УДК 517.956

В. М. Лучко

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Розглянуто задачу Коші та задачу з імпульсною дією для параболічного псевдодиференціального рівняння вищого порядку за t. Для таких задач побудовано розв'язки, вивчено їхні властивості та доведено теорему про коректність.

Теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО) і псевдодиференціальних рівнянь (ПДР), яка в сучасній формі створена в середині 60-х років, є предметом багатьох досліджень [2–8, 11, 12]. Їх число значно збільшилося після того, як виявилося, що ПДО тісно пов'язані з важливими задачами аналізу та сучасної математичної фізики, особливо в теорії еліптичних крайових задач [10].

Лінійні параболічні псевдодиференціальні рівняння (ППДР) з негладкими символами були визначені С. Д. Ейдельманом, Я. М. Дрінем, C. Iwasaki на початку 70-х років у працях [2, 3, 8, 9, 11, 12]. Символи таких ПДО є негладкими в точці $\sigma = 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, і тому дослідження задач для таких ПДР не дозволяє застосувати стандартні числення ПДО, як це робилося для ПДО з гладкими символами. Дослідження таких рівнянь зі сталим (незалежним від просторових координат $x \in \mathbb{R}^n$ і часової координати $t \in (0,T]$) однорідним символом розпочате в [8]. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для цих рівнянь знаходили за допомогою перетворення Фур'є. Точну асимптотику фундаментального розв'язку задачі Коші при $x \to \infty$, яка не є експоненціальною, як для диференціальних рівнянь, а степеневою, встановлено М. В. Федорюком [7]. У праці [3] отримано шаудерівські оцінки і встановлено коректну розв'язність задачі Коші в класах гельдерових функцій.

Важливу роль у подальшому розвитку цієї теорії відіграли праці А. Н. Кочубея [4, 11], у яких вперше звернуто увагу на те, що ПДО з негладкими символами можна трактувати як гіперсингулярні інтегральні операції (ГСІО). Це дало можливість при дослідженні задачі Коші для таких рівнянь використати добре розвинену теорію ГСІО. А. Н. Кочубею вдалося побудувати і вивчити фундаментальні розв'язки задачі Коші, довести теореми про розв'язність задачі Коші в класах функцій з степеневим зростанням при $x \to \infty$ і вказати зв'язки одержаних результатів з теорією випадкових процесів.

1. Постановка модельної задачі Коші. Побудова фундаментальної системи розв'язків. У шарі $\Pi_T \equiv \{(t,x), t \in [0,T), x \in \mathbb{R}^n\}$ розглянемо рівняння довільного порядку

$$\frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} = Au(t,x) + f(t,x) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$\left.\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \qquad j = 1,\ldots,m\,. \tag{2}$$

Тут

$$Au(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)\frac{d^{k_0}V(t,\sigma)}{dt^{k_0}}\right), \qquad V(t,\sigma) = F_{x\to\sigma}u(t,x)\,,$$

$F_{x\to\sigma}$ та $F^{-1}_{\sigma\to x}$ – відповідно пряме та обернене перетворення Фур'є; $\sigma \in \mathbb{R}^n$; $\gamma \ge 1$; $k_0 < m$. Функції $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^m$ і $f(t,x)$ відомі та апріорі допускають перетворення Фур'є.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді

$$u(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[V(t,\sigma)]\,, \tag{3}$$

де $V(t,\sigma)$ є розв'язком задачі Коші звичайного диференціального рівняння, у якому σ вважаємо параметром:

$$\frac{d^m V(t,\sigma)}{dt^m} = \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)\frac{d^{k_0}V(t,\sigma)}{dt^{k_0}} + \tilde{f}(t,\sigma)\,, \tag{4}$$

$$\left.\frac{d^{j-1}V(t,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} = \tilde{\varphi}_j(\sigma)\,. \tag{5}$$

Розглянемо відповідне до (4) однорідне рівняння

$$\frac{d^m V(t,\sigma)}{dt^m} = \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)\frac{d^{k_0}V(t,\sigma)}{dt^{k_0}}\,. \tag{6}$$

Характеристичне рівняння для (6) буде мати вигляд

$$\lambda^m - \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)\lambda^{k_0} = 0\,, \tag{7}$$

а його корені позначимо через $\{\lambda_j(\sigma)\}_{j=1}^m$. Правильною є

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти* $P_{\nu k_0}(\sigma)$ *рівняння* (4) *мають* N *неперервних похідних за* σ *при* $\sigma \neq 0$, *тобто* $P_{\nu k_0}(\sigma) \in C^N(\mathbb{R}^n)$, *причому*

$$\left|D_\sigma^s P_{\nu k_0}(\sigma)\right| \le c_N\, |\sigma|^{\nu-|s|}\,,$$

$|s| \le N$, $k_0\gamma + \nu = m\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, *крім того,* $P_{\nu k_0}(\sigma)$ − *однорідні функції степеня* ν. *Тоді корені характеристичного рівняння* (7) *є однорідними функціями аргументу* σ *степеня* γ *і для їхніх похідних справджується нерівність*

$$\left|D_\sigma^s \lambda_j(\sigma)\right| \le c_N\, |\sigma|^{\gamma-|s|}\,. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Виберемо довільний корінь $\lambda_j(\sigma)$ рівняння (7) і запишемо тотожність

$$\lambda_j^m(\sigma) - \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)\lambda_j^{k_0}(\sigma) = 0\,. \tag{9}$$

Розглянемо тотожність (9) як функцію аргументу $r\sigma$:

$$\lambda_j^m(r\sigma) - \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(r\sigma)\lambda_j^{k_0}(r\sigma) = 0\,.$$

Поділимо ліву і праву частину цієї рівності на $r^{m\gamma}$ і з огляду на те, що $P_{\nu k_0}(\sigma)$ є однорідними функціями степеня ν, отримаємо

$$\left(\frac{\lambda_j(r\sigma)}{r^\gamma}\right)^m - \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)\left(\frac{\lambda_j(r\sigma)}{r^\gamma}\right)^{k_0} = 0\,. \tag{10}$$

З тотожностей (9) і (10) випливає, що множина коренів $\dfrac{\lambda_j(r\sigma)}{r^\gamma}$ співпадає з множиною коренів $\lambda_j(\sigma)$, тобто

$$\lambda_j(r\sigma) = r^\gamma \lambda_j(\sigma), \qquad j = 1,\dots,m\,.$$

Спочатку покажемо, що корені є диференційовними, а потім покажемо, що для них виконується оцінка (8). Продиференціюємо тотожність (9):

$$m\lambda_j^{m-1}(\sigma)D_\sigma(\lambda_j(\sigma)) - \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)k_0\lambda_j^{k_0-1}(\sigma)D_\sigma(\lambda_j(\sigma)) =$$

$$= \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} D_\sigma(P_{\nu k_0}(\sigma))\lambda_j^{k_0}(\sigma)\,,$$

звідки

$$D_\sigma(\lambda_j(\sigma)) = \frac{\sum\limits_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} D_\sigma(P_{\nu k_0}(\sigma))\lambda_j^{k_0}(\sigma)}{m\lambda_j^{m-1}(\sigma) - \sum\limits_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)k_0\lambda_j^{k_0-1}(\sigma)}\,.$$

За припущенням теореми коефіцієнти рівняння (4) диференційовні, а отже, диференційовною є ліва частина останньої рівності.

