

Б. Й. Дацко

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ В БІСТАБІЛЬНИХ СИСТЕМАХ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

*Досліджено динаміку та умови виникнення складних автохвильових розв'язків в бістабільних системах реакції-дифузії з часовими дробовими похідними. Показано, що дробові системи реакції-дифузії мають нові властивості порівняно зі стандартними системами з похідними цілого порядку. Зокрема, в бістабільних системах з дробовими похідним знайдено нові типи автохвильових розв'язків, які не можуть існувати в стандартних системах реакції-дифузії. Результати лінійної теорії підтверджені за допомогою комп'ютерного моделювання системи з кубічною нелінійністю, яка дозволяє моделювати характерні зворотні зв'язки та основні типи автохвильових розв'язків. На основі обчислювального експерименту показано, що порядок і співвідношення часових дробових похідних якісно змінюють умови нестійкості та нелінійну динаміку бістабільних систем.*

**Вступ.** Протягом останніх декількох десятиліть дослідження рівнянь реакції-дифузії (РД) істотно розширило розуміння складних нерівноважних явищ у багатьох системах природи. На основі математичного моделювання класичних систем реакції-дифузії багато яскравих нелінійних явищ у фізичних, біологічних і хімічних середовищах було описано і пояснено (див. [1, 3, 13, 17]). Прикладами таких явищ є утворення складних динамічних просторово-неоднорідних розподілів концентрацій реагентів в хімічних реакціях, упорядковані структури в колоніях мікроорганізмів, поширення імпульсів в нервовому волокні та серцевому м'язі, складні імунні біохімічні реакції в живих організмах, утворення доменів густини струму та електричного поля в напівпровідниках і газах. У фрактальних, пористих, в'язких середовищах дифузія, як правило, має аномальну природу [2, 16, 18, 19] і потребує використання апарату диференціальних рівнянь з дробовими похідними для моделювання процесів у них. Автохвильові процеси експериментально виявлені навіть у таких складних середовищах, як живі клітини та міжклітинне середовище [14], де дифузія проявляє суттєво аномальну природу. Внаслідок цього дослідження систем РД з дробовими похідними [2, 7, 8, 11, 16, 21] має великі перспективи з точки зору як відкриття нових нелінійних ефектів, так і їх практичного застосування.

У той час, як похідна цілого порядку залежить тільки від локальної поведінки функції, дробові похідні мають нелокальну природу та залежать і від попередньої поведінки функції. Тому динамічні системи з дробовими похідними, в першу чергу, використовуються для моделювання процесів з пам'яттю. З цієї точки зору дослідження автохвильових систем з дробовими похідними видається особливо привабливим об'єктом при моделюванні явищ самоорганізації, оскільки стандартні системи такого типу, в свою чергу, також мають певний тип своєї власної пам'яті у вигляді просторово-часових граничних циклів. У поєднанні з ефектами пам'яті нелокальних операторів дробового диференціювання це може призводити як до якісної зміни динаміки системи, так і до нових класів нелінійних розв'язків (див. [7–9]). В опублікованих останнім часом статтях [4–6] проаналізовано особливості нелінійної динаміки в базових моностабільних системах РД з дробовими похідними. У цій роботі досліджено нелінійну динаміку та умови виникнення складних автохвильових розв'язків у бістабільних системах.

**Постановка задачі.** В загальному випадку математична модель реакції-дифузії може бути описана за допомогою системи  $m$  нелінійних рівнянь із частинними похідними параболічного типу

$$\tau \cdot u_t = D\Delta u + f(u, A), \quad (1)$$

в просторово-часовій області  $\Omega \times \Psi$  при заданих граничних умовах на

$\partial\Omega \times \Psi$  і початкових умовах для  $r \in \Omega$ , де  $\Omega$  визначає обмежену просторову область в  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \in \{1, 2, 3\}$ , з гладкою границею  $\partial\Omega$ , а  $\Psi = (0, T)$  – часовий інтервал  $0 < T < \infty$ . У рівнянні (1) вектор  $\tau_{m \times 1}$  та матриця  $D_{m \times m}$  визначають часові і просторові масштаби системи,  $A \in \mathbb{R}$  – зовнішній біфуркаційний параметр, а вектор  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^\top$  – задані гладкі функції кінетики реакції,  $f_i(u_1(r, t), u_2(r, t), \dots, u_m(r, t)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Для дослідження якісних особливостей явищ самоорганізації загальну систему (1) можна звести до базової системи двох нелінійних рівнянь з додатним і від’ємним зворотними зв’язками відповідно [1, 3, 13, 17]:

$$\tau_1 \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \ell_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + W(u_1, u_2, A), \quad (2)$$

$$\tau_2 \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \ell_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + Q(u_1, u_2, A), \quad (3)$$

де  $\tau_1, \tau_2, \ell_1, \ell_2$  – характерні часи та довжини системи, а  $W(u_1, u_2, A)$ ,  $Q(u_1, u_2, A)$  – нелінійні функції змінних  $u_1, u_2$  (активатора та інгібітора) і деякого зовнішнього параметра  $A$ .

