (**Sm**):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=\text{const}} = 0, \quad v|_{t=\text{const}} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} \right|_{t=\text{const}} = 0. \tag{9}$$

На контурах оболочек могут быть заданы произвольные комбинации граничных условий вида (5)–(9). Например, **CCCC** – жестко закрепленная по всем контурам открытая цилиндрическая оболочка; **SCSC** – опертая на криволинейных торцах и заделанная вдоль образующих открытая цилиндрическая оболочка; **CSCS** – защемленная на криволинейных торцах и шарнирно опертая по образующим открытая цилиндрическая оболочка.

3. Методика решения. В дальнейшем будем рассматривать стационарные колебания оболочки. Тогда перемещения можно будет представить в виде [3]

$$\begin{aligned}
u(s, t, \tau) &= \tilde{u}(s, t) e^{i\omega_0 \tau}, & v(s, t, \tau) &= \tilde{v}(s, t) e^{i\omega_0 \tau} \\
w(s, t, \tau) &= \tilde{w}(s, t) e^{i\omega_0 \tau}, \tag{10}
\end{aligned}$$

где $\tilde{u}(s, t)$, $\tilde{v}(s, t)$, $\tilde{w}(s, t)$ – амплитуды перемещений, ω_0 – частота свободных колебаний оболочки.

Пусть направляющая оболочки задана параметрически: $x = f_1(\theta)$, $y = f_2(\theta)$, или в полярной системе координат: $r = r(\theta)$, где θ – параметр направляющей или полярный угол. Тогда элемент дуги направляющей $dt = \gamma(\theta)d\theta$, где $\gamma(\theta) = \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}$ или $\gamma(\theta) = \sqrt{r^2 + r'^2}$.

Выразим теперь производные по дуге направляющей через производные по ее параметру:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta}, & \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\gamma'}{\gamma^3} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial^3}{\partial t^3} &= \frac{1}{\gamma^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - \frac{3\gamma'}{\gamma^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(\frac{3(\gamma')^2}{\gamma^5} - \frac{\gamma''}{\gamma^4} \right) \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial^4}{\partial t^4} &= \frac{1}{\gamma^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - \frac{6\gamma'}{\gamma^5} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \left(\frac{15(\gamma')^2}{\gamma^6} - \frac{4\gamma''}{\gamma^5} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \\ &+ \left(\frac{10\gamma'\gamma''}{\gamma^6} - \frac{15(\gamma')^3}{\gamma^7} - \frac{\gamma'''}{\gamma^5} \right) \frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (11)$$

Запишем систему уравнений (4) с учетом (10) и (11) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= a_{11}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{12}(\theta, s) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + a_{13}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial s} + a_{14}(\theta, s, \omega_0) u + \\ &+ a_{15}(\theta, s) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial s} + a_{16}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\ &+ a_{17}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial s} + a_{18}(\theta, s) \frac{\partial w}{\partial s} + a_{19}(\theta, s) w, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= a_{21}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{22}(\theta, s) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + a_{23}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial s} + a_{24}(\theta, s, \omega_0) v + \\ &+ a_{25}(\theta, s) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial s} + a_{27}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial s} + a_{28}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \\ &+ a_{26}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{29}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + a_{2,10}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial s^2} + \\ &+ a_{2,11}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial s} + a_{2,12}(\theta, s) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ a_{2,13}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + a_{2,14}(\theta, s) w, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} &= a_{31}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + a_{32}(\theta, s) \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial s^2} + a_{33}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial s} + a_{34}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \\ &+ a_{35}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial s^2} + a_{36}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial s} + a_{37}(\theta, s) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ a_{38}(\theta, s) \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + a_{39}(\theta, s) \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + a_{3,10}(\theta, s) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \\ &+ a_{3,11}(\theta, s, \omega_0) w + a_{3,12}(\theta, s) \frac{\partial u}{\partial s} + a_{3,13}(\theta, s) \frac{\partial v}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (12)$$

