УДК 517.98

М. А. Митрофанов, О. В. Равський

АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ

Розглянуто апроксимацію аналітичними та $*$-аналітичними функціями неперервних функцій на зліченно нормованих просторах Фреше. Також знайдено критерій існування продовження неперервної функції з усюди щільного підпростору топологічного простору на весь простір.

У питанні апроксимації неперервних функцій на просторі перші ґрунтовні результати були отримані ще Вейєрштрассом у 1885 році. Проте ці дослідження стосувалися підмножин скінченновимірних просторів. У випадку дійсного банахового простору J. Kurzweil [6] отримав такий результат.

Теорема 1 (Kurzweil). *Нехай X – сепарабельний дійсний банахів простір, що допускає відділяючий поліном, G – довільна відкрита підмножина в X. Нехай F – неперервний оператор, визначений в G, зі значеннями в довільному банаховому просторі Y. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий оператор H, аналітичний в G, що нерівність*

$$\|F(x) - H(x)\| < \varepsilon \tag{1}$$

виконується для всіх $x \in G$.

Пізніше M. C. Boiso і P. Hájek [5] отримали для апроксимації рівномірно неперервних функцій на дійсних банахових просторах сильніший результат при послабленні додаткових умов. У 2009 році у праці [2] отримано аналоги результатів J. Kurzweil та M. C. Boiso і P. Hájek для комплексних банахових просторів.

У цій роботі, спираючись на попередні результати, отримані для банахових просторів, дослідимо можливість апроксимації неперервних функцій для деяких просторів Фреше, причому як для дійсного, так і для комплексного випадків.

Нагадаємо основні означення. Нехай X та Y – лінійні простори над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.

Означення 1. Відображення B_n, $B_n : X^n \to Y$, називають $*$-n-*лінійним*, якщо його можна подати у вигляді

$$B_n(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}) = \sum_{k+m=n} c_{km} B_{km}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}),$$

де відображення $B_{km} : X^{k+m} \to Y$ є ненульовим k-лінійним відносно $x_i \in X$ для $1 \le i \le k \in \mathbb{N}$ і m-антилінійним відносно $x_{k+j} \in X$ для $1 \le j \le m \in \mathbb{N}$. Коефіцієнти c_{km} приймають значення 0 або 1, але принаймні одне зі значень c_{km} є відмінним від нуля, $k + m = n$.

Означення 2. Відображення F_n, $F_n : X \to Y$, називають n-*однорідним* $*$-*поліномом*, якщо існує $*$-n-лінійне відображення $B_n : X^n \to Y$ таке, що $F_n(x) = B_n(x, \dots, x)$ для всіх $x \in X$. У випадку, коли $n = 0$, F_0 є тотожною константою в Y.

Означення 3. Відображення F з X в Y називають $*$-*поліномом степеня* j, якщо $F = \sum_{n=0}^{j} F_n$, де F_n є n-однорідним $*$-поліномом і $F_j \ne 0$.

Нехай X – топологічний векторний простір, Y – нормований простір.

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2011. – 54, № 3. – С. 33-40.

Означення 4. Відображення $F : X \to Y$ називають $*$-*аналітичним*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує окіл $V \subset X$, $x \in V$, такий, що $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$, де F_n є n-однорідними неперервними $*$-поліномами і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ збігається рівномірно в околі V за нормою простору Y.

Позначимо через $\tilde{H}(X, Y)$ лінійний простір всіх $*$-аналітичних відображень з комплексного нормованого простору X у комплексний банахів простір Y.

Легко бачити, що, якщо F_n породжуються лише формами вигляду B_{k0}, то означення F_n буде означенням полінома на лінійному просторі, а відповідне відображення F, породжене відображеннями F_n, буде аналітичною функцією.

Позначимо через $H(X, Y)$ лінійний простір всіх аналітичних відображень з нормованого простору X у банахів простір Y.

