УДК 512.546

Н. М. Пирч

ПРО Z-ФАКТОРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ГОМОМОРФІЗМИ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП

Вводиться та досліджується поняття Z-факторного відображення і пов'язане з ним поняття G-гомоморфізму, а також встановлюється, що властивість бути G-факторним відображенням для довільної паратопологічної групи G є M_p-інваріантною.

1. Вступ. З використанням концепції R-факторних відображень (див. [7]) означуємо поняття Z-факторного відображення для довільного топологічного простору Z. Також означуємо поняття G-гомоморфізму, споріднене до поняття Z-факторного відображення. У **п. 2** досліджуємо властивості Z-факторних відображень, у **п. 3** – властивості G-гомоморфізмів. Також встановлюємо, що властивість бути G-гомоморфізмом зберігається конструкцією вільного добутку, тим самим розширюємо перелік властивостей, що зберігаються конструкцією вільного добутку (див. [5, 8]). У **п. 4** доводимо основний результат роботи – теорему про M_p-інваріантність властивості бути G-факторним відображенням для довільної паратопологічної групи G. У **п. 5** узагальнюємо результати **п. 3** і **п. 4** на випадок вільних груп у многовидах (див. [6]) і вільних добутків у многовидах (див. [5]).

Означення 1. *Вільною паратопологічною групою в сенсі Маркова* топологічного простору X називають паратопологічну групу $F_p(X)$ з такими властивостями:

а) X – підпростір в $F_p(X)$;

б) X породжує $F_p(X)$ алгебраїчно;

в) для кожного неперервного відображення $f : X \to G$ в паратопологічну групу G існує і є єдиним неперервний гомоморфізм $f^* : F_p(X) \to G$, що продовжує f.

Для кожного топологічного простору X вільні паратопологічні групи $F_p(X)$ і $A_p(X)$ існують і є єдиними з точністю до ізоморфізму, що залишає на місці всі точки простору X. З властивостями вільних паратопологічних груп можна ознайомитися у [9, 10]. Розділ 7 монографії [4] містить найбільш повний на сьогодні виклад теорії вільних топологічних груп. Топологічні простори X і Y, що мають топологічно ізоморфні вільні паратопологічні групи $F_p(X)$ і $F_p(Y)$, будемо називати M_p-еквівалентними і позначати $X \overset{M_p}{\sim} Y$.

Неперервні відображення $f_1 : X_1 \to Y_1$ *і* $f_2 : X_2 \to Y_2$ називають M_p-еквівалентними, якщо існують ізоморфізми

$$i : F_p(X_1) \to F_p(X_2), \qquad j : F_p(Y_1) \to F_p(Y_2)$$

такі, що $f_1^* \circ i = j \circ f_2^*$, де $f_1^* : F_p(X_1) \to F_p(Y_1)$ і $f_2^* : F_p(X_2) \to F_p(Y_2)$ – гомоморфізми, що продовжують відображення f_1 і f_2.

Означення 2. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ – сім'я паратопологічних груп. Паратопологічну групу G будемо називати *вільним топологічним добутком сім'ї груп* $\{G_i : i \in I\}$ (і позначати $\prod\limits_{i \in I} * G_i$), якщо виконуються умови:

а) група G містить групи G_i як свої підгрупи;

б) мінімальна підгрупа групи G, що містить в собі всі підгрупи G_i, співпадає з G;

в) якщо для кожного $i \in I$ існує неперервний гомоморфізм $f_i : G_i \to H$ з паратопологічної групи G_i у паратопологічну групу H, то існує неперервний гомоморфізм f з паратополоігчної групи G у паратопологічну групу H такий, що $f|_{G_i} = f_i$ для всіх $i \in I$.

Як було встановлено в [1], для кожної сім'ї паратопологічних груп вільний добуток існує, є єдиним з точністю до ізоморфізму, що залишає на місці всі елементи груп, і є алгебраїчно ізоморфним вільному добутку абстрактних груп G_i.