Искомые перемещения представим так [2, 3, 5, 6, 8]:

$$\begin{aligned}u(\theta, s) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(s), & v(\theta, s) &= \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(s), \\ w(\theta, s) &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(s),\end{aligned}\quad (13)$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$ и $w_i(\theta)$, $i = 0, \dots, N$, – искомые функции; $\varphi_{1i}(s)$, $\varphi_{2i}(s)$ – функции, построенные с помощью линейных комбинаций B -сплайнов третьей степени ($N \geq 4$), $\varphi_{3i}(s)$ – функции, построенные с помощью линейных комбинаций B -сплайнов пятой степени ($N \geq 6$), которые точно удовлетворяют граничным условиям при $s = \text{const}$.

Подставив (13) в уравнения (12), будем требовать, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, L]$, $k = 0, \dots, N$. В случае четного числа узлов сетки ($N = 2n + 1$, $n \geq 3$) и при условии, что узлы коллокации удовлетворяют требованиям: $\xi_{2q} \in [s_{2q}, s_{2q+1}]$, $\xi_{2q+1} \in [s_{2q}, s_{2q+1}]$, $q = 0, \dots, n$, на отрезке $[s_{2q}, s_{2q+1}]$ имеем два узла коллокации, а на соседних отрезках $[s_{2q+1}, s_{2q+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков $[s_{2q}, s_{2q+1}]$ точки коллокации выбираются следующим образом: $\xi_{2q} = s_{2q} + z_1 h$, $\xi_{2q+1} = s_{2q} + z_2 h$, $q = 0, \dots, n$, где z_1 и z_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$, которые равны: $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ и $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$. Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно повышает порядок точности аппроксимации. После всех преобразований получим систему $N + 1$ линейных дифференциальных уравнений относительно u_i , v_i и w_i . Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_{j,\ell} &= [\varphi_{j,i}^{(\ell)}(\xi_k)], & \Phi_{3,m} &= [\varphi_{3,i}^{(m)}(\xi_k)], \\ j &= 1, 2, & \ell &= 0, 1, 2, & m &= 0, 1, \dots, 4, & i, k &= 0, \dots, N, \\ \bar{u}^\top &= [u_0, \dots, u_N]^\top, & \bar{v}^\top &= [v_0, \dots, v_N]^\top, & \bar{w}^\top &= [w_0, \dots, w_N]^\top, \\ \bar{a}_{j,r}^\top &= [a_r(\theta, \xi_0), \dots, a_r(\theta, \xi_N)]^\top, & r &= 1, \dots, 8, \\ \bar{a}_{j,r}^\top &= [a_p(\theta, \xi_0), \dots, a_p(\theta, \xi_N)]^\top, & p &= 1, \dots, 10, 12, 13, \\ \bar{a}_{3,11}^\top &= [a_{11}(\theta, \xi_0, \omega_0), \dots, a_{11}(\theta, \xi_N, \omega_0)]^\top, \end{aligned}$$

