

**R-ФУНКЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В РЕШЕТКАХ ТВЭЛОВ**

*Поставлена и решена методом R-функций задача электромагнитного расходомера для моделейборок ТВЭЛОВ с различными поперечными сечениями, а также задача гидродинамики для правильных квадратных и треугольных решеток ТВЭЛОВ.*

Компьютерный век породил теорию R-функций – функций с «логическим зарядом», возникшую на стыке дискретного и непрерывного анализа, использующую аппарат булевой алгебры, который органически присущ и ЭВМ. На основе теории R-функций была решена обратная задача аналитической геометрии, появилась возможность строить в виде элементарной функции уравнение границы сложного объекта, и притом такое уравнение, которое обладало бы необходимыми дифференциальными свойствами. В. Л. Рвачев с помощью конструктивного аппарата теории R-функций разработал единый подход к проблеме построения координатных последовательностей для основных вариационных и проекционных методов [2]. К настоящему времени метод R-функций был применен для решения большого числа задач электродинамики, механики деформируемого твердого тела, теории пластин и оболочек, гидродинамики и магнитной гидродинамики, теплофизики и др. [2, 3, 6–8].

Целью данной работы является построение математической и компьютерной модели распределения электрического потенциала в решетках ТВЭЛОВ при движении проводящей среды в магнитном поле.

В работе [4] отмечается, что для определения расхода жидкометаллического теплоносителя непосредственно в сборках ТВЭЛОВ или же их моделях весьма эффективен электромагнитный метод измерений. Сущность задачи о кондукционном расходомере состоит в следующем [5]: задано распределение скорости проводящей жидкости и известно распределение приложенного магнитного поля; требуется найти возникающие электрические эффекты, и, в частности, связать разность потенциалов между двумя или более точками или поверхностями (электродами) с некоторыми количественными характеристиками потока, например, со средней скоростью.

Жидкость предполагается немагнитной с магнитной проницаемостью  $\mu$ , равной проницаемости вакуума. Таким образом, жидкость может испытывать влияние объемных сил и воздействовать на стационарное электромагнитное поле только при движении.

Далее предполагается, что жидкость подчиняется закону Ома, т.е. вектор плотности тока параллелен электрическому полю в системе координат, движущейся с жидкостью. Проводимость  $\sigma$  считается изотропной и независимой от магнитного поля или движения жидкости, так что эффект Холла исключается. Будем предполагать, что можно пренебречь изменениями проводимости и термоэлектрическими эффектами вследствие неоднородности температуры. Токами за счет перенесения заряда при движении жидкости также можно пренебречь, так как такой заряд, определяющий дивергенцию электрического поля, всегда очень мал.

Итак, принимаем, что плотность тока в жидкости подчиняется закону Ома в форме

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{j}$  – вектор плотности тока;  $\sigma$  – проводимость жидкости (скаляр), т.е. величина, обратная удельному сопротивлению;  $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}$  – электрическое поле в движущейся с жидкостью системе отсчета (релятивистские члены

опущены);  $\mathbf{E}$  – электрическое поле в неподвижной системе координат;  $\mathbf{V}$  – скорость жидкости;  $\mathbf{B}$  – магнитная индукция. Слагаемое  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$  соответствует э.д.с., индуцированной при движении жидкости, тогда как  $\mathbf{E}$  связано с распределением заряда вне и внутри жидкости и с изменением магнитного поля во времени.

Если скорость жидкости, или магнитное поле, или же обе эти величины изменяются во времени, то токи, индуцированные при движении жидкости, также должны быть переменными. Если частота изменений очень высокая, то распределения индуцированного тока и электрического поля существенно нарушаются вследствие самоиндукции. Даже в покоящейся жидкости переменное во времени приложенное магнитное поле возмущается из-за самоиндукции. Это известный «скин-эффект», который в предельном случае не позволяет магнитному полю проникать в ядро потока и делает тем самым электромагнитное измерение расхода невозможным.

Для расходомеров с переменным полем существует также самостоятельная проблема потери чувствительности из-за наводок в подводящих проводах, которые непременно пронизываются частью потока переменного поля. Возникающий при этом вклад во внешний сигнал на четверть периода сдвинут относительно полезной его части, индуцированной при движении жидкости, и поэтому легко может быть выделен.