У системі (2), (3) при періодичних

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=L}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=L}, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

або нейтральних граничних умовах

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

можуть існувати просторово-однорідні стаціонарні розв’язки, які задовольняють систему алгебраїчних рівнянь

$$W(u_1, u_2, A) = 0, \quad Q(u_1, u_2, A) = 0, \quad (6)$$

кількість дійсних розв’язків якої класифікує систему (2), (3) як моно- чи мультистабільну. Існування додатного зворотного зв’язку за першою змінною  $u_1$

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} > 0 \quad (7)$$

і від’ємного – за змінною  $u_2$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_2} < 0 \quad (8)$$

в певному діапазоні зміни параметра біфуркації  $A$  разом зі співвідношеннями між характерними часами і довжинами системи зумовлюють нестійкість цих просторово-однорідних рівноважних станів системи і складну нелінійну динаміку в ній.

Базові системи РД, в яких нуль-ізокліни перетинаються в трьох точках прийнято називати бістабільними. У бістабільних системах нелінійна динаміка має ряд особливостей порівняно з моностабільними навіть у класичному випадку. У цій роботі покажемо, що у випадку дробових похідних такі системи мають ряд додаткових відмінностей, внаслідок цього в дробових бістабільних системах можуть існувати якісно нові типи розв’язків, які не можуть бути знайдені в їхніх цілочисельних аналогах.

Об’єктом досліджень цієї роботи є базова двокомпонентна система реакції-дифузії з часовими дробовими похідними різного порядку:

$$\tau_1 \frac{\partial^{\alpha_1} u_1(x, t)}{\partial t^{\alpha_1}} = \ell_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + W(u_1, u_2, A), \quad (9)$$

$$\tau_2 \frac{\partial^{\alpha_2} u_2(x, t)}{\partial t^{\alpha_2}} = \ell_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + Q(u_1, u_2, A), \quad (10)$$

де  $\{\alpha_1, \alpha_2\} \in (0, 2)$  – відповідні порядки дробових похідних, а самі дробові похідні  $\partial^\alpha u(x, t)/\partial t^\alpha$  означені в сенсі Капуто [17, 18]:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u_i(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(q - \alpha)} \int_0^t \frac{u_i^{(q)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha + q - 1}} d\tau, \quad q - 1 < \alpha < q, \quad q \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Системи такого типу виникають як мезоскопічні математичні моделі для опису нерівноважної динаміки в складних хімічних та біологічних середовищах і можуть бути виведені на основі методу неперервних випадкових блукань, коли транспорт є суттєво дисперсним [12, 21]. З іншого боку, введення дробових похідних суттєво узагальнює сім'ю диференціальних рівнянь і система (9), (10) сама по собі є новим і цікавим математичним об'єктом для теоретичних досліджень [10, 15, 20].

**Аналіз стійкості рівноважних станів та нелінійної динаміки бістабільних систем.** У класичних бістабільних системах із трьох однорідних станів  $S_L, S_C, S_R$  два є стійкими (рис. 1) і згідно з загальною теорією в них також існують всі основні типи автохвильових розв'язків, які притаманні моностабільним системам. Основною характеристикою, яка обумовлює властивості автохвильових розв'язків в базових системах реакції-дифузії, є залежність  $u_2(u_1)$ , яка визначається з рівняння  $W(u_1, u_2, A) = 0$  при  $A = \text{const}$  [13]. Ця залежність встановлює зв'язок між змінними системи  $u_1$  і  $u_2$  в областях, де розв'язок  $u_1(x)$  змінюється плавно. Якісний вигляд нуль-ізоклін для більшості автохвильових систем можна встановити з загальних міркувань. З урахуванням однозначності рівноважного стану системи

$$W'_{u_1} Q'_{u_2} - W'_{u_2} Q'_{u_1} > 0 \quad (12)$$

умови нестійкості (7), (8) задовольняються лише при  $W'_{u_2} Q'_{u_1} < 0$ , тобто, коли

$$Q'_{u_1} > 0, \quad W'_{u_2} < 0 \quad (13)$$

або

$$Q'_{u_1} < 0, \quad W'_{u_2} > 0. \quad (14)$$

Якщо нерівності (7), (8) виконуються в деякому діапазоні  $u_1^L < u_1 < u_1^R$  то при виконанні умови (12) для обох нуль-ізоклін похідна  $du_2/du_1 < 0$ , оскільки

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{W'_{u_1}}{W'_{u_2}} \quad \text{на ізокліні} \quad W(u_1, u_2, A) = 0 \quad (15)$$

та

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{Q'_{u_1}}{Q'_{u_2}} \quad \text{на ізокліні} \quad Q(u_1, u_2, A) = 0. \quad (16)$$