Для доведення нерівності (8) скористаємося формулами Вієта [5]:

$$\lambda_1(\sigma) + \ldots + \lambda_m(\sigma) = -P_{\nu,m-1}(\sigma).$$

Тоді

$$\left|D_\sigma^s(\lambda_j(\sigma))\right| \le \left|D_\sigma^s(\lambda_1(\sigma))\right| + \ldots + \left|D_\sigma^s(\lambda_m(\sigma))\right| \le \left|D_\sigma^s P_{\nu,m-1}(\sigma)\right| \le c_N\,|\sigma|^{\gamma-|s|},$$

оскільки $\nu = \gamma$ при $k_0 = m-1$. Теорему 1 доведено. ♦

Означення. Рівняння (1) будемо називати *параболічним,* якщо корені характеристичного рівняння (7) задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \le -a_0\,|\sigma|^\gamma, \qquad a_0 > 0, \qquad \sigma \in \mathbb{R}^n, \qquad j = 1,\ldots,m. \tag{11}$$

Позначимо через $\{K_j(t,\sigma)\}_{j=1}^m$ нормальну фундаментальну систему розв'язків рівняння (6), тобто систему, компоненти якої є розв'язками задачі Коші

$$\frac{d^m K_j(t,\sigma)}{dt^m} = \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)\frac{d^{k_0}K_j(t,\sigma)}{dt^{k_0}},$$

$$\left.\frac{d^{k-1}K_j(t,\sigma)}{dt^{k-1}}\right|_{t=0} = \delta_{k,j}, \qquad k,\, j = 1,\ldots,m, \tag{12}$$

а через $K(t-\tau,\sigma)$ позначимо функцію Ґріна задачі Коші

$$\frac{d^m K(t-\tau,\sigma)}{dt^m} = \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\sigma)\frac{d^{k_0}K(t-\tau,\sigma)}{dt^{k_0}},$$

$$\left.\frac{d^{k-1}K(t-\tau,\sigma)}{dt^{k-1}}\right|_{t=\tau} = \delta_{k,m}, \tag{13}$$

де $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера.

Побудуємо функції $\{K_j(t,\sigma)\}_{j=1}^m$, припускаючи для простоти, що корені $\{\lambda_j(\sigma)\}_{j=1}^m$ характеристичного рівняння (7) різні. Шукатимемо їх у вигляді

$$K_j(t,\sigma) = c_{1j}e^{\lambda_1(\sigma)t} + c_{2j}e^{\lambda_2(\sigma)t} + \ldots + c_{mj}e^{\lambda_m(\sigma)t}. \tag{14}$$

Задовольняючи умови (12), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно $c_{1j},\ldots,c_{mj}$. Знайшовши розв'язок цієї системи та підставивши його в (14), отримаємо зображення функцій $\{K_j(t,\sigma)\}_{j=1}^m$:

$$K_j(t,\sigma) = \frac{W_j^*(t,\sigma)}{W(\sigma)}. \tag{15}$$

Тут позначено

$$W(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1(\sigma) & \lambda_2(\sigma) & \ldots & \lambda_m(\sigma) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{j-1}(\sigma) & \lambda_2^{j-1}(\sigma) & \ldots & \lambda_m^{j-1}(\sigma) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{m-1}(\sigma) & \lambda_2^{m-1}(\sigma) & \ldots & \lambda_m^{m-1}(\sigma) \end{vmatrix},$$

$$W_j^*(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1(\sigma) & \lambda_2(\sigma) & \ldots & \lambda_m(\sigma) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{j-2}(\sigma) & \lambda_2^{j-2}(\sigma) & \ldots & \lambda_m^{j-2}(\sigma) \\ e^{\lambda_1(\sigma)t} & e^{\lambda_2(\sigma)t} & \ldots & e^{\lambda_m(\sigma)t} \\ \lambda_1^{j}(\sigma) & \lambda_2^{j}(\sigma) & \ldots & \lambda_m^{j}(\sigma) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{m-1}(\sigma) & \lambda_2^{m-1}(\sigma) & \ldots & \lambda_m^{m-1}(\sigma) \end{vmatrix}.$$

Подібними міркуваннями отримаємо зображення функції Ґріна $K(t-\tau,\sigma)$ задачі (13):

$$K(t-\tau,\sigma)=\frac{W_m^*(t-\tau,\sigma)}{W(t,\sigma)}.$$

Тоді розв'язок задачі (4), (5) можемо записати у вигляді

$$V(t,\sigma)=\sum_{j=1}^{m}K_j(t,\sigma)\tilde{\varphi}_j(\sigma)+\int_0^t K(t-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)\,d\tau\,. \tag{16}$$

Підставляючи (16) у (3) і використовуючи теорему про перетворення Фур'є згортки двох функцій, одержимо зображення розв'язку задачі (1), (2):

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n}G_j(t,x-\xi)\varphi_j(\xi)\,d\xi+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}G(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi\,, \tag{17}$$

де введено такі позначення:

$$G_j(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(\sigma,x)}K_j(t,\sigma)\,d\sigma,\qquad G(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(\sigma,x)}K(t,\sigma)\,d\sigma\,,$$

$$j=1,\ldots,m\,.$$

2. Лема про перетворення Фур'є компонент фундаментальної системи розв'язків і їхніх похідних. Сформулюємо та доведемо леми, які обґрунтовують операції при виведенні формули (17).

Лема 1. *Якщо* $P_{\nu k_0}\in C^N(\mathbb{R}^n)$, $k_0\gamma+\nu=m\gamma$, $N\ge 2n+[\gamma]+1$, *то для функцій* $\{G_j(t,x)\}_{j=1}^m$ *і* $G(t-\tau,x)$ *виконуються оцінки*

$$\left|G_j(t,x)\right|\le c_1\,\frac{t^j}{(t^{1/\gamma}+|x|)^{n+\gamma}}\,, \tag{18}$$

$$\left|G(t-\tau,x)\right|\le c_2\,\frac{(t-\tau)^m}{\left((t-\tau)^{1/\gamma}+|x|\right)^{n+\gamma}}\,, \tag{19}$$

де c_1, c_2 *не залежать від* t *та* x.

Для д о в е д е н н я застосуємо метод, запропонований у праці [4]. Розглянемо функції

$$G_j(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(\sigma,x)}K_j(t,\sigma)\,d\sigma,\qquad j=1,\ldots,m\,.$$

В інтегралі виконаємо заміну $\sigma=t^{-1/\gamma}\zeta$, $x=zt^{1/\gamma}$:

$$\Xi_j(t,z)=t^{-n/\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(\zeta,z)}K_j(t,t^{-1/\gamma}\zeta)\,d\zeta\,.$$

Нехай $\eta_0\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_0=\begin{cases}1, & |\zeta|\le 1,\\ 0, & |\zeta|\ge 2,\end{cases}$ і позначимо $\eta_1=1-\eta_0$. Тоді $\{\Xi_j(t,z)\}_{j=1}^m$ можемо подати у вигляді

$$\Xi_j(t,z)=t^{-n/\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\zeta)e^{i(\zeta,z)}K_j(t,t^{-1/\gamma}\zeta)\,d\zeta+t^{-n/\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}\eta_1(\zeta)e^{i(\zeta,z)}K_j(t,t^{-1/\gamma}\zeta)\,d\zeta\,.$$