Исключение из уравнений Максвелла тока смещения  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  и отражающего самоиндукцию члена  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  дает

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}. \quad (3)$$

Из уравнения (2) видно, что можно обычным путем определить электрический потенциал  $U$ :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U. \quad (4)$$

Из уравнения (3) следует равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (5)$$

выражающее тот факт, что локальный электрический заряд несущественен при низкой или нулевой частоте. При постоянной  $\sigma$  из уравнения (1), учитывая соотношения (4), (5), получаем уравнение Пуассона  $\nabla^2 U = \operatorname{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ . Это основное уравнение теории электромагнитного расходомера, которое вместе с соответствующими граничными условиями позволяет найти распределение  $U$  по заданным распределениям  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{B}$ .

При решении любой задачи должны быть сформулированы достаточные граничные условия. К полученному уравнению второго порядка необходимо добавить одно граничное условие для электрических величин на всей границе исследуемой области. Часто удобно использовать обычное гидродинамическое граничное условие  $\mathbf{V} = 0$  на твердой неподвижной стенке. Вследствие этого из (1) имеем равенство

$$\mathbf{j} = -\sigma \cdot \operatorname{grad} U$$

для покоящейся жидкости, непосредственно примыкающей к стенке.

В случае непроводящих стенок отсутствует ток из жидкости в стенку. Поэтому  $j_n$  и  $\partial U / \partial n$  обращаются на стенке в нуль. Таким образом, получаем однородную задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$\Delta U = \operatorname{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0. \quad (6)$$

Необходимое условие разрешимости задачи Неймана вытекает из формулы Остроградского

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) d\Omega = \int_{\partial \Omega} (\mathbf{V} \times \mathbf{B})_n d\partial \Omega = 0,$$

так как  $\mathbf{V} = 0$  на границе  $\partial \Omega$ .

Раскрывая  $\text{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ , можно переписать (6) в виде

$$\Delta U = \mathbf{B} \text{rot} \mathbf{V} - \mathbf{V} \text{rot} \mathbf{B}. \quad (7)$$

Последний член может быть опущен, если магнитное поле не сильно искажено индуцированными токами в жидкости (так что  $\text{rot} \mathbf{B} = 0$ ), а также, когда эти токи перпендикулярны скорости жидкости. Тогда

$$\Delta U = \mathbf{B} \text{rot} \mathbf{V}. \quad (8)$$

Если  $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$  и  $\mathbf{V} = (0, 0, V_z)$ , тогда  $\mathbf{B} \text{rot} \mathbf{V} = B_x \cdot \partial V_z / \partial y$ , так как

$$\text{rot} \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & V_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial y} - \mathbf{j} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial x} + \mathbf{k} \cdot 0.$$

Таким образом, приходим к следующей постановке задачи:

$$\Delta U = B_x \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0. \quad (9)$$

Уравнение движения жидкости для ламинарного потока и граничные условия имеют вид

$$\Delta V_z = -\frac{1}{\mu l} \nabla p, \quad V_z|_{\partial \Omega} = 0. \quad (10)$$

Поле скоростей в решетках ТВЭЛов используется, кроме того, при определении температурного поля, касательных напряжений на стенках ячейки, для расчетов коэффициентов трения и др. В данной работе рассматривались правильные квадратные и треугольные решетки стержней (рис. 1а, рис. 1б) [1]. При этом граничные условия имеют вид

$$V_z|_{\partial \Omega_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_z}{\partial n} \right|_{\partial \Omega_2} = 0, \quad (11)$$

где  $\partial \Omega_1$  – граница стержня. Второе из условий (11) следует из типа симметрии в ячейке.

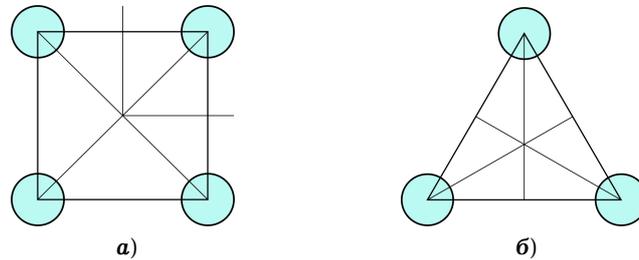


Рис. 1. Правильные решетки стержней: а) – правильные квадратные решетки; б) – правильные треугольные решетки.

Были также рассмотрены модели сборок с различными поперечными сечениями (рис. 2).

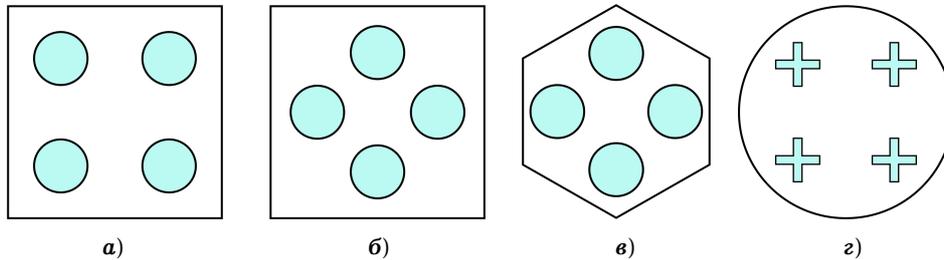


Рис. 2. Модели сборок с различными поперечными сечениями.