У точках  $u_1 = u_1^R$  і  $u_1 = u_1^L$  (рис. 1) похідна  $W'_{u_1} = 0$ , тому згідно з (15) похідна  $du_2/du_1$  в цих точках змінює знак. Іншими словами, при виконанні умови (13) нуль-ізокліна  $W(u_1, u_2, A) = 0$  повинна мати S-подібну форму (до такого ж висновку приводить також виконання умови (14)). Знак похід-

ної  $Q'_{u_1}$  (або  $Q'_{u_2}$ ) не зв'язаний зі знаком  $W'_{u_1}$ , тому в загальному випадку для нуль-ізокліни  $Q(u_1, u_2, A) = 0$  умова  $du_2/du_1$  може виконуватися і поза інтервалом  $u_1^L < u_1 < u_1^R$ . Наведений аналіз показує, що  $S$ -подібна залежність нелінійного джерела для рівняння з додатним зворотним зв'язком є однією з основних характеристик активних систем з дифузиею, яка у загальному випадку визначає області стійкості і нестійкості системи.

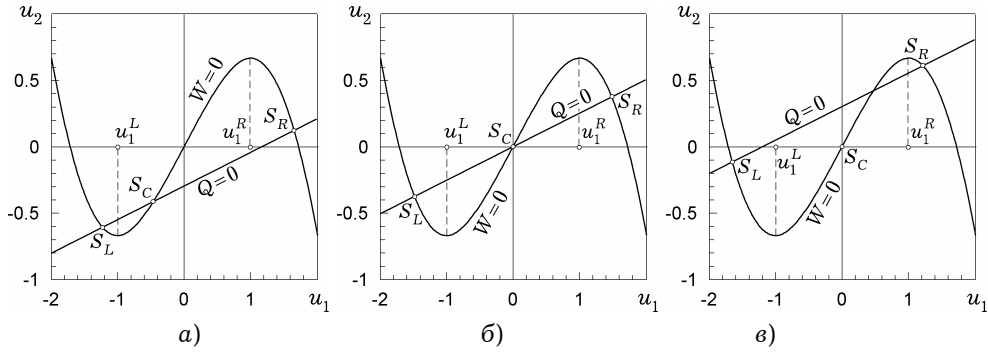


Рис. 1

Вигляд нуль-ізоклін системи та співвідношення просторово-часових масштабів системи  $l_1/l_2$  та  $\tau_1/\tau_2$  визначають не тільки тип нестійкості в системі, але й основні властивості автохвильових розв'язків. В залежності від співвідношень між характерними часами і довжинами базові системи реакції-дифузії можна розділити на три якісно відмінних класи [13]:

- а)  $l_1/l_2 \ll 1$ ,  $\tau_1/\tau_2 > 1$ ,
- б)  $l_1/l_2 > 1$ ,  $\tau_1/\tau_2 \ll 1$ ,
- в)  $l_1/l_2 \ll 1$ ,  $\tau_1/\tau_2 \ll 1$ ,

які головним чином визначають вигляд автохвильових розв'язків і сценарій нелінійної динаміки. У [5, 7] було показано, що для систем з  $S$ -подібними нуль-ізоклінами тип нестійкості і формування фінального атрактора в цих граничних випадках зумовлені, в першу чергу, спектром власних значень лінеаризованої системи.

Стійкість однорідних стаціонарних розв'язків дробової системи (9), (10) з однаковими індексами можна проаналізувати за допомогою лінеаризованої системи [9]

$$\tau_1 \frac{\partial^\alpha \Delta u_1(x, t)}{\partial t^\alpha} = l_1^2 \nabla^2 \Delta u_1(x, t) + a_{11} \Delta u_1(t, x) + a_{12} \Delta u_2(t, x), \quad (17)$$

$$\tau_2 \frac{\partial^\alpha \Delta u_2(x, t)}{\partial t^\alpha} = l_2^2 \nabla^2 \Delta u_2(x, t) + a_{21} \Delta u_1(t, x) + a_{22} \Delta u_2(t, x), \quad (18)$$

де

$$a_{1j} = \left. \frac{\partial W}{\partial u_j} \right|_{(u_1^*, u_2^*)}, \quad a_{2j} = \left. \frac{\partial Q}{\partial u_j} \right|_{(u_1^*, u_2^*)}, \quad j = 1, 2.$$