Означення 5. $*$-поліном $P : X \to \mathbb{C}$ на нормованому просторі X називають відділяючим $*$-поліномом, якщо

а) $P(0) = 0$;

б) $\|P(x)\| \geq 1$ для кожного $x \in X$ такого, що $\|x\| = 1$.

Зокрема, якщо $*$-поліном P є поліномом і діє з дійсного простору X у простір $\mathbb{R}$, то його називають відділяючим поліномом.

Означення 6. Нехай X є комплексним нормованим простором. Будемо говорити, що функція $Q : X \to \mathbb{C}$, $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ для всіх $x \in X$, де $Q_n(x)$ – n-однорідні $*$-поліноми, є *рівномірно $*$-аналітичною і відділяючою*, якщо вона задовольняє такі умови:

а) існує таке число R_Q, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ збігається рівномірно в кулі радіуса R_Q з центром у довільній точці $x_0 \in X$;

б) існує $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що множина таких $x \in X$, що $|Q(x)| < \alpha$, є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі.

Означення 7. Нехай X – дійсний нормований простір. Будемо говорити, що дійсна функція $Q : X \to \mathbb{R}$ є *рівномірно аналітичною* і відділяючою, якщо вона задовольняє наступні умови:

а) функція Q є дійсною аналітичною на X з радіусом збіжності R_{Q_x} в кожній точці $x \in X$ більшим або рівним за R_Q для деякого $R_Q > 0$;

б) існує $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що множина таких $x \in X$, що $Q(x) < \alpha$, є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі.

Для подальшого дослідження потрібні будуть дві наступні леми. Хоча, напевне, їх доведення є відомими, авторам не вдалося їх знайти в літературі, і тому задля повноти наводимо доведення цих лем нижче. Введемо необхідні позначення.

Для фільтра $\mathcal{F}$ на топологічному просторі через $\lim \mathcal{F}$ позначатимемо множину всіх границь фільтра $\mathcal{F}$. Згідно з [4, **п**. 1.6] будемо говорити, що фільтр $\mathcal{F}$ збігається до точки x, якщо $x \in \lim \mathcal{F}$, та, що фільтр $\mathcal{F}$ є збіжним, якщо $\lim \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Нехай X – топологічний простір; Y – регулярний топологічний простір; D – щільна підмножина простору X; $g : D \to Y$ – відображення; $\mathcal{F}$ – фільтр на просторі X. Через $g(\mathcal{F})$ позначимо фільтр на просторі Y, породжений базою $\{g(\mathcal{F}) : F \in \mathcal{F}\}$. Для кожної точки $x \in X$ через $\mathcal{F}_x$ позначимо слід фільтра всіх околів точки x на множині D.

Лема 1. *Неперервне відображення $f : D \to Y$ продовжується до неперервного відображення $\tilde{f} : X \to Y$ тоді й тільки тоді, коли для довільної точки $x \in X$ фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ є збіжним.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $x \in X$ – довільна точка. Тоді, оскільки відображення f є неперервним, згідно з твердженням [4, **п**. 1.6.10], виконується включення

$$\tilde{f}(x) \in \tilde{f}(\lim \mathcal{F}_x) \subset \lim \tilde{f}(\mathcal{F}_x) = \lim f(\mathcal{F}_x).$$

Отже, фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ є збіжним.

Достатність. Оскільки простір Y є гаусдорфовим, то на підставі твердження [4, **п**. 1.6.11] для кожної точки $x \in X$ фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ має єдину границю. Побудуємо відображення $\tilde{f}$, прийнявши, що $\{\tilde{f}(x)\} = \lim f(\mathcal{F}_x)$ для кожної точки $x \in X$. За неперервністю f на D маємо $\{\tilde{f}(x)\} = = \lim f(\mathcal{F}_x) \supset f(\lim \mathcal{F}_x) = \{f(x)\}$. Отже, відображення $\tilde{f}$ є продовженням відображення f.