Нехай $f_i : G_i \to H_i$ − сім'я неперервних гомоморфізмів паратопологічних груп. З означення вільного добутку випливає, що існує гомоморфізм

$$f = \prod_{i\in I} * f_i : \prod_{i\in I} * G_i \to \prod_{i\in I} * H_i$$

такий, що $f_i = f|_{G_i}$. Будемо називати гомоморфізм вільним добутком сім'ї гомоморфізмів $\{f_i : i \in I\}$.

2. Z-факторні відображення та їхні властивості.

Означення 3. Нехай Z − топологічний простір, $f : X \to Y$ − неперервне сюр'єктивне відображення. Говоримо, що *відображення f є Z-факторним*, якщо для довільного відображення $g : Y \to Z$ з неперервності композиції $g \circ f : X \to Z$ випливає неперервність відображення g.

Якщо $f : X \to Y$ − факторне відображення, то для довільного топологічного простору Z це відображення буде Z-факторним. Тому багато властивостей Z-факторних відображень є аналогічними до властивостей факторних відображень.

Твердження 1. *Композиція двох Z-факторних відображень є Z-факторним відображенням.*

Д о в е д е н н я. Нехай $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ − Z-факторні відображення, $h : X_3 \to Z$ − відображення таке, що композиція $h \circ g \circ f : X_1 \to$ $\to Z$ є неперервною. З Z-факторності відображення f випливає неперервність відображення $h \circ g : X_2 \to Z$, а із Z-факторності відображення g випливає неперервність відображення h. Тобто відображення $g \circ f$ є Z-факторним. ♦

Твердження 2. *Нехай $f : X \to Y$ − неперервне відображення, причому існує підпростір $X_1 \subseteq X$ такий, що відображення $f|_{X_1} : X_1 \to Y$ є Z-факторним. Тоді відображення $f : X \to Y$ є Z-факторним.*

Д о в е д е н н я. Нехай $g : Y \to Z$ − відображення таке, що композиція $g \circ f : X \to Z$ є неперервною. Тоді відображення $(g \circ f)|_{X_1} = g \circ (f|_{X_1}) :$ $: X_1 \to Z$ є неперервним. Із Z-факторності відображення $f|_{X_1}$ випливає неперервність відображення g. ♦

Наслідок 1. *Нехай $f_i : X_i \to Y$, $i \in I$, − сім'я неперервних відображень, причому існує $i \in I$ таке, що відображення f_i є Z-факторним. Тоді комбінація $\mathop{\nabla}_{i\in I} f_i : \mathop{\oplus}_{i\in I} X_i \to Y$* [3, с. 126] *буде Z-факторним відображенням.*

Твердження 3. *Нехай Z_1 є підпростором простору Z. Тоді довільне Z-факторне відображення буде Z_1-факторним.*

Твердження 4. *Нехай $f_i : X_i \to Y_i$, $i \in I$, − сім'я неперервних відображень. Тоді пряма сума $\underset{i\in I}{\oplus} f_i : \underset{i\in I}{\oplus} X_i \to \underset{i\in I}{\oplus} Y_i$* [3. с. 126] *буде Z-факторним відображенням тоді й тільки тоді, коли усі відображення f_i є Z-факторними.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $f_i : X_i \to Y_i$ − сім'я Z-факторних відображень, $f = \underset{i\in I}{\oplus} f_i$. Нехай також $g : \underset{i\in I}{\oplus} Y_i \to Z$ − відображення таке, що композиція $g \circ f : \underset{i\in I}{\oplus} X_i \to Z$ є неперервною. Тоді звуження $(g \circ f)|_{X_i} = g_i \circ f_i$, де $g_i = g|_{Y_i}$ є неперервним. Із Z-факторності відображень f_i випливає неперервність відображень g_i, а отже, і їх прямої суми, тобто відображення g.