У випадку системи з похідними різного порядку система (9), (10) може бути зведена до еквівалентної системи дробових диференціальних рівнянь однакового порядку  $\alpha$  ( $\alpha_1 = m\alpha$ ,  $\alpha_2 = l\alpha$ ,  $m, l \in \mathbb{N}$ ) [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u_1(x, t)}{\partial t^\alpha} &= u_3, & \frac{\partial^\alpha u_2(x, t)}{\partial t^\alpha} &= u_{m+1}, \\ \frac{\partial^\alpha u_i(x, t)}{\partial t^\alpha} &= u_{i+1}, & i &\in \{3, \dots, m-1\} \cup \{m+1, \dots, l+m-1\}, \end{aligned}$$

$$\tau_2 \frac{\partial^\alpha u_m(x, t)}{\partial t^\alpha} = \ell_2^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + Q(u_1, u_2, A),$$

$$\tau_1 \frac{\partial^\alpha u_{m+\ell}(x, t)}{\partial t^\alpha} = \ell_1^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + W(u_1, u_2, A),$$

лінеаризація якої дає можливість в явному виді записати загальне характеристичне рівняння [7] як для систем з однаковими, так і різними порядками дробових похідних:

$$(-\lambda)^{m+l} + (-1)^{l-1} \frac{a_{22}(k)}{\tau_2} (-\lambda)^m + (-1)^{m+1} \frac{a_{11}(k)}{\tau_1} (-\lambda)^l + (-1)^{l+m} \det F = 0,$$

де

$$a_{11}(k) = a_{11} - k^2 \ell_1^2, \quad a_{11} = W'_{u_1}, \quad a_{12} = W'_{u_2}, \quad a_{21} = Q'_{u_1},$$

$$a_{22}(k) = a_{22} - k^2 \ell_2^2, \quad a_{22} = Q'_{u_2}, \quad \det F(k) = a_{11}(k)a_{22}(k) - a_{12}a_{21}.$$

Як і у випадку систем РД з цілими похідними, корені цього характеристичного рівняння визначають стійкість рівноважних станів нелінійної системи. Однак, на відміну від стандартних систем реакції-дифузії, необхідно брати до уваги не тільки корені з максимальною дійсною частиною, але і відношення уявної і дійсної частини комплексних коренів [7, 8], яке разом з порядками дробових похідних головним чином обумовлює існування якісно нових розв'язків як у моностабільних, так і в бістабільних системах РД з дробовими похідними. Іншими словами,  $\alpha$  є новим біфуркаційним параметром, який в залежності від відношення між уявною і дійсною частиною визначає стійкість просторово-однорідного розв'язку системи. Для довільного комплексного власного числа  $\lambda_i$  можна завжди визначити критичне значення  $\alpha_0$  таке, що для довільного

$$\alpha > \alpha_0 = \frac{2}{\pi} |\text{Arg}(\lambda_i)|$$

система втрачає стійкість [7, 8].

На відміну від моностабільних систем, в бістабільних системах можна згенерувати складного виду автохвилі перемикання з одного стійкого стану в інший. Така динаміка може бути зреалізована як при  $\ell_1/\ell_2 \ll 1$ ,  $\tau_1/\tau_2 > 1$ , так і при  $\ell_1/\ell_2 > 1$ ,  $\tau_1/\tau_2 \ll 1$ . Причому для першого граничного випадку хвилю перемикання можна збурити лише в одному напрямку: при перетині нуль-ізоклін, зображеному на рис. 1а, систему можна перевести лише зі стану  $S_L$  у стан  $S_R$ , а при перетині нуль-ізоклін, зображеному на рис. 1в, систему можна перевести лише зі стану  $S_R$  в стан  $S_L$ . Ці дві хвилі перемикання реалізуються в різних діапазонах зміни параметра біфуркації  $A$ . При ситуації, наведеній на рис. 1б, швидкість цих хвиль перемикання  $v \rightarrow 0$ . У другому граничному випадку ( $\ell_1/\ell_2 > 1$ ,  $\tau_1/\tau_2 \ll 1$ ) автохвилі перемикання можна збурювати в обох напрямках при одному і тому самому рівні нерівноважності системи  $A$ . Можливість почергового перемикання системи в цьому граничному випадку дозволяє збурювати в ній послідовності автохвиль різної довжини і реалізувати значну різноманітність динаміки системи.

Відмінність у характерних часах і довжинах означає, що змінні  $u_1$  і  $u_2$  мають різну просторову і частотну дисперсію. Тому для першого граничного випадку типовою є нестійкість Тюрінга при умові

$$a_{11} > -a_{22} \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} + 2 \frac{\ell_2^2}{\ell_1^2} \sqrt{\det F(0)}$$