Покажемо тепер неперервність відображення $\tilde{f}$. Нехай $\tilde{V}$ – довільна непорожня відкрита підмножина простору Y та $x \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{V})$. Згідно з регулярністю простору Y, існує відкрита підмножина $\tilde{U}$ така, що $\tilde{f}(x) \in \tilde{U} \subset \subset \overline{\tilde{U}} \subset \tilde{V}$. Оскільки $\lim f(\mathcal{F}_x) \subset \tilde{U}$, то існує відкритий окіл U точки x такий, що $f(U \cap D) \subset \tilde{U}$. Тоді для кожної точки $x' \in U$ маємо

$$\{\tilde{f}(x')\} = \lim f(\mathcal{F}_{x'}) \subset \overline{\tilde{U}} \subset \tilde{V}. \qquad \blacklozenge$$

Топологічний простір X називають простором Фреше – Урисона (див., наприклад, [4, **п**. 1.6]), якщо для довільної $A \subset X$ та довільної $x \in \overline{A}$ існує послідовність $\{x_n\}$ точок множини A, збіжна до x. Кожен простір з першою аксіомою зліченності (а, отже, і кожен метризовний простір) є простором Фреше – Урисона [4, **п**. 1.6.14].

Лема 2. *Нехай X – простір Фреше – Урисона, Y – регулярний топологічний простір, D – щільна підмножина простору X. Неперервне відображення $f : D \to Y$ продовжується до неперервного відображення $\tilde{f} : X \to \to Y$ тоді й тільки тоді, коли для довільної збіжної в X послідовності $\{x_n\}$ точок з D послідовність $\{f(x_n)\}$ теж є збіжною.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $x \in X$ – довільна точка та $\{x_n\} \subset D$ – збіжна до x послідовність. Позначимо через S_x фільтр на D, породжений базою $\{\{x_n : n \ge m\} : m \in \mathbb{N}\}$. Згідно з лемою 1 фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ є збіжним. Легко бачити, що фільтр S_x є тоншим від фільтра $\mathcal{F}_x$. Оскільки фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ є збіжним, то, за твердженням [4, **п**. 1.6.8], фільтр $f(S_x)$ також є збіжним, і, отже, послідовність $\{f(x_n)\}$ теж є збіжною.

Достатність. Нехай $x \in X$ – довільна точка та $\{x_n\} \subset D$ – збіжна до x послідовність. Нехай послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $y \in Y$. Покажемо, що фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ теж збігається до точки y. Дійсно, припустимо протилежне. Тоді існує такий окіл $\tilde{V}$ точки y, що для довільного околу U точки x існує точка $x_U \in U \bigcap D$ така, що $f(x_U) \in Y \setminus \tilde{V}$. Позначимо сім'ю всіх околів точки x через N_x і приймемо $A = \{x_U : U \in N_x\}$. З побудови A випливає, що $x \in \overline{A}$, тому існує послідовність точок $\{x'_n\} \subset A$, збіжна до x. Задамо послідовність $\{x''_n\} \subset D$, поклавши $x''_{2n} = x_n$ та $x''_{2n-1} = x'_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді послідовність $\{x''_n\}$ є збіжною до x, тому, за умовою леми, послідовність $\{f(x''_n)\}$ теж є збіжною до деякої точки $y'' \in Y$. Зрозуміло, що послідовність $\{f(x_n)\}$ є підпослідовністю послідовності $\{f(x''_n)\}$. Оскільки $\{f(x''_n)\}$ збігається до y'', а $\{f(x_n)\}$ збігається до y, то $y'' = y$. Тому послідовність $\{f(x'_n)\}$ теж збігається до точки y. Але, за побудовою множини A, $\{f(x'_n)\} \subset Y \setminus \tilde{V}$, отже, $y \in Y \setminus \tilde{V}$. Це суперечить тому, що $y \in \tilde{V}$. Таким чином, фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ збігається до точки y. Тому, за лемою 1, відображення $f : D \to Y$ продовжується до неперервного відображення $\tilde{f} : X \to Y$. ♦

Топологічний простір X називають секвенціальним простором [4, **п**. 1.6], якщо множина $A \subset X$ замкнена тоді й тільки тоді, коли разом з кожною послідовністю вона містить всі її границі. Кожен простір Фреше – Урисона є секвенціальним [4, **п**. 1.6.14].