Для решения поставленных задач использовалась теория  $R$ -функций в сочетании с вариационным методом Ритца [2, 3]. При решении задачи

(10), (11) использовались как общая

$$V_z = \omega_1 P + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} D_1^{(2)}(\omega_1 P), \quad (12)$$

так и частичная

$$V_z = \omega_1 p \quad (13)$$

структуры, где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (x^2 + y^2 - 1)/2, & \omega_2 &= (f_2 \wedge_0 f_3) \wedge_0 f_4, \\ f_2 &= 0.57735 \cdot x - y, & f_3 &= y, & f_4 &= 2 - x. \end{aligned}$$

Задача (10), (11) эквивалентна задаче о минимуме функционала

$$F = \int_{\Omega} \left[ (\nabla V_z)^2 - 2 \frac{\nabla p}{\mu l} V_z \right] d\Omega$$

на множестве функций, точно удовлетворяющих

всем краевым условиям в случае (12) и удовлетворяющих главным краевым условиям в случае (13). Были проведены расчеты, где в качестве аппроксимирующих функций выбирались сплайны и полиномы Чебышева. Результаты расчетов показали, что увеличение размерности аппроксимационного пространства для сплайнов указывает на хорошую сходимость решения (рис. 3). Для сравнения были также проведены расчеты с помощью полиномов.

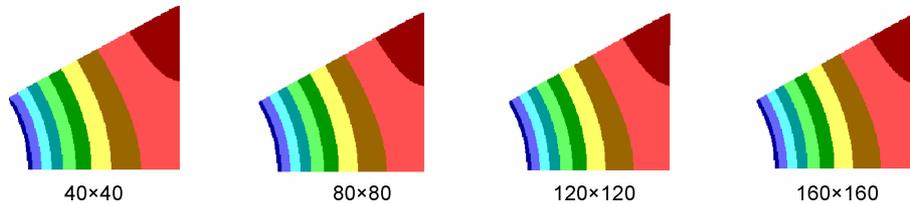


Рис. 3. Картины распределения поля скоростей при увеличении размерности аппроксимационного пространства.

На рис. 4 приведены результаты расчетов при использовании общей и частичной структур решений задачи (10), (11), которые совпадают до четвертой значащей цифры.

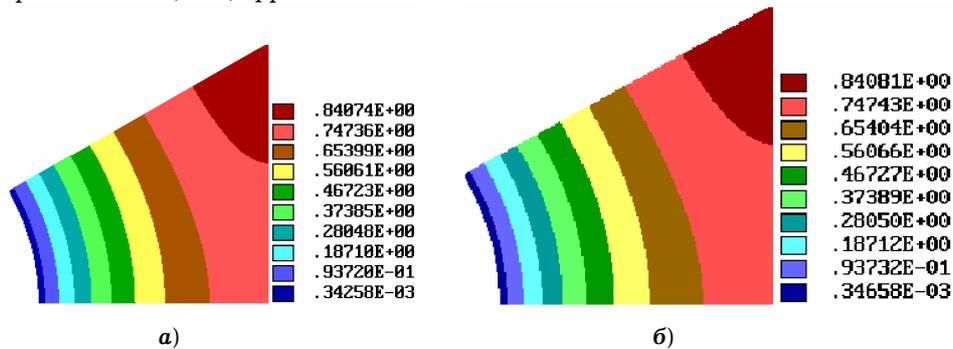


Рис. 4. Картины распределения поля скоростей для различных структур решений: а) – для общей структуры; б) – для частичной структуры.

При решении задачи (9) также использовались общая

$$U = P - \omega D_1 P \quad (14)$$

и частичная

$$U = P \quad (15)$$

структуры.

В этом случае задача (9) эквивалентна задаче о минимуме функционала

$$F = \int_{\Omega} \left[ (\nabla U)^2 - 2B_x \frac{\partial V_z}{\partial y} \cdot U \right] d\Omega$$

на множестве функций, точно удовлетворяющих естественным краевым условиям в случае (14) и не удовлетворяю-

щих каким-либо краевым условиям в случае (15). Распределение скорости отыскивалось при решении задачи (10). Таким образом, приходим к необходимости решения последовательности двух задач, при этом решение первой задачи входит в правую часть уравнения (9). Заметим, что метод  $R$ -функций, позволяющий получать решение в аналитическом виде, в данном случае оказывается весьма удобным при численной реализации, а система ПОЛЕ поддерживает решение последовательности задач.