з утворенням просторово-неоднорідних стаціонарних структур з періодом

$$\Pi = 2\pi \frac{\sqrt{\ell_1^2 \ell_2^2}}{\sqrt[4]{\det F(0)}},$$

а для другого граничного випадку – нестійкість Гопфа при умові

$$a_{11} > -\frac{a_{22} \tau_1}{\tau_2}$$

з утворенням просторово-однорідних коливань з частотою

$$\omega = \sqrt{\frac{\det F(0)}{\tau_u \tau_v}}.$$

Тому інтуїтивно є зрозумілим, що найбільш складну просторово-часову динаміку слід очікувати у випадку  $\ell_1/\ell_2 \ll 1$ ,  $\tau_1/\tau_2 \ll 1$ , коли в системі можуть бути зреалізовані обидва типи нестійкості. В цьому граничному випадку стаціонарні просторово-неоднорідні розв'язки втрачають стійкість відносно пульсацій навіть у випадку стандартних систем РД. Для систем з дробовими похідними, особливо у випадках  $\alpha_1 > 1$ ,  $\alpha_2 > 1$  та  $\alpha_1/\alpha_2 > 1$ , роль коливної нестійкості суттєво зростає, що зумовлює як нові типи динаміки, так і нові типи нестійкості [5–8]. Більше того, в [5–7] було показано, що у цих випадках область нестійкості рівноважних станів системи може не обмежуватися інтервалом, на якому  $\partial W/\partial u_1 > 0$ . Тобто в бістабільній системі всі три рівноважних стани можуть виявитися нестійкими і спонтанно приводити до утворення хвиль перемикання і складної динаміки.

**Числове моделювання просторово-часової динаміки у бістабільній моделі FitzHugh–Nagumo з дробовими похідними.** Для комп'ютерного моделювання як приклад розглянемо найбільше відому базову систему реакції-дифузії

з нелінійним джерелом для змінної активатора

$$W = u_1 - u_1^3 - u_2, \quad (19)$$

та лінійним джерелом для змінної інгібітора [1, 3, 11]

$$Q = -u_2 + \beta u_1 + A. \quad (20)$$

Ця модель є класичним прикладом систем з  $S$ -подібною нелінійністю, на основі якої було пояснено ряд явищ самоорганізації в нервових волокнах, серцевому м'язі, напівпровідникових та газорозрядних системах [1, 3, 11]. З іншого боку, система дозволяє отримати практично всі основні типи автохвильових розв'язків. Внаслідок цього її використання як модельної системи для ілюстрації нових властивостей і розв'язків є особливо демонстративним. Простий вигляд нелінійностей  $W, Q$  дає можливість отримати алгебраїчну залежність між змінною  $u_1$  та біфуркаційним параметром  $A$ , який визначає рівень нерівноважності системи

$$(\beta - 1)\bar{u}_1 + \frac{\bar{u}_1^3}{3} + A = 0. \quad (21)$$

У зв'язку з цим можемо отримати спектр лінеаризованої системи при довільному значенні параметра біфуркації  $A$  при всіх можливих випадках перетину нуль-ізоклін системи і тим самим оцінити стійкість всіх рівноважних станів системи.

Проаналізуємо типовий спектр власних значень для системи з однаковими ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) та різними ( $\alpha_1 = 2\alpha_2$ ) порядками дробових похідних. Для чисельного моделювання розглянемо, як вже зазначалося вище, найбільш

сприятливе для складної нелінійної динаміки співвідношення між характерними часами і довжинами системи:  $\ell_1/\ell_2 \ll 1$ ,  $\tau_1/\tau_2 \ll 1$ . Обчисливши частинні похідні за змінними  $u_1, u_2$  від джерел системи (19), (20)

$$a_{11} = 1 - u_1^2, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = \beta, \quad a_{22} = -1, \\ a_{11}(k) = a_{11} - k^2 \ell_1^2, \quad a_{22}(k) = a_{22} - k^2 \ell_2^2,$$

можемо записати у явному вигляді відповідні характеристичні рівняння

для  $\alpha_1 = \alpha_2$ :

$$\lambda^2 - \lambda \left( \frac{a_{11}(k)}{\tau_1} + \frac{a_{22}(k)}{\tau_2} \right) + \frac{\det F(k)}{\tau_1 \tau_2} = 0, \quad (22)$$

для  $\alpha_1 = 2\alpha_2$ :

$$\lambda^3 - \lambda^2 \frac{a_{22}(k)}{\tau_2} - \lambda \frac{a_{11}(k)}{\tau_1} + \frac{\det F(k)}{\tau_1 \tau_2} = 0, \quad (23)$$