Для подальшого дослідження введемо такі позначення:

$$h_{j,\ell}(a_j)=\ell!\,a_j^{-\ell}\left(e^{a_j}-1-a_j-\frac{a_j^2}{2!}-\ldots-\frac{a_j^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\right),$$

$$\tilde{W}_j^*(t^{1/\gamma}\sigma)=\begin{vmatrix}1 & \ldots & 1\\ \lambda_1(t^{1/\gamma}\sigma) & \ldots & \lambda_m(t^{1/\gamma}\sigma)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_1^{j-2}(t^{1/\gamma}\sigma) & \ldots & \lambda_m^{j-2}(t^{1/\gamma}\sigma)\\ \lambda_1^{j+1}(t^{1/\gamma}\sigma)h_{1,j+1}(\lambda_1(t^{1/\gamma}\sigma)) & \ldots & \lambda_m^{j+1}(t^{1/\gamma}\sigma)h_{m,j+1}(\lambda_m(t^{1/\gamma}\sigma))\\ \lambda_1^{j}(t^{1/\gamma}\sigma) & \ldots & \lambda_m^{j}(t^{1/\gamma}\sigma)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_1^{m-1}(t^{1/\gamma}\sigma) & \ldots & \lambda_m^{m-1}(t^{1/\gamma}\sigma)\end{vmatrix},$$

$$\tilde{W}_m(t^{1/\gamma}\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(t^{1/\gamma}\sigma) & \lambda_2(t^{1/\gamma}\sigma) & \dots & \lambda_m(t^{1/\gamma}\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{m-2}(t^{1/\gamma}\sigma) & \lambda_2^{m-2}(t^{1/\gamma}\sigma) & \dots & \lambda_m^{m-2}(t^{1/\gamma}\sigma) \\ \lambda_1^{m}(t^{1/\gamma}\sigma) & \lambda_2^{m}(t^{1/\gamma}\sigma) & \dots & \lambda_m^{m}(t^{1/\gamma}\sigma) \end{vmatrix}. \qquad (20)$$

Твердження 1. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді для функцій* $\{K_j(t,\sigma)\}_{j=1}^m$ *правильними є такі зображення*:

$$K_j(t,\sigma) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{t^{j-1}}{(j+1)!}\frac{\tilde{W}_j^*(t^{1/\gamma}\sigma)}{W(t^{1/\gamma}\sigma)}, \qquad j < m, \qquad (21)$$

$$K_m(t,\sigma) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{t^{m-1}}{m!}\frac{\tilde{W}_m(t^{1/\gamma}\sigma)}{W(t^{1/\gamma}\sigma)} + \frac{t^{m-1}}{(m+1)!}\frac{\tilde{W}_m^*(t^{1/\gamma}\sigma)}{W(t^{1/\gamma}\sigma)}, \qquad j = m. \qquad (22)$$

Для доведення будемо використовувати зображення функцій $\{K_j(t,\sigma)\}_{j=1}^m$ у вигляді (15). Для виразів $e^{\lambda_j(\sigma)t}$, що входять у визначник $W_j^*(t,\sigma)$, скористаємося розкладом

$$e^{\lambda_j(\sigma)t} = 1 + \lambda_j(\sigma)t + \frac{\lambda_j^2(\sigma)t^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda_j^{\ell-1}(\sigma)t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} + \frac{\lambda_j^{\ell}(\sigma)t^{\ell}}{\ell!}h_{j,\ell}(\lambda_j(\sigma)t), \qquad (23)$$

де $h_{j,\ell}$ означена у (20). Розглянемо випадок, коли $j < m$. Використаємо розклад (23) до степеня $\ell = j+1$. Тоді на місці кожного елемента $(j-1)$-го рядка визначника $W_j^*(t,\sigma)$ буде входити сума вигляду

$$1 + \lambda_j(\sigma)t + \frac{\lambda_j^2(\sigma)t^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda_j^{j-2}(\sigma)t^{j-2}}{(j-2)!} + \frac{\lambda_j^{j-1}(\sigma)t^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{\lambda_j^{j}(\sigma)t^{j}}{j!} + \\ + \frac{\lambda_j^{j+1}(\sigma)t^{j+1}}{(j+1)!}h_{j,j+1}(\lambda_j(\sigma)t).$$

Застосуємо властивість визначника: якщо всі елементи j-го рядка визначника n-го порядку подаються у вигляді суми двох доданків $a_{j\ell} = b_\ell + c_\ell$, $\ell = 1,\dots,n$, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких усі рядки, крім j-го, такі ж, як і в заданому визначнику, але j-й рядок у першому визначнику складається з елементів b_ℓ, у другому − з елементів c_ℓ. Причому ця рівність виконується, коли кількість доданків в j-му рядку ≥ 2 [5].

У розглядуваному випадку всі визначники, які містять $\lambda_j(\sigma)t$ у степенях $\leq j-2$ і j, перетворюються в нуль, оскільки $(j-1)$-й рядок пропорційний іншим рядкам. Визначник, який містить рядок з елементами $\left\{\frac{\lambda_j^{j-1}(\sigma)t^{j-1}}{(j-1)!}\right\}_{j=1}^m$, дорівнює $W(\sigma)\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$. Тому функції $\{K_j(t,\sigma)\}_{j=1}^{m-1}$ для $j < m$ будуть мати вигляд (21). У випадку, коли $j = m$, визначник, у який входять $\lambda_j(\sigma)t$ в m-му степені, відмінний від нуля, тому $K_m(t,\sigma)$ складається з трьох доданків.

Розглянемо визначник $W(\sigma)$. Оскільки згідно з теоремою 1 корені характеристичного рівняння (7) є однорідними функціями степеня γ, над ним можна виконати такі перетворення:

$$W(\sigma) = t^{-[1+\dots+(j-1)+\dots+(m-1)]}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t\lambda_1(\sigma) & t\lambda_2(\sigma) & \dots & t\lambda_m(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{j-1}\lambda_1^{j-1}(\sigma) & t^{j-1}\lambda_2^{j-1}(\sigma) & \dots & t^{j-1}\lambda_m^{j-1}(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{m-1}\lambda_1^{m-1}(\sigma) & t^{m-1}\lambda_2^{m-1}(\sigma) & \dots & t^{m-1}\lambda_m^{m-1}(\sigma) \end{vmatrix}.$$

Враховуючи, що

$$1 + \ldots + (j-1) + \ldots + (m-1) = \frac{(m-1)m}{2},$$

отримаємо

$$W(\sigma) = t^{-(m-1)m/2} W(t^{1/\gamma}\sigma).$$

Звідси випливає, що $W(\sigma)$ є однорідною функцією степеня $\frac{(m-1)m}{2}\gamma$. Виконуючи над $\tilde{W}_m(\sigma)$ аналогічні перетворення, маємо

$$\tilde{W}_m(\sigma) = t^{-(m-1)m/2-1} \tilde{W}_m(t^{1/\gamma}\sigma),$$

звідки випливає, що $\tilde{W}_m(\sigma)$ є однорідною функцією степеня $\frac{(m-1)m}{2}\gamma + \gamma$. Такими ж міркуваннями отримуємо

$$\tilde{W}_j^*(\sigma) = t^{-(m-1)m/2-2} \tilde{W}_j^*(t^{1/\gamma}\sigma).$$

Підставляючи отримані зображення для визначників $\tilde{W}_j^*(\sigma)$, $\tilde{W}_m(\sigma)$ і $W(\sigma)$, прийдемо до формул (21) і (22). Твердження доведено. ♦

Зауваження 1. Продиференціювавши k_0 разів за аргументом t, $k_0 \le m$, подання (15) для функції $\{K_j(t,\sigma)\}_{j=1}^m$ і скориставшись розкладом (23) до степеня $\ell = j + 1 - k_0$, аналогічними міркуваннями, як у твердженні 1, отримуємо зображення

$$D_t^{k_0} K_j(t,\sigma) = \frac{t^{j-1-k_0}}{(j-1-k_0)!} + \frac{t^{j-1-k_0}}{(j+1-k_0)!} \frac{\tilde{W}_{jk_0}^*(t^{1/\gamma}\sigma)}{W(t^{1/\gamma}\sigma)}, \qquad j < m, \tag{24}$$

$$D_t^{k_0} K_m(t,\sigma) = \frac{t^{m-1-k_0}}{(m-1-k_0)!} + \frac{t^{m-1-k_0}}{(m-k_0)!} \frac{\tilde{W}_{mk_0}(t^{1/\gamma}\sigma)}{W(t^{1/\gamma}\sigma)} +$$

$$+ \frac{t^{m-1-k_0}}{(m+1-k_0)!} \frac{\tilde{W}_{mk_0}^*(t^{1/\gamma}\sigma)}{W(t^{1/\gamma}\sigma)}, \qquad j = m. \tag{25}$$