а также для матрицы $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i, j = 0, \dots, N$, и вектора $\bar{c} = [c_0, \dots, c_N]$ обозначить через $\bar{c} \cdot \mathbf{A}$ матрицу $[c_i a_{ij}]$, то система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}'' &= \Phi_{1,0}^{-1} \{ (\bar{a}_{11} \cdot \Phi_{1,0}) \bar{u}' + (\bar{a}_{12} \cdot \Phi_{1,2} + \bar{a}_{13} \cdot \Phi_{1,1} + \bar{a}_{14} \cdot \Phi_{1,0}) \bar{u} + \\ &\quad + (\bar{a}_{15} \cdot \Phi_{2,1} + \bar{a}_{16} \cdot \Phi_{2,0}) \bar{v}' + \\ &\quad + (\bar{a}_{17} \cdot \Phi_{2,1}) \bar{v} + (\bar{a}_{18} \cdot \Phi_{3,1} + \bar{a}_{19} \cdot \Phi_{3,0}) \bar{w} \}, \\ \bar{v}'' &= \Phi_{2,0}^{-1} \{ (\bar{a}_{21} \cdot \Phi_{2,0}) \bar{v}' + (\bar{a}_{22} \cdot \Phi_{2,2} + \bar{a}_{23} \cdot \Phi_{2,1} + \bar{a}_{24} \cdot \Phi_{2,0}) \bar{v} + \\ &\quad + (\bar{a}_{25} \cdot \Phi_{1,1} + \bar{a}_{26} \cdot \Phi_{1,0}) \bar{u}' + (\bar{a}_{27} \cdot \Phi_{1,1}) \bar{u} + (\bar{a}_{28} \cdot \Phi_{3,0}) \bar{w}'' + \\ &\quad + (\bar{a}_{29} \cdot \Phi_{3,0}) \bar{w}'' + (\bar{a}_{2,10} \cdot \Phi_{3,2} + \bar{a}_{2,11} \cdot \Phi_{3,1} + \\ &\quad + \bar{a}_{2,12} \cdot \Phi_{3,0}) \bar{w}' + (\bar{a}_{2,13} \cdot \Phi_{3,2} + \bar{a}_{2,14} \cdot \Phi_{3,0}) \bar{w} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{w}^{IV} = & \Phi_{3,0}^{-1} \{ (\bar{a}_{31} \cdot \Phi_{3,0}) \bar{w}''' + (\bar{a}_{32} \cdot \Phi_{3,2} + \bar{a}_{33} \cdot \Phi_{3,1} + \bar{a}_{34} \cdot \Phi_{3,0}) \bar{w}'' + \\
& + (\bar{a}_{35} \cdot \Phi_{3,2} + \bar{a}_{36} \cdot \Phi_{3,1} + \bar{a}_{37} \cdot \Phi_{3,0}) \bar{w}' + \\
& + (\bar{a}_{38} \cdot \Phi_{3,4} + \bar{a}_{39} \cdot \Phi_{3,3} + \bar{a}_{3,10} \cdot \Phi_{3,2} + \bar{a}_{3,11} \cdot \Phi_{3,0}) \bar{w} + \\
& + (\bar{a}_{3,12} \cdot \Phi_{1,1}) \bar{u} + (\bar{a}_{3,13} \cdot \Phi_{2,0}) \bar{v}' \}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно привести к нормальному виду:

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta, \omega_0) \bar{Y}, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{Y}^\top = & [u_0, \dots, u_N, u'_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, v_N, v'_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N, \\
& w''_0, \dots, w''_N, w'''_0, \dots, w'''_N]^\top
\end{aligned}$$

– вектор искомых функций, $\mathbf{A}(\theta, \omega_0)$ – квадратная матрица порядка $8(N+1) \times 8(N+1)$.

Граничные условия (5)–(9) для системы (14) можно записать как

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 \bar{Y}(\theta_1) &= \bar{0}, \\
\mathbf{B}_2 \bar{Y}(\theta_2) &= \bar{0}. \tag{16}
\end{aligned}$$

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15) с граничными условиями (16) решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [3, 6, 7].

4. Результаты и обсуждение. С помощью вышеописанной методики исследовали спектр собственных колебаний некруговых цилиндрических оболочек.

На основе предложенной методики были рассчитаны частоты открытых эллиптических полуцилиндров постоянной толщины. Полуоси эллипса выбирались, исходя из соображения сохранения массы эллиптического и кругового полуцилиндра (для однородных оболочек из одного материала – из условия равенства объемов):

$$V_{el} = V_{circ} \Rightarrow L h_0 a \int_0^\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt = \pi R_0 h_0 L, \tag{17}$$

где $\varepsilon < 1$ – эксцентриситет эллипса, R_0 – радиус круговой цилиндрической оболочки эквивалентной массы, h_0 – толщина оболочки, L – длина оболочки, a – большая полуось эллиптического сечения некруговой оболочки.