Наступний приклад показує, що в лемі 2 умову «X – простір Фреше – Урисона» не можна послабити до умови «X – секвенціальний простір».

Приклад 1. Нехай X – секвенціальний досконало нормальний простір з прикладу [4, **п**. 1.6.19], тобто $X = \{0\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, де $X_i = \{1/i\} \cup \bigcup\limits_{j=i^2}^{\infty} \{1/i + 1/j\}$. Тоді $X_i \bigcap X_k = \varnothing$ при $i \neq k$. Топологія на X породжується наступною системою околів. Всі точки $1/i + 1/j$ є ізольованими точками простору X. Для точок вигляду $1/i$ за сім'ю околів виберемо сім'ю всіх множин $X_i \setminus \bigcup\limits_{j=i^2}^{k} \{1/i + 1/j\}$ для $k = i^2, i^2 + 1, \ldots$. Нарешті, за елементи бази в точці 0 виберемо всі множини, отримані з X відкиданням скінченної кількості членів X_i і скінченної кількості точок вигляду $1/i + 1/j$ у всіх X_i, які залишились.

Приймемо, що $D = X \setminus \left(\{0\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{1/i\} \right)$ і $Y = X \setminus \{0\}$ та розглянемо відображення $f : D \to Y$ таке, що $f(x) = x$ для всіх точок $x \in D$.

Нехай $\{x_n\}$ – довільна послідовність точок з D, збіжна до точки $x \in X$. Легко показати, що $x \neq 0$. Оскільки відображення f є тотожнім на просторі D, то послідовність $\{f(x_n)\}$ теж збіжна до точки x в просторі Y.

Припустимо тепер, що існує неперервне продовження $\tilde{f} : X \to Y$ відображення f. Зафіксуємо довільне число $i \in \mathbb{N}$. Послідовність $\{1/i + 1/j : j \in$

$\in \mathbb{N},\ j \geq i^2\}$ збігається до точки $1/i \in X$. Тоді, згідно з лемою [4, **п**. 1.6.15], послідовність $\{\tilde{f}(1/i + 1/j) : j \in \mathbb{N},\ j \geq i^2\}$ збігається до точки $\tilde{f}(1/i)$. Але, оскільки ця послідовність має єдину границю в просторі Y, то $\tilde{f}(1/i) = 1/i$. Застосуємо лему [4, **п**. 1.6.15] до послідовності $\{1/i\} \subset X$. Отримаємо, що $\lim\{\tilde{f}(1/i)\} \supset \tilde{f}(\lim\{1/i\}) = \{\tilde{f}(0)\}$. Але це неможливо, оскільки послідовність $\{1/i\}$ не є збіжною в просторі Y. Ця суперечність показує, що не існує неперервного продовження відображення f на простір X. ◄

Наступна лема доведена у праці [4, **п**. 4.3.17].

Лема 3. *Нехай* (X, ρ) − *метричний простір,* (Y, σ) − *повний метричний простір,* D − *щільна підмножина простору* X. *Тоді кожне відображення* $f : D \to Y$, *рівномірно неперервне відносно* ρ *та* σ, *продовжується до відображення* $\tilde{f} : X \to Y$, *рівномірно неперервного відносно* ρ *та* σ.

Зауважимо, що існують неперервні функції, що задовольняють умови леми 2, але не є рівномірно неперервними. Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$, що діє зі всюди щільної підмножини $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$, продовжується на весь $\mathbb{R}_+$ та задовольняє умови леми 2, але не є рівномірно неперервною.