Зауваження 2. Розглянемо визначник $W(\sigma)$. Нагадаємо, що він є однорідним степеня $\frac{(m-1)m}{2}\gamma$. Використаємо правило диференціювання визначників, що похідна від визначника дорівнює сумі визначників, у кожному з яких продиференційовано елементи відповідного рядка. Таким чином, використовуючи цю властивість та оцінку (8) для похідних від коренів $\lambda_i(\sigma)$, отримуємо

$$\left| D_\sigma^s W(\sigma) \right| \le c_N \, |\sigma|^{m(m-1)/2\gamma - |s|}.$$

Зауваження 3. Розкладемо визначник $\tilde{W}_j^*(\sigma)$ за елементами $(j-1)$-го рядка, тобто $\sum\limits_{\ell=1}^{m} \frac{\tilde{W}_{j\ell}^*(\sigma)\lambda_\ell^{j+1}(\sigma)}{W(\sigma)(j+1)!} h_{\ell,j+1}(\lambda_\ell(\sigma))$, де $\tilde{W}_{j\ell}^*(\sigma)$ – алгебраїчне доповнення елемента $\frac{\lambda_\ell^{j+1}(\sigma)}{(j+1)!} h_{\ell,j+1}(\lambda_\ell(\sigma))$. Згідно з теоремою 1 функція $\frac{\tilde{W}_{j\ell}^*(\sigma)\lambda_\ell^{j+1}(\sigma)}{W(\sigma)}$ є однорідною степеня 2γ і для неї справджується оцінка

$$\left| D_\sigma^s \frac{\tilde{W}_{j\ell}^*(\sigma)\lambda_\ell^{j+1}(\sigma)}{W(\sigma)} \right| \le c_N \, |\sigma|^{2\gamma - |s|}, \qquad |s| \le N, \qquad \sigma \ne 0. \tag{26}$$

Тоді функції $\{\Xi_j(t,z)\}_{j=1}^m$ набудуть вигляду

$$\Xi_j(t,z) = t^{-n/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)} \left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{t^{j-1}}{(j+1)!} \frac{\tilde{W}_j^*(\zeta)}{W(\zeta)} \right) d\zeta +$$

$$+ t^{-n/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\zeta) e^{i(\zeta,z)} \left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{t^{j-1}}{(j+1)!} \frac{\tilde{W}_j^*(\zeta)}{W(\zeta)} \right) d\zeta \equiv \Xi_j^0(t,z) + \Xi_j^1(t,z),$$

$$\Xi_m(t,z) = t^{-n/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)} \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{t^{m-1}}{m!} \frac{\tilde{W}_m(\zeta)}{W(\zeta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{t^{m-1}}{(m+1)!} \frac{\tilde{W}_m^*(\zeta)}{W(\zeta)} \right) d\zeta + t^{-n/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\zeta) e^{i(\zeta,z)} \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{t^{m-1}}{m!} \frac{\tilde{W}_m(\zeta)}{W(\zeta)} + \frac{t^{m-1}}{(m+1)!} \frac{\tilde{W}_m^*(\zeta)}{W(\zeta)} \right) d\zeta \equiv \Xi_m^0(t,z) + \Xi_m^1(t,z).$$

Розглянемо функції

$$\Xi_j^0(t,z) = \frac{t^{j-1-n/\gamma}}{(j-1)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)}\, d\zeta + \frac{t^{j-1-n/\gamma}}{(j+1)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)} \frac{\tilde{W}_j^*(\zeta)}{W(\zeta)}\, d\zeta \equiv$$

$$\equiv \Xi_j^{0,1}(t,z) + \Xi_j^{0,3}(t,z),$$

$$\Xi_m^0(t,z) = \frac{t^{m-1-n/\gamma}}{(m-1)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)}\, d\zeta + \frac{t^{m-1-n/\gamma}}{m!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)} \frac{\tilde{W}_m(\zeta)}{W(\zeta)}\, d\zeta +$$

$$+ \frac{t^{m-1-n/\gamma}}{(m+1)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)} \frac{\tilde{W}_m^*(\zeta)}{W(\zeta)}\, d\zeta \equiv \Xi_m^{0,1}(t,z) + \Xi_m^{0,2}(t,z) + \Xi_m^{0,3}(t,z).$$

Оскільки η_0 − фінітна нескінченно диференційовна функція, то, виконуючи над функціями $\{\Xi_j^{0,1}(t,z)\}_{j=1}^m$ перетворення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)}\, d\zeta = \frac{1}{iz} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta)\, d(e^{i(\zeta,z)}) = \frac{1}{iz} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0'(\zeta) e^{i(\zeta,z)}\, d\zeta,$$

можна добитися бажаної оцінки.

Будемо використовувати результат твердження 1 про те, що функція $\omega(\zeta) = \dfrac{\tilde{W}_m(\zeta)}{W(\zeta)}$ є однорідною степеня γ. Нехай $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(z) = 0$ для $|z| \le 1$ і $\psi(z) = \varphi(-z)$. Тоді

$$\left\langle \Xi_m^{0,2}(t,\cdot), \varphi \right\rangle = t^{m-1-n/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)} \omega(\zeta) \varphi(z)\, d\zeta\, dz =$$

$$= t^{m-1-n/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta) e^{i(\zeta,z)} \omega(\zeta) \tilde{\psi}(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= t^{m-1-n/\gamma} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(\zeta) \tilde{\psi}(\zeta)\, d\zeta - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\zeta) \omega(\zeta) \tilde{\psi}(\zeta)\, d\zeta \right) =$$

$$= t^{m-1-n/\gamma} \left(\langle \tilde{\omega}(\cdot), \psi \rangle - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\zeta) \omega(\zeta)\, d\zeta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (L^N e^{i(\zeta,z)}) \varphi(z)\, dz \right),$$

де $\tilde{\omega}$ − перетворення Фур'є ω у сенсі узагальнених функцій із $S'(\mathbb{R}^n)$, $L = -i|z|^{-2} \sum\limits_{k=1}^n z_k \dfrac{\partial}{\partial \zeta_k}$, $Le^{i(\zeta,z)} = e^{i(\zeta,z)}$ [7]. Розкладемо функцію $\omega(\zeta)$, $|\zeta| = 1$, у ряд за сферичними гармоніками: $\omega(\zeta) = \sum\limits_{\ell=0}^\infty \sum\limits_{\mu=1}^{\delta_\ell} Y_{\ell\mu}(\zeta)$. Тоді для всіх $|\zeta| \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \ne 0$, маємо

$$\omega(\zeta) = |\zeta|^\gamma \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{\mu=1}^{\delta\ell} Y_{\ell\mu}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right).$$

Оскільки [6] перетворенням Фур'є функції $|\zeta|^\gamma\, Y_{\ell\mu}\left(\dfrac{\zeta}{|\zeta|}\right)$ є

$$(-i)^\ell 2^{n+\gamma} \pi^{n/2} \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+\ell+\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\ell-\gamma}{2}\right)} \frac{Y_{\ell\mu}\left(\dfrac{z}{|z|}\right)}{|z|^{n+\gamma}}, \qquad \ell - \gamma \ne 0, -2, -4, \dots,$$

то при $|z| \ge 1$ отримуємо оцінку

$$|\tilde{\omega}(z)| \le c|z|^{-n-\gamma}.$$

Враховуючи, що $\eta_1(\zeta) = 0$ для $|\zeta| \le 1$, після інтегрування частинами отримуємо