Разложив $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}$ в ряд и удерживая в нем три первых члена, после выполнения интегрирования получим

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt &\approx \int_0^\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \cos^2 t}{2} - \frac{\varepsilon^4 \cos^4 t}{8} \right) dt = \\
&= \pi \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{3\varepsilon^4}{64} \right). \tag{18}
\end{aligned}$$

Тогда из (17) с учетом (18) для полуосей эллипса находим

$$a = \frac{64R_0}{64 - 16\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4}, \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \tag{19}$$

Характеристики оболочек были выбраны такими: $R_0 = 0.044$ м, эксцентриситет эллипса $\varepsilon = 0.15 \cdot m$ ($m = 0, \dots, 6$), $L = 0.12$ м – длина оболочки, $h_0 = 0.004$ м – толщина оболочки. Механические свойства материала: $E = 2.14 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.2588$, $\rho = 7850$ кг/м³.

В табл. 1 представлены безразмерные частоты $\bar{\omega}_i$ этих оболочек для некоторых комбинаций граничных условий при различных значениях эксцентриситета сечения, вычисленные при $N = 12$ точках коллокации.

Таблица 1

$\bar{\omega}_i = \omega_i L \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}$							
i	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.15$	$\varepsilon = 0.3$	$\varepsilon = 0.45$	$\varepsilon = 0.6$	$\varepsilon = 0.75$	$\varepsilon = 0.9$
CCCC							
1	1.1234	1.1201	1.1087	1.0844	1.0358	0.9374	0.7238
2	1.2170	1.2210	1.2299	1.2337	1.2139	1.1420	0.9623
3	1.7627	1.7662	1.7402	1.6819	1.5686	1.3729	1.0580
4	1.7734	1.7739	1.8072	1.7622	1.6828	1.5481	1.3133
CSCS							
1	1.0060	1.0041	0.9974	0.9822	0.9487	0.8705	0.6748
2	1.1130	1.1192	1.1348	1.1488	1.1413	1.0821	0.9141
3	1.6302	1.6237	1.6004	1.5474	1.4418	1.2516	0.9278
4	1.6951	1.6884	1.6665	1.6233	1.5471	1.4167	1.1842
SCSC							
1	0.9178	0.9180	0.9217	0.9020	0.8669	0.7967	0.6524
2	0.9500	0.9499	0.9487	1.0398	1.0123	0.9618	0.8620
3	1.2918	1.2916	1.2879	1.3985	1.4370	1.3278	1.0572
4	1.5635	1.5591	1.4702	1.5554	1.4770	1.4518	1.2858

На рис. 1–4 представлены графики зависимости первых четырех частот $\bar{\omega}_i$ свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек от эксцентриситета сечения ε .

Табличные данные сглаживались методом наименьших квадратов кубическими полиномами.