корені яких для довільної точки перетину нуль-ізоклін системи і параметрів  $\tau_1, \tau_2, \ell_1, \ell_2, \beta$  можуть бути знайдені аналітично. Типові спектри власних значень для  $\alpha_1 = \alpha_2$  та  $\alpha_1 = 2\alpha_2$  наведено відповідно на рис. 2а і рис. 2б. Іншими словами, на рис. 2 зображено дійсні і уявні частини коренів характеристичних рівнянь (22) і (23) для різних значень хвильових чисел ( $k = 0$  – суцільні лінії,  $k = 1$  – точкові лінії,  $k = 2$  – пунктирні лінії) при параметрах  $\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 1, \ell_1 = 0.1, \ell_2 = 1, \beta = 0.85$ , які відповідають випадку, який хочемо проаналізувати ( $\ell_1/\ell_2 \ll 1, \tau_1/\tau_2 \ll 1$ ). Зменшення параметра  $\beta$  змінює нахил ізокліни  $Q = 0$  і тим самим змінює стан системи з моностабільного ( $\beta > 1$ ) на бістабільний ( $\beta < 1$ ). Графічні подання спектра власних значень на рис. 2а та рис. 2б демонструють наявність комплексних власних чисел поза інтервалом зростання залежності  $W(u_1, u_2, A) = 0$ . У роботі [7] було показано, що для систем РД з дробовими похідними в цьому випадку завжди можна визначити таке критичне значення дробової похідної  $\alpha_0$ , яке приведе до втрати стійкості такого просторово-однорідного стану системи. Більш того, рис. 2б свідчить, що, на відміну від ситуації зображеної на рис. 2а, власні значення з додатними дійсними частинами також не обмежені інтервалом, на якому нуль-ізокліна  $W(u_1, u_2, A) = 0$  є зростаючою функцією. Тобто збільшення порядку дробових похідних та співвідношення між ними приводить до ситуації, коли всі три стаціонарних стани можуть стати нестійкими (рис. 1). Тобто як при  $\alpha_1 = \alpha_2$ , так і при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  всі три точки перетину нуль-ізоклін стають нестійкими. Це означає, що хвилі перемикання в дробових системах при розглянутих параметрах, на відміну від систем з цілими похідними, можуть виникати спонтанно. Якщо амплітуда коливань в крайніх бокових точках перетину стане більшою від критичного значення, то виникне перехідна хвиля, аналогічна до тієї, яку можна спостерігати в класичних системах. В результаті таких спонтанних перемикань можна очікувати існування періодичних просторово-часових розв'язків в широкому діапазоні зміни параметрів системи. Спектри, наведені на рис. 2, наочно демонструють ще одну особливість бістабільних систем, якій не було приділено достатньої уваги при дослідженні систем РД у класичному випадку. На основі аналізу характеристичних рівнянь можна показати, що перевід системи з кубічною нелінійністю в бістабільний стан приводить до зближення власних значень для різних хвильових чисел  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Оскільки спектр не містить різкого розділення власних значень для різних хвильових чисел (рис. 2), бістабільна дробова система FitzHugh – Nagumo може демонструвати більш складну просторово-часову нелінійну динаміку, ніж у моностабільному стані. Близькість власних значень може

також приводить до того, що за допомогою додаткового зовнішнього впливу чи початкових умов в системі можна згенерувати усталений розв'язок для вибраної наперед хвильової моди. Більше того, на різних інтервалах зміни параметра біфуркації  $A$  система може бути нестійкою відносно різних типів біфуркації при власних значеннях як з додатною, так і з від'ємною дійсними частинами, що в принципі неможливо в класичних система РД з цілими похідними.

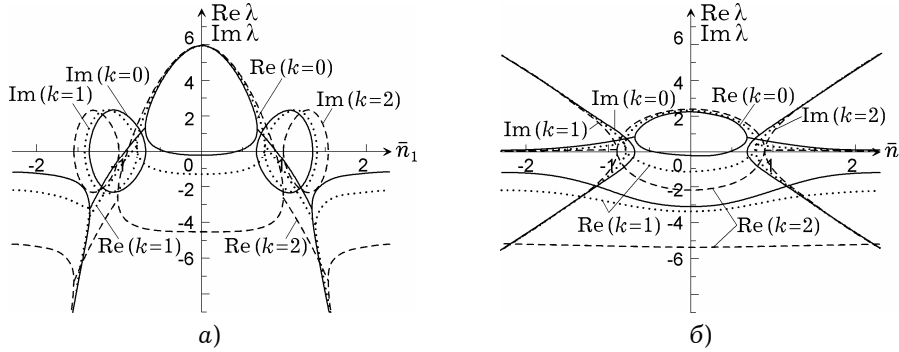
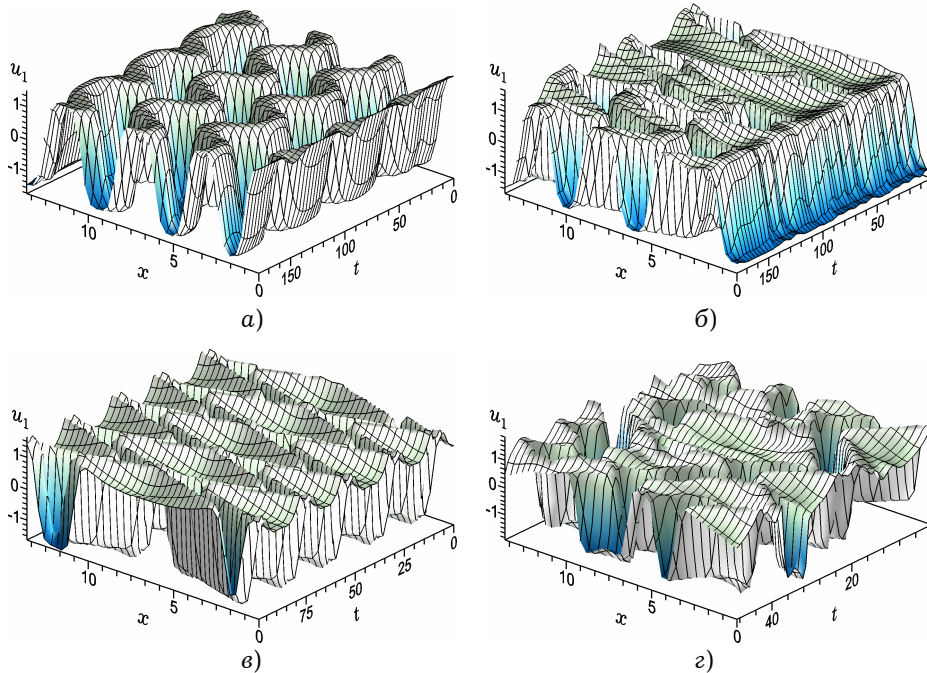