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_1(\zeta)\omega(\zeta)\,d\zeta \int_{\mathbb{R}^n} (L^N e^{i(\zeta,z)})\varphi(z)\,dz =$$

$$= i^N \sum_{|s|=N} \int_{\mathbb{R}^n} D_\zeta^s[\eta_1(\zeta)\omega(\zeta)]\,d\zeta \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{-2N} z^s e^{i(\zeta,z)}\varphi(z)\,dz.$$

Зрозуміло, що $D_\zeta^s[\eta_1(\zeta)\omega(\zeta)] = \eta_1(\zeta)D_\zeta^s\omega(\zeta) + R(\zeta)$, де $R(\zeta) = 0$ для $|\zeta| \le 1$ і $|\zeta| \ge 2$. Функція $D_\zeta^s\omega(\zeta)$ є однорідною функцією степеня $\gamma - N < -n$. Тоді за теоремою Фубіні

$$\left\langle \Xi_m^{0,2}(t,\cdot),\varphi \right\rangle = t^{m-1-n/\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\omega}(-z)\varphi(z)\,dz - t^{m-1-n/\gamma} i^N \sum_{|s|=N} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} [\eta_1(\zeta)D_\zeta^s\omega(\zeta) + \right.$$

$$\left. + R(\zeta)]e^{i(\zeta,z)}\,d\zeta \right\} |z|^{-2N} z^s \varphi(z)\,dz,$$

звідки для $|z| \ge 1$

$$\Xi_m^{0,2}(t,z) = t^{m-1-n/\gamma}\tilde{\omega}(-z) - t^{m-1-n/\gamma} i^N |z|^{-2N} \sum_{|s|=N} z^s \int_{\mathbb{R}^n} [\eta_1(\zeta)D_\zeta^s\omega(\zeta) + R(\zeta)]e^{i(\zeta,z)}\,d\zeta.$$

Враховуючи оцінку для $\tilde{\omega}(z)$, отримаємо

$$\left|\Xi_m^{0,2}(t,z)\right| \le c \cdot t^{m-1-n/\gamma}|z|^{-n-\gamma}, \qquad |z| \ge 1.$$

Оцінимо $\Xi_j^{0,3}(t,z)$, $|z| \ge 1$, $j = 1,\ldots,m$. Нагадаємо, що згідно з зауваженням 3 функції $\dfrac{\tilde{W}_{j\ell}^*(\zeta)}{W(\zeta)}\lambda_\ell^{j+1}(\zeta)$ є однорідними степеня 2γ.

Нехай $z = (z_1,\ldots,z_n)$. Розглянемо номер p такий, що $|z_p| \ge |z_k|$, $k = 1,\ldots,n$. Тоді $|z| \le \sqrt{n}\,|z_p|$. В інтегралі функції $\Xi_j^{0,3}(t,z)$ виконаємо $N = n + [\gamma] + 1$ разів інтегрування частинами за змінною ζ_p:

$$\Xi_j^{0,3}(t,z) = t^{j-1-n/\gamma} \sum_{\ell=1}^m \frac{(-1)^N}{(iz_p)^N} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\zeta,z)} \times$$

$$\times \frac{\partial^N}{\partial\zeta_p^N} \left\{ \eta_0(\zeta) \frac{\tilde{W}_{j\ell}^*(\zeta)}{W(\zeta)} \frac{\lambda_\ell^{j+1}(\zeta)}{(j+1)!} \right\} h_{\ell,j+1}(\lambda_\ell(\zeta))\,d\zeta.$$

Оскільки $\eta_0(\zeta)$ при $|\zeta| \ge 2$ фінітна, то всі доданки, які виникають при диференціюванні, що містять похідні від $\eta_0(\zeta)$, є фінітними і неперервними.

Далі знайдемо похідну

$$\frac{\partial^N}{\partial\zeta_p^N} \left\{ \frac{\tilde{W}_{j\ell}^*(\zeta)}{W(\zeta)} \frac{\lambda_\ell^{j+1}(\zeta)}{(j+1)!} h_{\ell,j+1}(\lambda_\ell(\zeta)) \right\} \equiv \frac{\partial^N}{\partial\zeta_p^N} \left\{ a(\zeta) h_{\ell,j+1}(\lambda_\ell(\zeta)) \right\}.$$

Використовуючи формулу Лейбніца та формулу Фаа де Бруно для похідної вищого порядку від складеної функції [1], можна обчислити, що максимальний порядок особливості в точці $\zeta = 0$ дорівнює $n + [\gamma] + 1 - 2\gamma$. Таким чином, при $|z| \ge 1$ отримуємо

$$\left|\Xi_j^{0,3}(t,z)\right| \le ct^{j-1-n/\gamma}|z_p|^{-N} \le ct^{j-1-n/\gamma}|z|^{-n-\gamma}.$$

Функцію $\Xi_j^1(t,z)$ оцінюємо так само, як і функцію $\Xi_j^{0,3}(t,z)$. Враховуючи те, що $\eta_1(\zeta) = 0$ при $|\zeta| \le 1$, при $|z| \ge 1$ отримуємо

$$\left|\Xi_j^1(t,z)\right| \le ct^{j-1-n/\gamma}|z|^{-n-\gamma}.$$

Для знаходження оцінок функцій $\left\{\Xi_j(t,z)\right\}_{j=1}^m$ при $|z| \le 1$ скористаємося зображенням (15). Подамо функції $\{\Xi_j(t,z)\}_{j=1}^m$ у вигляді

$$\Xi_j(t,z) = t^{j-1-n/\gamma} \int\limits_{|\zeta|\le 1} e^{i(\zeta,z)} \frac{W_j^*(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta + t^{j-1-n/\gamma} \int\limits_{|\zeta|\ge 1} e^{i(\zeta,z)} \frac{W_j^*(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta \equiv$$

$$\equiv \Xi_{1j}(t,z) + \Xi_{2j}(t,z).$$

Таким чином, при $|z| \le 1$ маємо оцінку

$$\left|\Xi_{1j}(t,z)\right| \le c \cdot t^{j-1-n/\gamma} \int\limits_{|\zeta|\le 1} \left|\frac{W_j^*(\zeta)}{W(\zeta)}\right| d\zeta \le c_1 \frac{t^{j-1-n/\gamma}}{(1+|z|^N)}, \quad c_1 = c \cdot 2^N \int\limits_{|\zeta|\le 1} \left|\frac{W_j^*(\zeta)}{W(\zeta)}\right| d\zeta.$$

Аналогічно отримуємо оцінку

$$\left|\Xi_{2j}(t,z)\right| \le c \cdot t^{j-1-n/\gamma} \int\limits_{|\zeta|\ge 1} e^{-a_0|\zeta|^\gamma} d\zeta \le c_2 \frac{t^{j-1-n/\gamma}}{(1+|z|^N)}, \quad c_2 = c \cdot 2^N \int\limits_{|\zeta|\ge 1} e^{-a_0|\zeta|^\gamma} d\zeta.$$

Враховуючи встановлені оцінки для функцій $\Xi_j(t,z)$ і заміну $z = xt^{-1/\gamma}$, отримуємо (18). Повторюючи міркування леми для $G(t-\tau,x)$, отримуємо оцінку (19). Лему 1 доведено. ♦

Лема 2. *Для похідних функцій* $\{G_j(t,x)\}_{j=1}^m$ *і* $G(t-\tau,x)$ *виконуються оцінки*

$$\left|D_t^{k_0} G_j(t,x)\right| \le c_1 \frac{t^{j-1}}{(t^{1/\gamma}+|x|)^{n+\gamma k_0}}, \tag{27}$$

$$\left|D_t^{k_0} G(t-\tau,x)\right| \le c_2 \frac{(t-\tau)^{m-1}}{((t-\tau)^{1/\gamma}+|x|)^{n+\gamma k_0}}, \qquad k_0 \ge 1. \tag{28}$$

Для д о в е д е н н я використовуємо зауваження 1. Оцінки (27) та (28) отримуємо, повторюючи міркування леми 1. ♦

Зауваження 4. У випадку кратних коренів функції $\{K_j(t,\sigma)\}_{j=1}^m$ треба шукати у вигляді

$$K_j(t,\sigma) = \sum_{\ell=1}^m c_{j\ell} t^{r_\ell - 1} e^{\lambda_\ell(\sigma)t},$$

де r_j – кратність кореня $\lambda_j(\sigma)$, причому $\sum\limits_{j=1}^m r_j = m$.