Достатність. Нехай відображення $\underset{i\in I}{\oplus} f_i : \underset{i\in I}{\oplus} X_i \to \underset{i\in I}{\oplus} Y_i$ є Z-факторним. Нехай відображення $g_i : Y_i \to Z$ є таким, що композиція $g_i \circ f_i : X_i \to Z$ є неперервною. Нехай також $a \in Z$. Для $j \neq i$ означимо відображення $g_j : Y_j \to Z$, поклавши $g_j\big|_{Y_j} = a$. Відображення g_j є неперервними, а отже, неперервними є відображення $g_j \circ f_j$. Тому відображення $\underset{i\in I}{\oplus}(g_i \circ f_i) : \underset{i\in I}{\oplus} X_i \to Z$ є неперервним. Із Z-факторності відображення $\underset{i\in I}{\oplus} f_i$ випливає неперервність відображення $\underset{i\in I}{\oplus} g_i : \underset{i\in I}{\oplus} Y_i \to Z$, а отже, і неперервність відображення $g_i : Y_i \to Z$. ♦

Твердження 5. *Нехай $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ − неперервні сюр'єктивні відображення, причому відображення $g \circ f : X_1 \to X_3$ є Z-факторним. Тоді відображення g буде Z-факторним.*

Д о в е д е н н я. Нехай $h : X_3 \to Z$ − відображення таке, що композиція $h \circ g : X_2 \to Z$ є неперервною. Тоді відображення $h \circ g \circ f : X_1 \to Z$ є неперервним як композиція неперервних відображень. Із Z-факторності відображення $g \circ f$ випливає неперервність відображення h. ♦

Нагадаємо, що відображення $f_1 : X_1 \to Y_1$ і $f_2 : X_2 \to Y_2$ називають гомеоморфними, якщо існують гомеоморфізми $i : X_1 \to X_2$, $j : Y_1 \to Y_2$ такі, що $f_2 \circ i = j \circ f_1$. Властивість відображень між топологічними просторами називається топологічною, якщо вона зберігається відношенням гомеоморфності.

Твердження 6. *Властивість бути Z-факторним відображенням є топологічною.*

Д о в е д е н н я. Нехай $f_1 : X_1 \to Y_1$ і $f_2 : X_2 \to Y_2$ − гомеоморфні відображення, $i : X_1 \to X_2$, $j : Y_1 \to Y_2$ − гомеоморфізми такі, що $f_2 \circ i = j \circ f_1$, і нехай відображення $f_1 : X_1 \to Y_1$ є Z-факторним. Покажемо, що відображення $f_2 : X_2 \to Y_2$ є Z-факторним. Нехай відображення $h : Y_2 \to Z$ таке, що композиція $h \circ f_2 : X_2 \to Z$ є неперервною. Тоді композиція $h \circ f_2 \circ i = h \circ j \circ f_1$ є неперервною. Оскільки відображення f_1 є Z-факторним, то відображення $h \circ j$, а отже, і відображення h є неперервними. ♦

Якщо простір Z є антидискретним, то кожне неперервне відображення є Z-факторним.

Якщо за простір Z вибрати простір дійсних чисел зі стандартною топологією, то отримаємо клас R-факторних відображень, який досліджував О. Г. Окунєв у роботі [7].

За простір Z виберемо простір Z_2 з дискретною топологією та дослідимо клас Z_2-факторних відображень.

Твердження 7. *Неперервне сюр'єктивне відображення $f : X \to Y$ є Z_2-факторним тоді й тільки тоді, коли кожна множина U в Y, для якої $f^{-1}(U)$ – відкрито-замкнена множина в X, є відкрито-замкненою в Y.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $f : X \to Y$ – Z_2-факторне відображення, множина U в Y така, що множина $f^{-1}(U)$ відкрито-замкнена в X. Означимо відображення $h : Y \to Z_2$, поклавши $h|_U = 0$, $h|_{Y \setminus U} = 1$. Розглянемо композицію $h \circ f : X \to Z_2$. Оскільки множина $f^{-1}(U)$ відкрито-замкнена в X, то відображення $h \circ f$ є неперервним. Із Z_2-факторності відображення f випливає неперервність відображення h. Отже, множина $U = h^{-1}(0)$ є відкрито-замкненою.