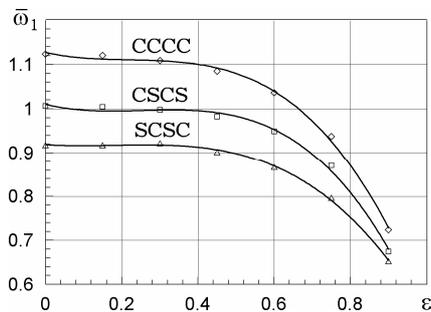


Рис. 1

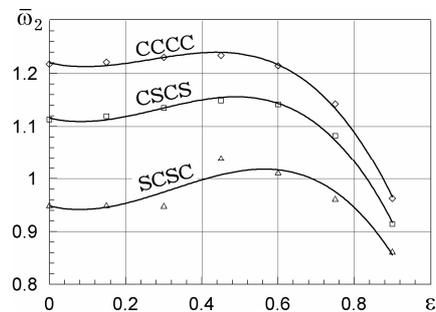


Рис. 2

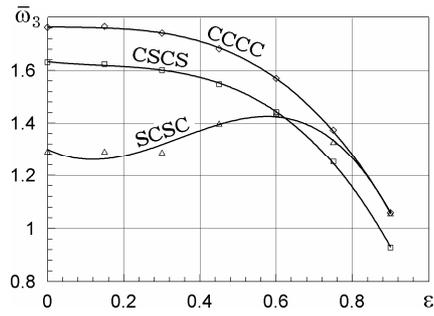


Рис. 3

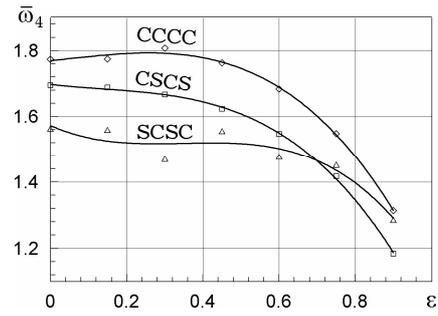
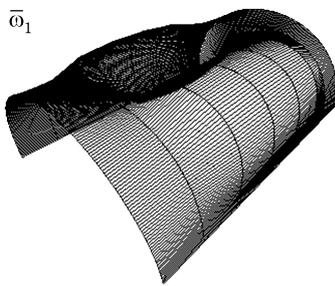


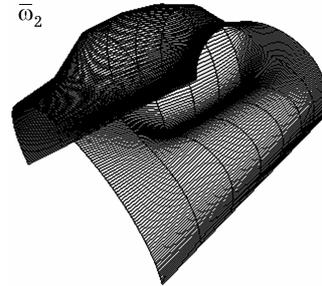
Рис. 4

На рис. 5, рис. 6 представлены первые четыре формы свободных колебаний этих оболочек с закреплением торцов вида **CCCC** при различных значениях эксцентриситета.

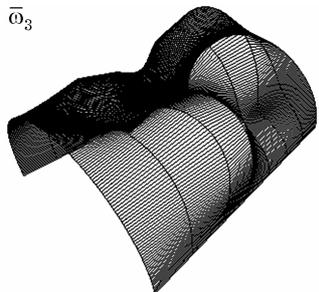
$\varepsilon = 0.3$



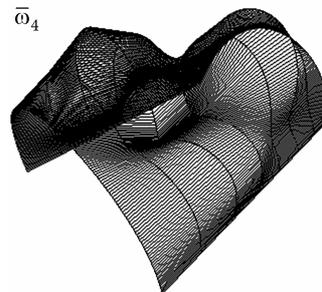
а)



б)



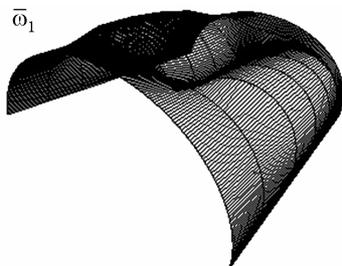
в)



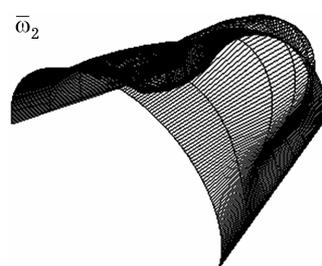
г)

Рис. 5

$\varepsilon = 0.6$



а)



б)

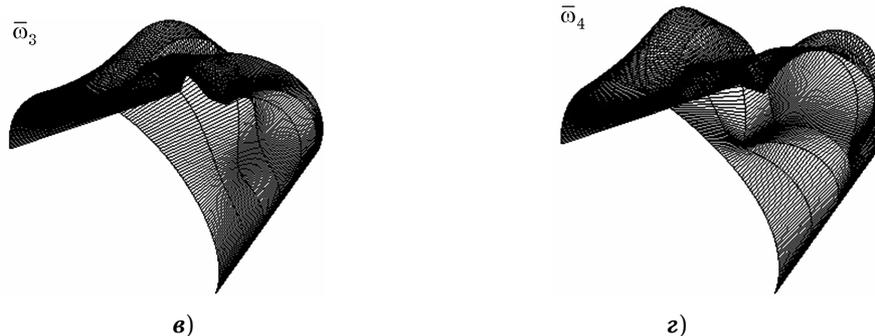


Рис. 6

Выводы. Из результатов расчетов, представленных в табл. 1 и рис. 1–рис. 4, следует, что с увеличением эксцентриситета эллиптических цилиндрических оболочек при сохранении их веса частоты свободных колебаний оболочек, кроме второй, монотонно убывают. Вторые резонансные частоты при всех типах закрепления торцов сначала возрастают до некоторого предела, а потом убывают. Сходным образом ведет себя третья резонансная частота при закреплении торцов типа **SCSC**.