Нагадаємо, що лінійний топологічний простір X є простором Фреше, якщо X є метризовним повною метрикою локально опуклим простором. Відомо, що це означення еквівалентне до наявності на X зліченної системи напівнорм $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, які задають повну метрику ρ на X таким чином [3]:

$$\rho(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}. \tag{2}$$

Топологія, що породжується метрикою ρ на просторі X, є найслабшою топологією, відносно якої всі напівнорми p_n є неперервними. Базу околів нуля цієї топології утворює сім’я $\{U_{p_n}(0) : n \in \mathbb{N}\}$, де $U_{p_n}(0) = \{x \in X : p_k(x) < 1/n$ для всіх $1 \leq k \leq n\}$. При цьому послідовність $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ точок простору X прямує до точки $x_0 \in X$ тоді й лише тоді, коли для довільного $k \in \mathbb{N}$ послідовність $\{p_k(x_n - x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ прямує до нуля, коли n прямує до нескінченності. Для нормованого простору Y функція $f : X \to Y$ є неперервною в точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$, що прямує до x_0, послідовність $\{f(x_n)\} \subset Y$ прямує до $f(x_0)$.

Сформулюємо відоме твердження, необхідне для подальшого.

Твердження 1. *Нехай простір* X *є простором Фреше з системою напівнорм* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *а* Y − *банахів простір. Функція* $f : X \to Y$ *є неперервною в точці* $x_0 \in X$, *якщо існує* $k \in \mathbb{N}$ *таке, що* f *неперервна відносно напівнорми* p_k.

Зафіксуємо напівнорму p_n на X. Відомо, що $\ker p_n$ є замкненим лінійним підпростором. Позначимо через $\tilde{X}_n$ поповнення фактор простору $X/\ker p_n$. У випадку, коли p_n є нормами простору $X = X/\ker p_n$, то фактор норма співпадає з p_n.

Припустимо, що простір X є сепарабельним і для довільного X_n існує відділяючий поліном (відділяюча рівномірно аналітична функція). Чи буде випливати з цих умов, що кожна неперервна (рівномірно неперервна) функція апроксимується аналітичними функціями на X? Нижче даємо часткову відповідь на ці питання.

Теорема 2. *Нехай простір X є сепарабельним дійсним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, а Y − банахів простір. Нехай для довільного $n \in \mathbb{N}$ простір $X_n = (X, p_n)$ допускає відділяючий поліном. Тоді кожна функція $f : X \to Y$ наближається аналітичними функціями рівномірно на всьому X, якщо існує таке $k \in \mathbb{N}$, що для довільної фундаментальної послідовності точок $\{x_n\}$ в X_k послідовність $\{f(x_n)\} \subset \subset Y$ є збіжною.*

Д о в е д е н н я. Оскільки для довільної фундаментальної послідовності точок $\{x_n\}$ в X_k, послідовність $\{f(x_n)\} \subset Y$ є збіжною, то функція f є неперервною на просторі X_k, а, отже, за твердженням 1 і на просторі X. Зауважимо, що, якщо простір $X_k = (X, p_k)$ не є банаховим простором, то він неповний відносно норми p_k. Оскільки $\{p_n\}$ є системою норм, то для довільного $n \in \mathbb{N}$ носії просторів X_n та X співпадають. Поповнимо простір X_k відносно норми p_k до банахового простору $\tilde{X}_k$. Тоді, оскільки X_k є щільним в $\tilde{X}_k$ і X_k допускає відділяючий поліном, то $\tilde{X}_k$ теж допускає відділяючий поліном. З умов теореми, щільності X_k в X та за лемою 2, існує неперервне продовження $\tilde{f}$ відображення f на простір $\tilde{X}_k$. За теоремою 1 (Kurzweil), функція $\tilde{f}$ рівномірно наближається послідовністю аналітичних функцій $\{\tilde{f}_m\}$ на просторі $\tilde{X}_k$. Звуження f_m функції $\tilde{f}_m$ на простір X_k для довільного $m \in \mathbb{N}$ є аналітичним за означенням. Тому функція f рівномірно наближається послідовністю $\{f_m\}$ аналітичних функцій на просторі X_k. Легко бачити, що відображення f_m є аналітичним на просторі X, а, отже, функція f рівномірно наближається послідовністю $\{f_m\}$ аналітичних функцій на просторі X. ♦