Достатність. Нехай $h : Y \to Z_2$ – відображення таке, що композиція $h \circ f$ є неперервною. Покладемо $U = h^{-1}(0)$. Множина $f^{-1}(U) = (h \circ f)^{-1}(0)$ є відкрито-замкненою як прообраз відкрито-замкненої множини $\{0\} \subseteq Z_2$ при неперервному відображенні $h \circ f$. А тому множина U є відкрито-замкненою, звідки отримуємо, що відображення h є неперервним. ♦

За простір Z виберемо простір $S = \{a, b\}$ з топологією

$$\tau = \{\varnothing, \{a\}, S\}.$$

Твердження 8. *Кожне S-факторне відображення є факторним.*

Д о в е д е н н я. Нехай $f : X \to Y$ – S-факторне відображення, множина U в Y така, що множина $f^{-1}(U)$ відкрита в X. Означимо відображення $h : Y \to S$, поклавши $h|_U = a$, $h|_{Y \setminus U} = b$. Розглянемо композицію $h \circ f : X \to S$. Оскільки множина $f^{-1}(U)$ відкрита в X, то відображення $h \circ f$ є неперервним. Із S-факторності відображення f випливає неперервність відображення h. Отже, множина $U = h^{-1}(a)$ є відкритою. ♦

Оскільки кожен T_0-простір, що не є T_1-простором, містить простір S як підпростір, то з тверджень 3 і 8 випливає

Наслідок 2. *Нехай Z – T_0-простір, що не є T_1-простором. Тоді кожне Z-факторне відображення є факторним.*

Позначимо через D_X ущільнення з дискретного простору $D_{|X|}$ потужності $|X|$ на простір X, а через AD_X – ущільнення з простору X на антидискретний простір $AD_{|X|}$ потужності $|X|$.

Наступні два твердження випливають безпосередньо з означення Z-факторних відображень.

Твердження 9. *Відображення $D_X : D_{|X|} \to X$ є Z-факторним тоді й тільки тоді, коли кожне відображення з топологічного простору X у топологічний простір Z є неперервним.*

Твердження 10. *Нехай* Z *є* T_0*-простором. Відображення* $AD_X : X \to \to AD_{|X|}$ *є* Z*-факторним тоді й тільки тоді, коли кожне неперервне відображення з топологічного простору* X *у топологічний простір* Z *є постійним.*

3. G **-гомоморфізми та їхні властивості.**

Означення 4. Нехай G − паратопологічна група, $f : H_1 \to H_2$ − неперервний епіморфізм паратопологічних груп H_1 і H_2. Говоримо, що гомоморфізм f є G*-гомоморфізмом*, якщо для довільного гомоморфізму $g : H_2 \to \to G$ з неперервності композиції $g \circ f : H_1 \to G$ випливає неперервність гомоморфізму g.

Очевидно, що кожен гомоморфізм, що є G-факторним відображенням, є G-гомоморфізмом. Обернене твердження не є правильним. Наприклад, тотожний ізоморфізм $i : (Z_3, \tau_1) \to (Z_3, \tau_2)$, де τ_1 − дискретна топологія на Z_3, τ_2 − антидискретна топологія на Z_3, є Z_2-гомоморфізмом, але не є Z_2-факторним відображенням.

Аналогічно до властивостей Z-факторних відображень мають місце такі властивості G-гомоморфізмів.

Твердження 11. *Композиція двох* G*-гомоморфізмів є* G*-гомоморфізмом.*

Твердження 12. *Якщо* $f : H \to K$ − *неперервний гомоморфізм, причому існує підгрупа* $H_1 \subseteq H$ *така, що гомоморфізм* $f|_{H_1} : H_1 \to G$ *є* G*-гомоморфізмом, тоді гомоморфізм* f *є* G*-гомоморфізмом.*

Твердження 13. *Якщо* G_1 − *підгрупа в* G, *тоді кожен* G*-гомоморфізм є* G_1*-гомоморфізмом.*

Твердження 14. *Нехай* $f : H_1 \to H_2$, $g : H_2 \to H_3$ − *неперервні епіморфізми, причому гомоморфізм* $g \circ f : H_1 \to H_3$ *є* G*-гомоморфізмом. Тоді гомоморфізм* g *є* G*-гомоморфізмом.*

Будемо говорити, що гомоморфізми $f_1 : G_1 \to H_1$ і $f_2 : G_2 \to H_2$ паратопологічних груп є топологічно ізоморфними, якщо існують топологічні ізоморфізми $i : G_1 \to G_2$, $j : H_1 \to H_2$ такі, що $f_2 \circ i = j \circ f_1$. Властивість гомоморфізмів паратопологічних груп називається топологічно-алгебраїчною, якщо вона зберігається відношенням топологічної ізоморфності.