3. Коректна розв'язність задачі Коші.

Теорема 2. *Нехай символи* $P_{\nu k_0}(\sigma)$ *належать класу* $C^N(\mathbb{R}^n)$, $N \ge 2n + [\gamma] + 1$, *рівняння* (1) *є параболічним, тобто виконується умова* (11). *Тоді для довільних функцій* $\varphi_j \in C(\mathbb{R}^n)$, $j = 1,\dots,m$, *і* $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi_T)$ *розв'язок задачі* (1), (2) *визначається формулою* (17) *і для його похідних справджується нерівність*

$$\left|D_t^{k_0} u(t,x)\right| \le c\left(\sum_{j=1}^m t^{j-1-k_0} \left\|\varphi_j\right\|_C + \|f\|_{C^{(\alpha)}}\right), \qquad k_0 \le m.$$

Д о в е д е н н я. Позначимо

$$u_1(t,x) = \sum_{j=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(t,x-\xi)\varphi_j(\xi)\,d\xi, \qquad u_2(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\xi) f(\tau,\xi)\,d\xi.$$

Враховуючи (18), (27), отримаємо оцінки похідних функції $u_1(t,x)$ при $k_0 \ge 1$:

$$\left|D_t^{k_0} u_1(t,x)\right| \le c \sum_{j=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(\xi)| \frac{t^{j-1}}{(t^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{n+\gamma k_0}} d\xi. \tag{29}$$

У випадку $k_0 = 0$ будемо мати

$$|u_1(t,x)| \le c \sum_{j=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(\xi)| \frac{t^j}{(t^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{n+\gamma}} d\xi.$$

В інтегралі формули (29) зробимо заміну

$$z = \frac{x-\xi}{t^{1/\gamma}} \tag{*}$$

і будемо припускати, що функції $\{\varphi_j(\xi)\}_{j=1}^m$ є неперервними та обмеженими, тобто належать до класу $C(\mathbb{R}^n)$. Тоді оцінка (29) набуде вигляду

$$\left|D_t^{k_0} u_1(t,x)\right| \le c\sum_{j=1}^m \left\|\varphi_j\right\|_C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^{j-1}}{(t^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{n+\gamma k_0}}\, d\xi \le$$

$$\le c\sum_{j=1}^m \left\|\varphi_j\right\|_C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^{j-1-k_0}}{\left(1+\dfrac{|x-\xi|}{t^{1/\gamma}}\right)^{n+\gamma k_0}}\, d\left(\frac{x-\xi}{t^{1/\gamma}}\right) \le$$

$$\le c\sum_{j=1}^m t^{j-1-k_0} \left\|\varphi_j\right\|_C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|z|)^{n+\gamma k_0}}\, dz \le c_1 \sum_{j=1}^m t^{j-1-k_0} \left\|\varphi_j\right\|_C, \quad k_0 \ge 1 .$$

Аналогічно, використовуючи (19), (28), отримуємо оцінки похідних від функції $u_2(t,x)$:

$$\left|D_t^{k_0} u_2(t,x)\right| \le c\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |f(\tau,\xi)| \frac{(t-\tau)^{m-1}}{((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{n+\gamma k_0}}\, d\xi .$$

В останньому інтегралі зробимо заміну (*) і припустимо, що $f \in C(\Pi_T)$. Тоді отримаємо

$$\left|D_t^{k_0} u_2(t,x)\right| \le c\|f\|_C \int_0^t (t-\tau)^{m-k_0-1}\, d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |f(\tau,\xi)| \frac{1}{(1+|z|)^{n+\gamma k_0}}\, d\xi .$$

З цієї нерівності випливає, що інтеграл за τ збіжний тільки при $k_0 < m$, а це означає, що похідні за t до $(m-1)$-го порядку можна одержати безпосереднім диференціюванням. Покажемо, що при підвищенні гладкості в умові Гельдера для функції $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi_T)$ існує старша похідна, яка буде обчислюватися за допомогою спеціальної формули, тобто проведемо регуляризацію розбіжного інтеграла. Нехай $f(t,x)$ задовольняє умову Гельдера за змінною x:

$$|f(t,x)-f(t,y)| \le c\cdot|x-y|^\alpha, \qquad \alpha \in (0,1).$$

Тоді старша похідна обчислюється за формулою

$$D_t^m u_2(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} [f(\tau,\xi)-f(\tau,x)] D_t^m G(t-\tau, x-\xi)\, d\xi + f(t,x).$$

Для знаходження старшої похідної $D_t^m u_2(t,x)$ досить довести, що

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x-\xi)\, d\xi = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Розглянемо ліву частину цієї рівності та виконаємо такі перетворення:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,\xi)} K(t,\sigma)\, d\sigma\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} K(t,\sigma)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,\xi)} 1\, d\xi\right) d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} K(t,\sigma)\delta(\sigma)\, d\sigma = \lim_{\sigma\to 0} K(t,\sigma) \equiv K(t,0),$$

де $\delta(\sigma)$ − дельта-функція Дірака.

Для знаходження $K(t,0)$ використаємо зображення експоненти

$$e^{\lambda_j(\sigma)t} = 1 + \lambda_j(\sigma)t + \frac{\lambda_j^2(\sigma)t^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda_j^{m-1}(\sigma)t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\lambda_j^m(\sigma)t^m}{m!} h_{j,m}(\lambda_j(\sigma)t).$$

З огляду на зображення (22) функцію $K(t,\sigma)$ можемо подати у вигляді

$$K(t,\sigma) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{t^{m-1}}{m!}\frac{\tilde{W}_m(t^{1/\gamma}\sigma)}{W(t^{1/\gamma}\sigma)} + \frac{t^{m-1}}{(m+1)!}\frac{\tilde{W}_m^*(t^{1/\gamma}\sigma)}{W(t^{1/\gamma}\sigma)}.$$

Оскільки $\dfrac{\tilde{W}_m^*(\sigma)}{W(\sigma)}$ є однорідною функцією степеня γ, то, використовуючи це зображення, отримуємо

$$\lim_{\sigma\to 0} K(t,\sigma) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!},$$

тобто

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-\xi)\, d\xi = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Тепер розглянемо функцію

$$u_2^{(h)}(t,x) = \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi.$$

Продиференціювавши цю рівність m разів за t та скориставшись властивістю функції $G(t, x-\xi)$, одержимо

$$D_t^m u_2^{(h)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G(h, x-\xi) f(t-h,\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} D_t^m G(t-\tau, x-\xi)[f(\tau,\xi) - f(\tau,x)]\, d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-h} f(\tau,x)\, d\tau \int_{\mathbb{R}^n} D_t^m G(t-\tau, x-\xi)\, d\xi.$$

Зауважимо, що перший доданок цього виразу отримуємо при диференціюванні за верхньою межею. Розглянемо інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G(h, x-\xi) f(t-h,\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G(h, x-\xi)\, d\xi \cdot f(t-h,x) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G(h, x-\xi)[f(t-h,\xi) - f(t-h,x)]\, d\xi.$$