Рис. 2

Наявність такої кількості додаткових механізмів нестійкості в дробових системах РД, а також гередитарні властивості дробових операторів дають підстави очікувати великого різноманіття якісно різних типів розв'язків, включаючи просторово-часовий хаос. На рис. 3 наведено результати чисельного моделювання системи для параметрів, які відповідають спектру задачі, зображеному на рис. 2б. Отримані за допомогою чисельного інтегрування розв'язки повністю підтверджують висновки аналізу спектра лінеаризованої системи.

У випадку, коли ізокліни мають майже однаковий нахил ( $\beta = 0.95$ ), з рис. 2 видно, що всі три точки перетину нуль-ізоклін системи є нестійкими. При перетині нуль-ізоклін в околі центру координат ( $A = -0.05$ ) в системі при значеннях похідних  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 0.5$  можна спостерігати зигзагоподібний рух дисипативних структур (рис. 3а).





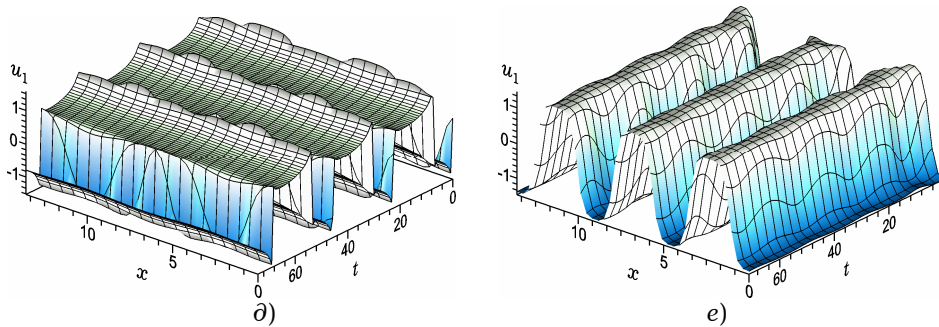


Рис. 3

Збільшення параметра біфуркації ( $A = -0.1$ , рис. 3б) та зменшення нахилу лінійної ізокліни ( $\beta = 0.85$ , рис. 3в) приводить до збільшення швидкості хвиль перемикавання і в системі спонтанно утворюються складні біжучі хвилі. При достатньо великих значеннях дробових похідних ( $\alpha_1 = 1.5$ ,  $\alpha_2 = 0.75$ , рис. 3г) зростає роль коливних нестійкостей і в системі можна спостерігати перехід до хаотичної динаміки. Разом з тим, при практично тих самих параметрах, при яких спонтанно виникає динаміка, зображена на рис. 3а і 3б, за допомогою відповідного початкового збурення в системі також можна сформувати розв'язки у вигляді релаксаційних однорідних коливань (рис. 3д) або просторово-неоднорідних стаціонарних дисипативних структур (рис. 3е).

**Висновок.** За допомогою лінійного аналізу стійкості показано, що в бістабільних системах реакції-дифузії можуть виникати нові типи автохвильової динаміки, які не є характерними для класичних систем. В результаті комп'ютерного моделювання на прикладі системи FitzHugh – Nagumo з часовими дробовими похідними продемонстровано якісні відмінності як у спектрі власних значень лінеаризованої системи, так і у сценаріях еволюції нелінійної системи. Показано, що порядок дробових похідних і співвідношення між ними може якісно змінювати і спектр власних значень, і тип нелінійної динаміки системи. За допомогою числового моделювання отримано складні просторово-часові структури, які зумовлені властивостями дробових операторів і не є характерними для класичних систем реакції-дифузії.

1. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. – Москва: Наука, 1987. – 240 с.
2. Учайкин В. В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 510 с.
3. Cross M. C., Hohenberg P. S. Pattern formation out of equilibrium // Rev. Modern Phys. – 1997. – **65**, No. 3. – P. 851–1112.
4. Datsko B. Y., Gafiychuk V. V. Mathematical modeling of fractional reaction-diffusion systems with different order time derivatives // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 3. – P. 392–402.  
Te same: Datsko B. Y., Gafiychuk V. V. Mathematical modeling of fractional reaction-diffusion systems with different order time derivatives // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 193–201.
5. Datsko B., Gafiychuk V. Chaotic dynamics in Bonhoffer-van der Pol fractional reaction-diffusion system // Signal Processing. – 2011. – **91**. – P. 452–460.
6. Gafiychuk V., Datsko B. Mathematical modeling of different types of instabilities in time fractional reaction-diffusion systems // Comput. and Math. with Appl. – 2010. – **59**. – P. 1101–1107.
7. Gafiychuk V., Datsko B. Spatiotemporal pattern formation in fractional reaction-diffusion systems with indices of different order // Phys. Rev. E. – 2008. – **77**. – P. 066210-1-10.
8. Gafiychuk V., Datsko B. Stability analysis and oscillatory structures in time-fractional reaction-diffusion systems // Phys. Rev. E. – 2007. – **75**. – P. 055201-1-4.
9. Gafiychuk V., Datsko B., Meleshko V. Mathematical modeling of time fractional reaction-diffusion systems // J. Comput. and Appl. Math. – 2008. – **220**. – P. 215–225.

10. *Haubold H., Mathai A., Saxena R.* Further solutions of fractional reaction-diffusion equations in terms of the H-function // *J. Comput. and Appl. Math.* – 2011. – **235**. – P. 1311–1316.
11. *Henry B. I., Langlands T. A. M., Wearne S. L.* Turing pattern formation in fractional activator-inhibitor systems // *Phys. Rev. E.* – 2005. – **72**. – P. 02610110.
12. *Henry B. I., Wearne S. L.* Fractional reaction-diffusion // *Phys. A.* – 2000. – **276**. – P. 448–455.
13. *Kerner B. S., Osipov V. V.* Autosolitons. – Dordrecht: Kluwer, 1994. – 496 p.
14. *Kindzelskii A. L., Petty H. R.* From the cover: Apparent role of traveling metabolic waves in oxidant release by living neutrophils // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* – 2002. – **99**. – P. 9207–9212.
15. *Kochubei A.* Fractional-parabolic systems // *Potential Anal.* – 2011. – DOI: 10.1007/s11118-011-9243.
16. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* – 2000. – **339**. – P. 1–77.
17. *Nicolis G., Prigogine I.* Self-organization in non-equilibrium systems. – New York: Wiley, 1977. – 512 p.
18. *Podlubny I.* Fractional differential equations. – San-Diego: Acad. Press, 1999. – 340 p.
19. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. – Newark: Gordon and Breach, 1993. – 587 p.  
Те саме: *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
20. *Shkilev V.* A necessary condition for the emergence of diffusion instability in media with nonclassical diffusion // *J. Exp. and Theor. Phys.* – 2010. – **110**. – P. 183–190.
21. *Seki K., Wojcik M., Tachiya M.* Fractional reaction-diffusion equation // *J. Chem. Phys.* – 2003. – **119**. – P. 2165–2170.

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В БИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*Исследуются динамика и условия возникновения сложных автоволновых решений в бистабильных системах реакции-диффузии с производными дробных порядков. Показано, что дробные системы реакции-диффузии обладают новыми свойствами по сравнению со стандартными системами с производными целого порядка. В частности, в бистабильных системах с дробными производными найдены новые типы автоволновых решений, которые не могут существовать в стандартных системах реакции-диффузии. Результаты линейной теории подтверждены с помощью компьютерного моделирования системы с кубической нелинейностью, позволяющей моделировать характерные обратные связи и основные типы автоволновых решений. На основе вычислительного эксперимента показано, что порядок и соотношение временных дробных производных качественно изменяют условия неустойчивости и нелинейную динамику в бистабильных системах.*

#### MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR DYNAMICS IN BISTABLE REACTION-DIFFUSION SYSTEMS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

*We study the dynamics and existence conditions of complex autowave solutions in bistable reaction-diffusion systems with fractional derivative orders. It is shown that the fractional reaction-diffusion systems possess novel properties compared to standard systems with derivatives of integer order. In particular, in bistable systems with fractional derivatives we find new types of autowave solutions, which can not exist in the standard reaction-diffusion systems. The results of the linear theory are confirmed by computer simulation of the system with cubic nonlinearity, which allows to simulate specific feedback and the main types of autowave solutions. On the basis of computer simulation it is shown that the order and relation between fractional derivatives qualitatively change the conditions of instability and nonlinear dynamics in bistable systems.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
17.10.10