Из рассмотрения форм свободных колебаний (рис. 5, рис. 6) следует, что увеличение эллиптичности практически не влияет на волнообразование.

Таким образом, подбирая параметры сечения оболочки и условия ее закрепления, можно в достаточно широких пределах управлять ее частотами свободных колебаний.

1. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1977. – 488 с.
2. Григоренко Я. М. Решение задач статики некруговых цилиндрических оболочек в различных постановках на основе нетрадиционных подходов // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 1. – С. 45–65.
То же: Grigorenko Ya. M. Nonconventional approaches to static problems for noncircular cylindrical shells in different formulations // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 1. – P. 35–53.
3. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 3 т. – Т. 4.)
5. Григоренко Я. М., Захарийченко Л. И. Анализ напряженно-деформированного состояния некруговых цилиндрических оболочек при изменении их толщины и сохранении веса // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 6. – С. 39–47.
То же: Grigorenko Ya. M., Zakhariichenko L. I. Analysis of the stress-strain state of noncircular cylindrical shells subject to thickness vibration and weight retention // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, No. 6. – P. 567–576.
6. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища шк., 1983. – 286 с.
7. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995. – 279 с.
8. Григоренко Я. М., Яремченко С. Н. Анализ напряженного состояния ортотропных эллиптических цилиндрических оболочек в уточненной постановке при изменении геометрических параметров // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 9. – С. 53–62.
То же: Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 9. – P. 998–1005.
9. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник: В 3 т. / Под общей ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 567 с.
10. Семеник Н. П., Бабич И. Ю., Жукова Н. Б. Свободные колебания гофрированных цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 5. – С. 58–67.

- То же: *Semenyuk N. P., Babich I. Yu., Zhukova N. B.* Natural vibrations of corrugated cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, No. 5. – P. 512–519.
11. *Hayek Sabih I., Boisvert Jeffrey E.* Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2010. – **128**, No. 3. – P. 1063–1072.
 12. *Massalas C., Soldatos K., Tzivanidis G.* Free vibrations of non-circular cylindrical panels with arbitrary boundary conditions // *J. Sound and Vibr.* – 1980. – **69**, No. 3. – P. 491–495.
 13. *Paliwal D. N., Singh S.* Free vibrations of orthotropic cylindrical shell on elastic foundation // *AIAA J.* – 1999. – **37**, No. 9. – P. 1135–1139.
 14. *Srinivasan R. S., Bobby W.* Free vibration of non-circular cylindrical shell panels // *J. Sound and Vibr.* – 1976. – **46**, No. 1. – P. 43–49.
 15. *Suzuki K., Leissa A. W.* Exact solutions for the free vibrations of open cylindrical shells with circumferentially varying curvature and thickness // *J. Sound and Vibr.* – 1986. – **107**, No. 1. – P. 1–15.
 16. *Yamada G., Irie T., Tagawa Y.* Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile // *J. Sound and Vibr.* – 1984. – **95**, No. 1. – P. 117–126.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ СПЛАЙН-КОЛОКАЦІЇ

Розглядаються вільні коливання тонких ізотропних еліптичних оболонок сталі товщини на основі методики сплайн-колокації. Виявлено, що при збереженні маси еліптичних і кругових циліндричних оболонок частоти вільних коливань некругових циліндричних оболонок спадають зі збільшенням ексцентриситету перерізу оболонки.

INVESTIGATION OF FREE VIBRATIONS OF NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS BY THE SPLINE-COLLOCATION METHOD

Free vibrations of thin isotropic elliptic shells of constant thickness are considered on the basis of the spline-collocation method. It is shown, that at mass conservation of elliptic and circular cylindrical shells, the free vibration frequencies of non-circular cylindrical shells decrease with increase of eccentricity of the shell cross-section.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,
² Николаев. гос. ун-т
ім. В. А. Сухомлинського, Николаев

Получено
25.08.09