Для фіксованого x при $h \to 0$ рівномірно за t перший доданок прямує до $f(t,x)$ згідно з властивостями δ-подібності функції $D_t^{m-1} G(t-\tau, x-\xi)$, а другий доданок оцінюємо з використанням умови, що $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi_T)$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{m-1} G(h, x-\xi)[f(t-h,\xi) - f(t-h,x)]\, d\xi \right| \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |x-\xi|^\alpha \frac{h^{m-1}}{(h^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{n+\gamma(m-1)}}\, d\xi \le$$

$$\le c \int_{\mathbb{R}^n} |x-\xi|^\alpha \frac{h^{-n/\gamma}}{\left(1 + \dfrac{|x-\xi|}{h^{1/\gamma}}\right)^{n+\gamma(m-1)}}\, d\xi =$$

$$= c|h|^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |z|^\alpha \frac{1}{(1+|z|)^{n+\gamma(m-1)}}\, dz \le c_1 |h|^\alpha,$$

тому при $h \to 0$ він прямує до нуля. Теорему 2 доведено. ♦

4. Задача Коші з імпульсною дією. У шарі Π_T розглянемо задачу Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння довільного порядку

$$\frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} = Au(t,x) + f(t,x) \tag{30}$$

з початковими умовами

$$\left. \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=0} = \varphi_j(x), \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{31}$$

та імпульсними умовами

$$u(\tau_\ell+0,x)-u(\tau_\ell-0,x)=B_\ell^{(0)}u(\tau_\ell-0,x)\,,$$
$$u_t'(\tau_\ell+0,x)-u_t'(\tau_\ell-0,x)=B_\ell^{(1)}u_t'(\tau_\ell-0,x)\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$
$$u_t^{(m-1)}(\tau_\ell+0,x)-u_t^{(m-1)}(\tau_\ell-0,x)=B_\ell^{(m-1)}u_t^{(m-1)}(\tau_\ell-0,x)\,, \tag{32}$$
де $Au(t,x)$ означена так само, як і в **п. 1**; $B_\ell^{(k)}$ – сталі; $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_\ell<\ldots$ $\ldots<\tau_p<T$; $\ell=1,\ldots,p$.

Розв'язок задачі (30)–(32) будемо шукати у вигляді
$$u(t,x)=F^{-1}_{\sigma\to x}[V(t,\sigma)]\,, \tag{33}$$
де $V(t,\sigma)$ – розв'язок задачі Коші з імпульсною дією для звичайного диференціального рівняння, в якому σ вважаємо параметром:
$$\frac{d^mV(t,\sigma)}{dt^m}=\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma}P_{\nu k_0}(\sigma)\frac{d^{k_0}V(t,\sigma)}{dt^{k_0}}+\tilde f(t,\sigma)\,, \tag{34}$$
$$\left.\frac{d^{j-1}V(t,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=0}=\tilde\varphi_j(\sigma)\,, \tag{35}$$
$$V_t^{(j-1)}(\tau_\ell+0,\sigma)-V_t^{(j-1)}(\tau_\ell-0,\sigma)=B_\ell^{(j-1)}V_t^{(j-1)}(\tau_\ell-0,\sigma),\qquad j=1,\ldots,m\,. \tag{36}$$
Нехай $K(t,\tau_\ell,\sigma)=\{K_1(t,\tau_\ell,\sigma),\ldots,K_m(t,\tau_\ell,\sigma)\}$, $\tau_\ell<t<\tau_{\ell+1}$, – нормальна фундаментальна система розв'язків задачі Коші
$$\frac{d^mK_j(t,\tau_\ell,\sigma)}{dt^m}=\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma}P_{\nu k_0}(\sigma)\frac{d^{k_0}K_j(t,\tau_\ell,\sigma)}{dt^{k_0}}\,,$$
$$D_t^sK_j(t,\tau_\ell,\sigma)\Big|_{t=\tau_\ell+0}=\delta_{j-1,s}\,,\qquad s=1,\ldots,m-1\,.$$
Компоненти такої фундаментальної системи побудовано в **п. 1** і зображуються формулою (21).

Виведемо формулу, за допомогою якої будемо визначати розв'язок задачі (34)–(36) на кожному з проміжків $\tau_\ell<t<\tau_{\ell+1}$. Спочатку розглянемо проміжок (τ_0,τ_1), на якому розв'язок рівняння (34) визначається формулою
$$V(t,\sigma)=K(t,\tau_0,\sigma)\cdot c+\int_{\tau_0}^{t}K(t-\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\tau\,,$$
c – вектор-стовпчик, а за умов (35) розв'язок подається у вигляді
$$V(t,\sigma)=K(t,\tau_0,\sigma)\tilde\varphi(\sigma)+\int_{\tau_0}^{t}K(t-\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\tau\,.$$
Тут позначено $\tilde\varphi(\sigma)=(\tilde\varphi_j(\sigma))_{j=1}^m$.

На проміжку (τ_1,τ_2) розв'язок рівняння (34) має вигляд
$$V(t,\sigma)=K(t,\tau_1,\sigma)\cdot c+\int_{\tau_1}^{t}K(t-\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\tau\,. \tag{37}$$
Задовольняючи умови (36), визначаємо c_j:
$$c_j=\left(1+B_1^{(j-1)}\right)K_1^{(j-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde\varphi_1(\sigma)+\ldots+\left(1+B_1^{(j-1)}\right)K_1^{(j-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde\varphi_m(\sigma)+$$
$$+\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(1+B_1^{(j-1)}\right)K^{(j-1)}(\tau_1-\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\tau\,.$$
Підставляючи знайдені величини $c_1,\ldots,c_m$ у (37), отримаємо
$$V(t,\sigma)=K_1(t,\tau_1,\sigma)\Big[\left(1+B_1^{(0)}\right)K_1(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde\varphi_1(\sigma)+\ldots+\left(1+B_1^{(0)}\right)K_m(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde\varphi_m(\sigma)+$$
$$+\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(1+B_1^{(0)}\right)K(\tau_1-\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\tau\Big]+$$

$$+ K_2(t,\tau_1,\sigma)\Big[\big(1 + B_1^{(1)}\big)K_1'(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_1(\sigma) + \ldots +$$

$$+ \big(1 + B_1^{(1)}\big)K_m'(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_m(\sigma) +$$

$$+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \big(1 + B_1^{(1)}\big)K'(\tau_1 - \tau,\sigma) f(\tau,\sigma)\, d\tau\Big] + \ldots +$$

$$+ K_m(t,\tau_1,\sigma)\Big[\big(1 + B_1^{(m-1)}\big)K_1^{(m-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_1(\sigma) + \ldots +$$

$$+ \big(1 + B_1^{(m-1)}\big)K_m^{(m-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_m(\sigma) +$$

$$+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \big(1 + B_1^{(m-1)}\big)K^{(m-1)}(\tau_1 - \tau,\sigma) f(\tau,\sigma)\, d\tau\Big] + \int_{\tau_1}^{t} K(t-\tau,\sigma) f(\tau,\sigma)\, d\tau .$$

Згрупувавши доданки біля функцій $\tilde{\varphi}_1(\sigma),\ldots,\tilde{\varphi}_m(\sigma)$, будемо мати таке подання розв'язку:

$$V(t,\sigma) = \tilde{\varphi}_1(\sigma)\big[K_1(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(0)}\big)K_1(\tau_1,\tau_0,\sigma) + K_2(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(1)}\big)\times$$

$$\times K_1'(\tau_1,\tau_0,\sigma) + \ldots + K_m(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(m-1)}\big)K_1^{(m-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\big] + \ldots +$$

$$+ \tilde{\varphi}_m(\sigma)\big[K_1(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(0)}\big)K_m(\tau_1,\tau_0,\sigma) + K_2(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(1)}\big)\times$$

$$\times K_m'(\tau_1,\tau_0,\sigma) + \ldots + K_m(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(m-1)}\big)K_m^{(m-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\big] +$$

$$+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau,\sigma)\big[K_1(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(0)}\big)K(\tau_1-\tau,\sigma) + K_2(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(1)}\big)\times$$

$$\times K'(\tau_1-\tau,\sigma) + \ldots + K_m(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(m-1)}\big)K^{(m-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\big]\, d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} K(t-\tau,\sigma) f(\tau,\sigma)\, d\tau$$