Задачи (9), (10) были решены для моделейборок ТВЭЛов с различными видами поперечных сечений. Метод  $R$ -функций позволяет задавать геометрическую информацию с использованием буквенных параметров, меняя которые можно оперативно изменять в данном случае, например, положение стержней:

$$f_1 = ((x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2)/2r, \quad f_2 = ((x - a)^2 + (y + b)^2 - r^2)/2r,$$

$$f_3 = ((x + a)^2 + (y - b)^2 - r^2)/2r, \quad f_4 = ((x + a)^2 + (y + b)^2 - r^2)/2r,$$

$$\omega_{\text{rod}} = f_1 \wedge_0 f_2 \wedge_0 f_3 \wedge_0 f_4.$$

На рис. 5–8 приведены картины распределения поля скоростей и электрического потенциала для различного расположения стержней, их формы и вида поперечного сечения канала.

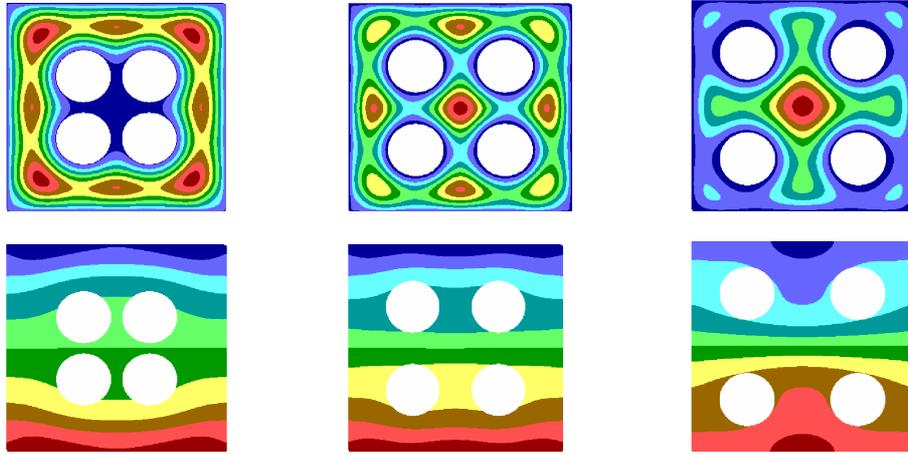


Рис. 5. Картины распределения поля скоростей (верхний ряд) и электрического потенциала (нижний ряд) при изменении положения стержней (схема на рис. 2а).

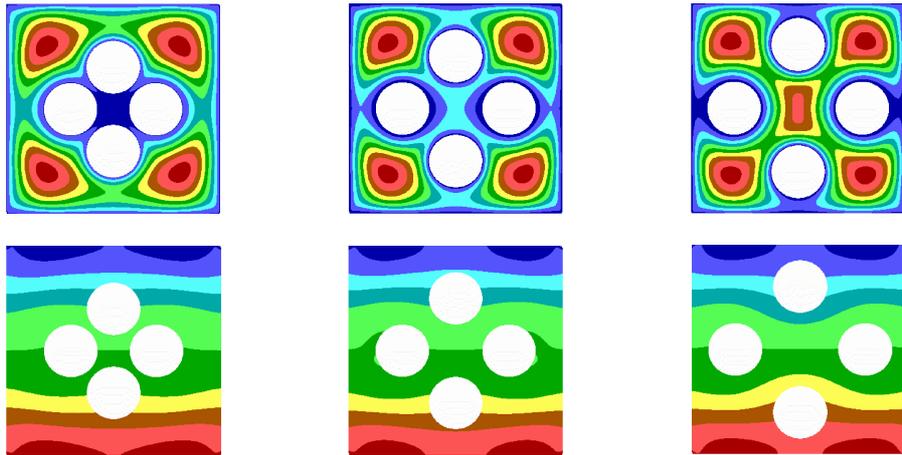


Рис. 6. Картины распределения поля скоростей (верхний ряд) и электрического потенциала (нижний ряд) при изменении положения стержней (схема на рис. 2б).