Твердження 15. *Властивість бути* G*-гомоморфізмом є топологічно-алгебраїчною.*

З твердження 12 випливає

Твердження 16. *Нехай* $f_i : G_i \to H$ − *сім'я неперервних гомоморфізмів, причому існує* $i \in I$ *таке, що гомоморфізм* f_i *є* G*-гомоморфізмом. Тоді гомоморфізм* $f : \prod_{i\in I} * G_i \to H$ *є* G*-гомоморфізмом.*

Теорема 1. *Нехай* $f_i : H_i \to W_i$, $i \in I$, − *сім'я гомоморфізмів. Тоді вільний добуток* $\prod_{i\in I} * f_i : \prod_{i\in I} * H_i \to \prod_{i\in I} * W_i$ *буде* G*-гомоморфізмом тоді й тільки тоді, коли усі гомоморфізми* f_i *є* G*-гомоморфізмами.*

Д о в е д е н н я. Необхідність. Нехай $f_i : H_i \to W_i$ − сім'я G-гомоморфізмів, $f = \prod_{i\in I} * f_i$. Нехай також $g : \prod_{i\in I} * W_i \to G$ − гомоморфізм такий, що композиція $g \circ f : \prod_{i\in I} * H_i \to Z$ є неперервною. Тоді звуження $(g \circ f)|_{H_i} =$

$= g_i \circ f_i$, де $g_i = g|_{W_i}$, є неперервним. Із того, що гомоморфізм f_i є G-гомоморфізмом, випливає неперервність гомоморфізмів g_i, а отже, і їхнього вільного добутку, тобто відображення g.

Достатність. Нехай гомоморфізм $\prod_{i\in I} * f_i : \prod_{i\in I} * H_i \to \prod_{i\in I} * W_i$ є G-гомоморфізмом. Нехай також $g : W_i \to G$ − гомоморфізм такий, що композиція $g \circ f_i$ є неперервною. Для $j \neq i$ означимо гомоморфізм $g_j : W_j \to G$, поклавши $g_j\big|_{W_j} = e$. Гомоморфізми g_j є неперервними, а отже, неперервними є гомоморфізми $g_j \circ f_j$. А тому гомоморфізм $\prod_{i\in I} * (g_i \circ f_i) : \prod_{i\in I} * H_i \to G$ є неперервним. З того, що гомоморфізм $\prod_{i\in I} * f_i : \prod_{i\in I} * H_i \to \prod_{i\in I} * W_i$ є G-гомоморфізмом, випливає неперервність гомоморфізму $\prod_{i\in I} * g_i : \prod_{i\in I} * W_i \to G$, а отже, і неперервність гомоморфізму $g_i = \prod_{i\in I} * g_i|_{W_i}$. ♦

4. Z-факторні відображення та гомоморфізми вільних паратопологічних груп.

З твердження 2 випливає наступне

Твердження 17. *Нехай $f : X \to G$ − Z-факторне відображення з топологічного простору X на паратопологічну групу G. Тоді гомоморфізм $f^* : F_p(X) \to G$, що продовжує відображення f, є Z-факторним.*

Теорема 2. *Нехай G − паратопологічна група, $f : X \to Y$ − неперервне відображення. Тоді гомоморфізм $f^* : F_p(X) \to F_p(Y)$, що продовжує відображення f, є G-гомоморфізмом тоді й тільки тоді, коли відображення f є G-факторним.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність*. Нехай відображення $f : X \to Y$ є G-факторним, $h : F_p(Y) \to G$ − гомоморфізм такий, що композиція $h \circ f^* : F_p(X) \to G$ є неперервним гомоморфізмом. Тоді відображення $h \circ f^*\big|_X = h \circ f|_X$ є неперервним. Із G-факторності відображення f випливає неперервність відображення $h|_Y$. А тому гомоморфізм h, що продовжує відображення $h|_Y$, є неперервним.