або

$$V(t,\sigma) = \tilde{\varphi}_1(\sigma)\sum_{j_1=1}^{m} K_{j_1}(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(j_1-1)}\big)K_1^{(j_1-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma) + \ldots +$$

$$+ \tilde{\varphi}_m(\sigma)\sum_{j_1=1}^{m} K_{j_1}(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(j_1-1)}\big)K_m^{(j_1-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma) +$$

$$+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau,\sigma)\sum_{j_1=1}^{m} K_{j_1}(t,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(j_1-1)}\big)K^{(j_1-1)}(\tau_1-\tau,\tau_0,\sigma)\, d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} K(t-\tau,\sigma) f(\tau,\sigma)\, d\tau .$$

Продовжуючи аналогічні міркування, розв'язок задачі (34)−(36) на проміжку $t \in (\tau_p,\tau_{p+1})$ можемо записати у вигляді

$$V(t,\sigma) = \tilde{\varphi}_1(\sigma)\sum_{j_p=1}^{m} K_{j_p}(t,\tau_p,\sigma)\big(1 + B_p^{(j_p-1)}\big)\ldots\sum_{j_2=1}^{m} K_{j_2}^{(j_3-1)}(\tau_3,\tau_2,\sigma)\times$$

$$\times\big(1 + B_2^{(j_2-1)}\big)\sum_{j_1=1}^{m} K_{j_1}^{(j_2-1)}(\tau_2,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(j_1-1)}\big)K_1^{(j_1-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma) + \ldots +$$

$$+ \tilde{\varphi}_m(\sigma)\sum_{j_p=1}^{m} K_{j_p}(t,\tau_p,\sigma)\big(1 + B_p^{(j_p-1)}\big)\ldots\sum_{j_2=1}^{m} K_{j_2}^{(j_3-1)}(\tau_3,\tau_2,\sigma)\times$$

$$\times\big(1 + B_2^{(j_2-1)}\big)\sum_{j_1=1}^{m} K_{j_1}^{(j_2-1)}(\tau_2,\tau_1,\sigma)\big(1 + B_1^{(j_1-1)}\big)K_m^{(j_1-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma) +$$

$$+\sum_{\ell=1}^{p}\int_{\tau_{\ell-1}}^{\tau_\ell} f(\tau,\sigma)\sum_{j_{p-\ell}=1}^{m} K_{j_{p-\ell}}(t,\tau_{p-\ell},\sigma)\big(1+B_{p-\ell}^{(j_{p-\ell}-1)}\big)\times\ldots\times$$

$$\times\sum_{j_{2-\ell}=1}^{m} K_{j_{2-\ell}}^{(j_{3-\ell}-1)}(\tau_{3-\ell},\tau_{2-\ell},\sigma)\big(1+B_{2-\ell}^{(j_{2-\ell}-1)}\big)\sum_{j_{1-\ell}=1}^{m} K_{j_1-\ell}^{(j_{2-1}-1)}(\tau_{2-\ell},\tau_{1-\ell},\sigma)\times$$

$$\times\big(1+B_{1-\ell}^{(j_{1-\ell}-1)}\big)K_m^{(j_1-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)K^{(j_{1-\ell}-1)}(\tau_\ell-\tau,\sigma)\,d\tau+$$

$$+\int_{\tau_p}^{t} K(t-\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\tau\,.$$

Кожну із функцій $K_j(\tau_{\ell+1},\tau_\ell,\sigma)$ згідно з твердженням 1 можна подати у вигляді (21) або (22). Підставляючи знайдену функцію $V(t,\sigma)$ у (33) та користуючись теоремою про перетворення Фур'є згортки двох функцій, отримаємо розв'язок задачі (30)–(32) у вигляді

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} G_j(t,x-\xi)\varphi_j(\xi)\,d\xi+\sum_{\ell=1}^{p}\int_{\tau_{\ell-1}}^{\tau_\ell} d\tau\int_{\mathbb{R}^n} G_\ell(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{\tau_p}^{t} G(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi\,, \tag{38}$$

де $\{G_j(t,x)\}_{j=1}^m$ мають вигляд

$$G_j(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}\sum_{j_p=1}^{m} K_{j_p}(t,\tau_p,\sigma)\big(1+B_p^{(j_p-1)}\big)\times\ldots\times$$

$$\times\sum_{j_2=1}^{m} K_{j_2}^{(j_3-1)}(\tau_3,\tau_2,\sigma)\big(1+B_2^{(j_2-1)}\big)\times$$

$$\times\sum_{j_1=1}^{m} K_{j_1}^{(j_2-1)}(\tau_2,\tau_1,\sigma)\big(1+B_1^{(j_1-1)}\big)K_j^{(j_1-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\,d\sigma\,.$$

Міркуючи подібно, як раніше, отримуємо аналог теореми 2.

Теорема 3. *Нехай символи* $P_{\nu k_0}(\sigma)$ *належать класу* $C^N(\mathbb{R}^n)$, $N\ge 2n+[\gamma]+1$, *рівняння* (30) *є параболічним і нехай вирази* $1+B_\ell^{(j-1)}\ne 0$, $j=1,\ldots,m$, $\ell=$ $=1,\ldots,p$. *Тоді розв'язок задачі* (30)–(32) *для довільних функцій* $\varphi_j\in C(\mathbb{R}^n)$ *і* $f\in C^{(\alpha)}(\Pi_T)$ *визначається формулою* (38), *у якій* $\{G_j(t,x)\}_{j=1}^m$ *задовольняють нерівності*

$$\left|G_j(t,x)\right|\le c\,\frac{t^j}{(t^{1/\gamma}+|x|)^{n+\gamma}}$$

та для його похідних виконуються оцінки

$$\left|D_t^{k_0}u(t,x)\right|\le c\left(\sum_{j=1}^{m} t^{j-1-k_0}\left\|\varphi_j\right\|_C+\|f\|_{C^{(\alpha)}}\right),\qquad k_0\le m\,.$$

1. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Ленинград: Гостехиздат, 1933. – 368 с. – Т. 1., Ч. 1.
2. *Дринь Я. М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 1. – С. 198–203.
3. *Дрінь Я. М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 19–21.
4. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 5. – С. 909–934.
5. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – Москва: Наука, 1971. – 432 с.

6. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. − Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1984. − 208 с.
7. *Федорюк М. В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. − 1978. − № 7. − С. 1296−1301.
8. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы мат. анализа. − Киев, 1974. − С. 60−69.
9. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Построение и исследование класических фундаментальных решений задачи Коши для равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Мат. исследования. − Кишинев, 1981. − Вып. 63. − С. 18−33.
10. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. − Москва: Наука, 1973. − 232 с.
11. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. − Basel: Birkhäuser, 2004. − 390 p. − (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. − Vol. 152.)
12. *Iwasaki C.* The fundamental solution for pseudo-differential operators of parabolic type // Osaka J. Math. − 1977. − **14** , No. 3. − P. 569−592.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрена задача Коши и задача с импульсным действием для параболического псевдодифференциального уравнения высшего порядка по t *. Для таких задач построены решения, изучены свойства и доказана теорема о корректности.*

CAUCHY PROBLEM FOR PARABOLIC PSEUDODIFFERENTIAL HIGHER ORDER EQUATION WITH IMPULSE ACTION

The Cauchy problem and problem with impulse action for the pseudodifferential equations of higher order on t *is considered. The solutions of such problems are constructed and its properties are studied, and the theorem about the correctness is proved.*

Чернів. нац. ун-т імені Юрія Федьковича, Чернівці

Одержано
11.02.10