Теорема 3. *Нехай простір X є сепарабельним дійсним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, а Y − банаховим простором. Нехай для довільного $n \in \mathbb{N}$, простір $X_n = (X, p_n)$ допускає рівномірно аналітичну і відділяючу функцію. Тоді кожна рівномірно неперервна функція $f : X \to Y$ наближається аналітичними функціями рівномірно на всьому X, якщо існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що f є рівномірно неперервною на X_k.*

Д о в е д е н н я цієї теореми є аналогічним до доведення попередньої теореми, тільки замість леми 2 використовуємо лему 3, а замість теореми 1 (Kurzweil) використовуємо основний результат M. C. Boiso і P. Hájek − теорему 1 з [5, с. 83]. ♦

Зауважимо, що у теоремі 3 вимогу рівномірної неперервності f можна опустити.

Аналогічно, спираючись на леми 2, 3 та результати роботи [2], можна довести дві наступні теореми.

Теорема 4. *Нехай простір* X *є сепарабельним комплексним простором Фреше зі зліченною системою норм* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *а* Y *− банахів простір. Нехай для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *простір* $X_n = (X, p_n)$ *допускає відділяючий* $*$*-поліном. Тоді кожна функція* $f : X \to Y$ *наближається* $*$*-аналітичними функціями рівномірно на всьому* X, *якщо існує* $k \in \mathbb{N}$ *таке, що для довільної фундаментальної послідовності точок* $\{x_n\}$ *в* X_k *послідовність* $\{f(x_n)\} \subset Y$ *є збіжною.*

Теорема 5. *Нехай простір* X *є сепарабельним комплексним простором Фреше, зі зліченною системою норм* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *а* Y *− банаховим простором. Нехай для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *простір* $X_n = (X, p_n)$ *допускає рівномірно* $*$*-аналітичну та відділяючу функцію. Тоді кожна рівномірно неперервна функція* $f : X \to Y$ *наближається* $*$*-аналітичними функціями рівномірно на всьому* X, *якщо існує* $k \in \mathbb{N}$ *таке, що* f *є рівномірно неперервною на* X_k.

Результати теорем 4 (2) можна узагальнити таким чином.

Зауваження 1. Нехай X та Y − такі простори, як у теоремах 4 (2). Через $C(X,Y)$ позначимо простір неперервних функцій з простору X у простір Y, наділений топологією рівномірної збіжності. Замикання $\overline{\tilde{H}(X,Y)}$ ($\overline{H(X,Y)}$) простору $\tilde{H}(X,Y)$ ($H(X,Y)$) у просторі $C(X,Y)$ − це лінійний простір всіх неперервних функцій з простору X у простір Y, які є рівномірно апроксимовними $*$- аналітичними (аналітичними) функціями з простору X у простір Y.

Нехай для всіх $k \in \mathbb{N}$ на просторі $X_k = (X, p_k)$ існує відділяючий поліном. Зафіксуємо довільний індекс $k \in \mathbb{N}$. Через $\tilde{C}(X_k, Y) \subset C(X,Y)$ позначимо лінійний простір неперервних функцій з простору X_k у простір Y, які продовжуються до неперервних функцій з поповнення $\tilde{X}_k$ нормованого простору X_k у простір Y. Згідно з теоремами 4 (2), $\tilde{C}(X_k, Y) \subset \overline{\tilde{H}(X,Y)}$ ($\tilde{C}(X_k, Y) \subset \overline{H(X,Y)}$). Через $\bar{C}(X,Y)$ позначимо замикання лінійного підпростору, породженого множиною $\bigcup \{\tilde{C}(X_k, Y) : k \in \mathbb{N}\}$, у просторі $C(X,Y)$. Тоді $\bar{C}(X,Y) \subset \overline{\tilde{H}(X,Y)}$ ($\bar{C}(X,Y) \subset \overline{H(X,Y)}$).