Достатність. Нехай гомоморфізм $f^* : F_p(X) \to F_p(Y)$, що продовжує відображення $f : X \to Y$, є G-гомоморфізмом. Нехай також відображення $h : Y \to G$ таке, що композиція $h \circ f : X \to G$ є неперервною. Тоді гомоморфізм $h^* \circ f^* : F_p(X) \to G$, що продовжує відображення $h \circ f$, є неперервним. Оскільки гомоморфізм f^* є G-гомоморфізмом, то гомоморфізм $h^* : F_p(Y) \to G$ є неперервним. Отже, відображення $h = h^*\big|_Y$ є неперервним. ♦

Наслідок 3. *Нехай G − паратопологічна група. Тоді властивість бути G-факторним відображенням зберігається відношенням M_p-еквівалентності.*

Таким чином, властивість бути R-факторним відображенням і властивість бути Z_2-факторним відображенням зберігаються відношенням M_p-еквівалентності.

Нехай $G=(R,+)$ − адитивна група дійсних чисел і $\tau=\{x\in R : x\geq 0\}$. Тоді τ є базою в нулі деякої топології на групі G, що перетворює G в паратопологічну групу. Простір цієї групи є T_0-простором, але не є T_1-простором, тому з наслідку 2 випливає, що для такої паратопологічної групи властивості бути G-факторним відображенням і факторним відображенням є еквівалентними. А отже, властивість бути факторним відображенням є M_p-інваріантною.

Як встановлено у [2], з $X \overset{M_p}{\sim} Y$ випливає, що $D_X \overset{M_p}{\sim} D_Y$ і $AD_X \overset{M_p}{\sim} AD_Y$. Враховуючи наслідок 3, твердження 9 і 10, отримаємо такі наслідки.

Наслідок 4. *Нехай $X \overset{M_p}{\sim} Y$ і кожне відображення з топологічного простору X у паратопологічну групу G є неперервним. Тоді кожне відображення з топологічного простору Y у паратопологічну групу G є неперервним.*

Наслідок 5. *Нехай $X \overset{M_p}{\sim} Y$ і кожне неперервне відображення з топологічного простору X у паратопологічну групу G є константним. Тоді кожне неперервне відображення з топологічного простору Y у паратопологічну групу G є константним.*

Через $F(X)$ позначимо вільну топологічну групу тихоновського простору X (див. розд. 7 з [4]).

Аналогічно до теореми 2 доводиться

Теорема 3. *Нехай G − відділяюча топологічна група, $f : X\to Y$ − неперервне відображення тихоновських просторів. Тоді гомоморфізм $f^* : F(X)\to F(Y)$, що продовжує відображення f, є G-гомоморфізмом тоді й тільки тоді, коли відображення f є G-факторним.*

Означення 5. Нехай Z − топологічний простір. Говоримо, що *відображення $f : X\to Y$ є спадково Z-факторним*, якщо для довільної множини $B\subseteq Y$ відображення $f|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B)\to B$ є Z-факторним.

Постає питання, чи зберігається властивість бути спадково Z-факторним відображення відношенням M_p-еквівалентності.

5. Z-факторні відображення і многовиди топологічних груп. Нагадаємо, що многовидом називають клас топологічних груп, замкнений відносно операцій переходу до добутку, підгруп і факторгруп. Для сім'ї $\{G_i : i\in I\}$ топологічних груп з многовиду V через $V\prod_{i\in I} * G_i$ позначають вільний добуток сім'ї $\{G_i : i\in I\}$ у многовиді V (див [5]).