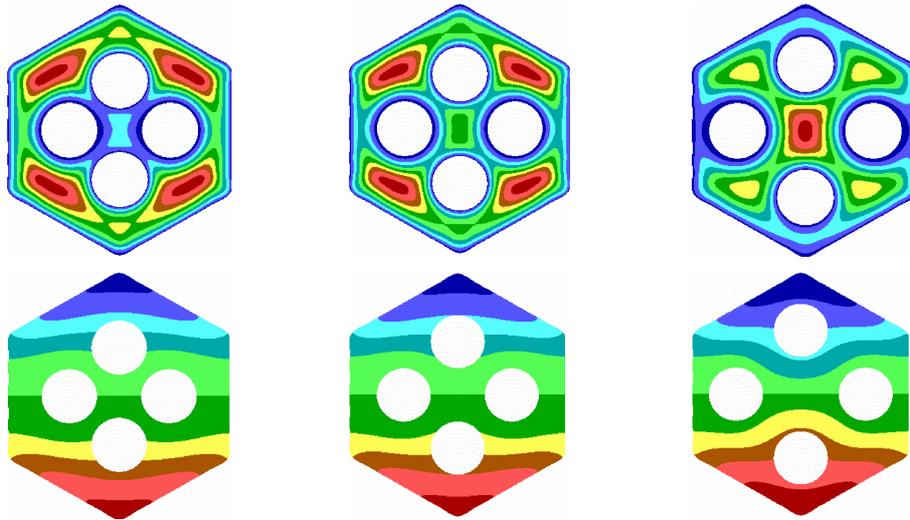


Рис. 7. Картины распределения поля скоростей (верхний ряд) и электрического потенциала (нижний ряд) при изменении формы канала и положения стержней (схема на рис. 2в).



Рис. 8. Картины распределения поля скоростей (верхний ряд) и электрического потенциала (нижний ряд) при изменении формы канала и положения стержней (схема на рис. 2г).

Приведенные картины распределения полей позволяют не только исследовать характер течения, но и определять границы «застойных» зон и зон максимальной скорости, а в случае задачи (9) – исследовать влияние распределения скорости и магнитной индукции на чувствительность расхода. Метод  $R$ -функций позволяет представлять решение в аналитическом виде, что делает возможным решение последовательности задач с использованием предыдущего решения в качестве возбуждающей или нагружающей функции для следующей задачи. Так, в данной работе полученное распределение скорости в задаче (10) использовалось в правой части уравнения в задаче (9). Следует также отметить возможность задания геометрической информации о решаемой задаче в условиях эксплуатации системы *ПОЛЕ* с использованием буквенных параметров, что позволяет оперативно изменять ориентацию ТВЭЛов относительно стенок канала, их размеры и др. с целью управления профилем скорости для получения более равномерного обтекания. Также это дало возможность оперативно рассчитывать задачи для сборок ТВЭЛов с различными поперечными сечениями.

1. Номофилов Е. В., Тревогда В. М. Расчет поля скоростей при ламинарном течении жидкости в прямолинейном канале произвольной формы. – Обнинск, 1972. – (Препр. / Физ.-энергет. ин-т. – № 347.)
2. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 551 с.
3. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. – Киев: Наук. думка, 1978. – 138 с.
4. Субботин В. И., Ибрагимов М. Х., Ушаков П. А., Жуков А. В., Юрьев Ю. С., Бобков В. П. Гидродинамика и теплообмен в атомных энергетических установках. – Москва: Атомиздат, 1975. – 408 с.
5. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. – Москва: Мир, 1965. – 268 с.
6. Höllig K. Finite element methods with  $B$ -splines. – Universität Stuttgart, 2003. – 155 p. – Ser. Frontiers in Appl. Math. Vol. 26.
7. Rvachev V. L., Sheyko T. I.  $R$ -functions in boundary-value problems in mechanics // Appl. Mech. Rev. – 1995. – **48**, No. 4. – P. 151–188.
8. Rvachev V. L., Shapiro V., Sheyko T. I., Tsukanov I. On completeness of  $RFM$  solution structures // Comput. Mech. – 2000. – **25**. – P. 305–316.

#### **R -ФУНКЦІЇ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ В РЕШІТКАХ ТВЕЛІВ**

*Поставлено і розв'язано методом  $R$ -функцій задачу електромагнітного витратоміра для моделей складання ТВЕЛів з різними поперечними перерізами, а також задачу гідродинаміки для правильних квадратних і трикутних решіток ТВЕЛів.*

#### **R -FUNCTIONS IN MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL FIELDS IN LATTICES OF FUEL ROD**

*Using the method of  $R$ -functions the problem of an electromagnetic flowmeter for models of assemblages of fuel rod with various cross-section sections, as well as the hydrodynamics problem for regular square and triangular lattices of fuel elements are formulated and solved.*

Физ.-энергет. факультет двойного подчинения:  
Ин-т проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков,  
Харьков. нац. ун-т имени В. Н. Каразина, Харьков

Получено  
26.11.10