До наведеного у прикладі 4 праці [1, **п**. 3.5.3] зліченно гільбертового (не банахового) простору швидко спадних послідовностей з системою норм $\{\|x\|_k : k \in \mathbb{N}\}$, де $\|x\|_k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2 \right)^{1/2}$, можемо застосувати попередні теореми. Отже, в цій роботі знайдено нові простори, на яких неперервні функції певного вигляду допускають рівномірну апроксимацію аналітичними функціями.

Наступний приклад показує нетривіальність лінійного простору $\bar{C}(X,Y)$.

Приклад 2. Нехай X − простір Фреше, що не є банаховим, з топологією, заданою системою норм $\{p_n\}$. Нехай $f(x) = \rho(x, 0)$ для всіх $x \in X$, де ρ − метрика на просторі X, означена формулою (2). За побудовою, $f \in \bar{C}(X, \mathbb{R})$. Припустимо, що існує індекс $k \in \mathbb{N}$ такий, що $f \in \bar{C}(X_k, \mathbb{R})$.

Оскільки простір X не є банаховим, топологія Фреше на X строго сильніша від топології, заданої нормою p_k. Отже, існує таке число $\varepsilon > 0$, що множина $\{x \in X : \rho(x, 0) < \varepsilon\} = f^{-1}(-\infty, \varepsilon)$ не містить жодного відкритого в X_k околу нуля, що суперечить неперервності функції f на просторі X_k. ◄

Наведемо приклад, який показує суттєвість умови локальної опуклості для апроксимації неперервних функцій.

Приклад 3. Нехай X − це простір $L_p[0,1]$, де $0 < p < 1$. Метрику на X задаємо у наступний спосіб:

$$\rho(x, y) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Відомо, що відносно метрики ρ простір X є повним, але не локально опуклим. Зокрема, на цьому просторі не існує жодного ненульового лінійного неперервного функціоналу (див. [3, с. 44, 49]). Отже, на X не існує жодної аналітичної функції, відмінної від сталої (оскільки похідна Фреше аналітичної функції є лінійним неперервним функціоналом). З іншого боку, на X існують неперервні не сталі функції, наприклад, $F(f) = \rho(0, f)$, які, отже, не наближаються аналітичними функціями. ◄

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. − Москва: Наука, 1981. − 542 с.
2. *Митрофанов М. А.* Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах // Мат. заметки. − 2009. − **86**, вып. 4. − С. 557−570.
3. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. − Москва: Мир, 1971. − 360 с.
   Те саме: *Shaefer H. H.* Topological vector spaces. − Berlin: Springer, 1967. − 294 p.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. − Москва: Мир, 1986. − 752 с.
   Те саме: *Engelking R.* General topology. − Warszawa: PWN, 1977.
5. *Boiso M. C., Hájek P.* Analytic approximations of uniformly continuous functions in real Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. − 2001. − **256**. − P. 80−98.
6. *Kurzweil J.* On approximation in real Banach spaces // Studia Math. − 1954. − **14**. − P. 214−231.

АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Рассматривается аппроксимация аналитическими и $*$-аналитическими функциями непрерывных функций на счетно нормированных пространствах Фреше. Найден критерий существования продолжения непрерывной функции с всюду плотного подпространства топологического пространства на всё пространство.

APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON FRÉCHET SPACES

The approximation of continuous functions on the countable normed Fréchet space by analytic and $*$-analytic functions is considered. Besides the criterion of the existence of continuous function extension from a dense subspace of topological space onto the whole space is found.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 02.02.10