З твердження 2 випливає наступне

Твердження 18. *Нехай V − многовид топологічних груп, $f_i : G_i\to H$ − сім'я неперервних гомоморфізмів, $G_i\in V$ для всіх $i\in I$, $H\in V$. Нехай також існує $i\in I$ таке, що гомоморфізм f_i є G-гомоморфізмом. Тоді гомоморфізм $f : V\prod_{i\in I} * G_i\to H$ є G-гомоморфізмом.*

Аналогічно до теореми 1 доводиться

Теорема 4. *Нехай V − многовид топологічних груп, $G\in V$, $H_i\in V$, $W_i\in V$ для всіх $i\in I$, $f_i : H_i\to W_i$, $i\in I$, − сім'я неперервних гомоморфізмів. Тоді вільний добуток $\prod_{i\in I} * f_i : \prod_{i\in I} * H_i\to \prod_{i\in I} * W_i$ буде G-гомоморфізмом тоді й тільки тоді, коли усі гомоморфізми f_i є G-гомоморфізмами.*

Для тихоновського простору X і многовиду топологічних груп V через $F(X,V)$ позначають вільну топологічну групу простору X у многовиді V.

З твердження 2 випливає таке

Твердження 19. *Нехай V – многовид топологічних груп, $G \in V$, X – тихоновський простір, для якого існує вільна група $F(X,V)$, $f : X \to G$ – Z-факторне відображення з топологічного простору X на топологічну групу G. Тоді гомоморфізм $f^* : F(X,V) \to G$, що продовжує відображення f, є Z-факторним.*

Аналогічно до теореми 2 доводиться

Теорема 5. *Нехай V – многовид топологічних груп, $G \in V$, X та Y – тихоновські простори, для яких існують вільні групи $F(X,V)$ і $F(Y,V)$, $f : X \to Y$ – неперервне відображення. Тоді гомоморфізм $f^* : F(X,V) \to$ $\to F(Y,V)$, що продовжує відображення f, є G-гомоморфізмом тоді й тільки тоді, коли відображення f є G-факторним.*

1. *Пирч Н. М.* Вільні добутки паратопологічних груп // Мат. студії. – 2010. – **33**, № 2. – С. 139–146.
2. *Пирч Н. М.* Про ізоморфізми вільних паратопологічних груп // Наук. зап. Укр. акад. друкарства. – 2010. – **18**, № 2. – С. 56–62.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 751 с.
   Те саме: *Engelking R.* General topology. – Warszawa: PWN, 1977.
4. *Arkhangel'skiĭ A. V., Tkachenko M.* Topological groups and related structures. – Amsterdam–Paris: Atlantis Press, 2008. – xiv + 781 p.
5. *Morris S. A.* Free products of topological groups // Bull. Austr. Math. Soc. – 1971. – **4.** – P. 17–29.
6. *Morris S. A.* Varieties of topological groups // Bull. Austr. Math. Soc. – 1969. – **1.** – P. 145–160.
7. *Okunev O. G.* A method for constructing examples of M-equivalent spaces // Topol. Appl. – 1990. – **36.** – P. 157–171; Correction: Topol. Appl. – 1993. – **49.** – P. 191–192.
8. *Ordman E. T.* Free products of topological groups which are k_ω-spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **191.** – P. 61–73.
9. *Pyrch N. M., Ravsky O. V.* On free paratopological groups // Мат. студії. – 2006. – **25**, No. 2. – P. 115–125.
10. *Romaguera S., Sanchis M., Tkachenko M.* Free paratopological groups // Topol. Proc. – 2002. – **27,** No. 2. – P. 613–640.

О Z-ФАКТОРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ И ГОМОМОРФИЗМАХ ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Вводится и исследуется понятие Z-факторного отображения, а также близкое к нему понятие G-гомоморфизма. Устанавливается, что свойство быть G-факторным отображением есть M_p-инвариантным для произвольной паратопологической группы G.

ON Z-QUOTIENT MAPPINGS AND HOMOMORPHISMS OF PARATOPOLOGICAL GROUPS

The notion of the Z-quotient mapping and the related with it notion of the G-homomorphism are introduced and investigated. It is established, that the property of being G-quotient mapping is M_p-invariant for arbitrary paratopological group G.

Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано
21.04.10