УДК 517.965: 519.6

П. Ф. Жук[1], Л. Н. Бондаренко[2], Н. А. Куляпина[1]

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАСКАДА СОРБЦИОННЫХ АППАРАТОВ С ДИФФУЗИЕЙ ВНУТРИ ОДНОРОДНО-ПОРИСТОГО СОРБЕНТА

Построена и исследована математическая модель каскада сорбционных аппаратов при внутридиффузионном процессе сорбции в гранулах однородно-пористого сорбента (известными примерами таких сорбентов являются активные угли КАД, АГ-3, СКТ).

Введение. На Земле менее 1% воды легкодоступно в пресной форме. Кроме того, только треть потенциально доступной пресной воды в мире является безопасной для здоровья человека. В современных условиях охрана окружающей среды стала одним из решающих факторов, определяющих дальнейшее развитие человечества. Экологические проблемы резко выражены в тех регионах, на территории которых функционируют производства органического синтеза. Одним из реальных путей решения проблем охраны окружающей среды и ресурсосбережения является разработка и внедрение в практику малоотходных и безотходных технологических процессов с локальной очисткой жидких отходов, обеспечивающих повторное использование очищенной воды и доведение извлеченных ценных компонентов сточных вод до товарного продукта или вторичного сырья.

Процессы сорбции имеют широкое практическое применение, например при создании замкнутых систем промышленного водоснабжения. Весьма эффективно они протекают в каскадах сорбционных аппаратов, функционирующих по циклической схеме: после окончания очередного цикла аппарат на входе потока вещества выводится на регенерацию сорбента, а в конец каскада подключается аппарат со свежим (отрегенерированным) сорбентом.

Циклические сорбционные процессы представляют значительный практический интерес, поскольку позволяют существенно повысить производительность адсорбционных установок (см. [1, 3]). Их характерной особенностью является то, что независимо от аппаратного оформления по истечении некоторого числа циклов они выходят на установившийся режим работы. Этот режим является важнейшей характеристикой циклического процесса и используется для оптимизации его параметров.

Несмотря, однако, на практическую значимость, вопросам математического моделирования циклических сорбционных процессов, протекающих в каскадах аппаратов, посвящено относительно небольшое (по сравнению, например, с моделированием кинетики или динамики сорбции) число работ (см. [2, 4–8]). В этих работах предполагалось, что скорость массопереноса при адсорбции определяется скоростью внешнего переноса молекул сорбируемого вещества из потока к поверхности гранулы сорбента (режим внешнедиффузионного массопереноса). При этом математические модели процесса сорбции являются одномерными по пространственной переменной.

В ряде важных случаев (например, при достаточно высокой турбулизации потока) скорость подвода сорбируемого вещества к внешней поверхности гранулы сорбента превосходит скорость его переноса внутри гранулы (режим внутридиффузионного массопереноса). Для изучения внутридиффузионного процесса сорбции необходимо учитывать особенности пористой структуры сорбента, при этом размерность математической модели по пространственной переменной увеличивается.

Моделирование процессов сорбции в гранулах однородно-пористого сорбента проводилось в ряде работ (см., например, [9, 10]), но математически эти модели малоизучены. Известна лишь одна работа [11], посвященная исследованию математической модели внутридиффузионной динамики сорбции вещества однородно-пористым сорбентом. Таким образом, вопросы построения и исследования математических моделей каскада сорбционных аппаратов с однородно-пористым сорбентом актуальны и представляют как теоретический, так и практический интерес.

В предлагаемой работе построена и исследована математическая модель каскада сорбционных аппаратов при внутридиффузионном процессе сорбции в гранулах однородно-пористого сорбента (известными примерами таких сорбентов являются активные угли КАД, АГ-3, СКТ). С целью наиболее полного и детального изучения свойств решения модели предполагаем, что изотерма адсорбции линейна. Это возможно при относительно невысоких концентрациях сорбируемого вещества в потоке. В **п.** 1 построена математическая модель каскада сорбционных аппаратов при внутридиффузионном процессе сорбции в гранулах однородно-пористого сорбента и формулируется цель исследования. В **п.** 2 изучается разрешимость модели: доказано, что при естественных предположениях относительно параметров задача имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций. В **п.** 3 доказана неотрицательность этого решения, что соответствует физическому смыслу входящих в модель величин. В **п.** 4 изучаются свойства монотонности решения как по пространственным и временным переменным, так и по номерам цикла и аппарата. Центральным в статье является **п.** 5: доказано, что с увеличением числа циклов функции, составляющие решение модели, равномерно сходятся. Тем самым обосновано (в рамках построенной модели) существование установившегося режима работы каскада, что является важнейшей характеристикой изучаемого циклического процесса. Приведены свойства предельных функций, описывающих установившийся режим работы каскада.

Таким образом, в работе показано, что построенная математическая модель действительно описывает основные свойства каскада сорбционных аппаратов с однородно-пористым сорбентом, а поэтому может быть использована для расчета и оптимизации таких адсорбционных установок.

Перспективным в этом направлении является распространение полученных результатов на случай каскада сорбционных аппаратов с бипористым сорбентом, а также исследование моделей с нелинейными изотермами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим каскад n последовательно соединенных одинаковых аппаратов длины ℓ с неподвижным слоем однородно-пористого сорбента, на вход которого поступает с постоянной линейной скоростью v поток вещества с постоянной концентрацией c_0.

Работа каскада состоит из циклов. После окончания произвольного цикла каскад перестраивается: его первый аппарат (аппарат на входе) выводится для регенерации сорбента, а в конец каскада подключается аппарат с очищенным сорбентом. Продолжительность каждого цикла предполагается постоянной и равной T. Обозначим через k, $k = 1, 2, \ldots$, номер цикла работы каскада, через i, $i = 1, 2, \ldots, n$, − номер аппарата, отсчитываемый от входа в каскад.

Введем локальное время t $(0 \le t \le T)$ k-го цикла, отличающееся от глобального на константу $(k-1)T$ (в начале k-го цикла $t = 0$) и локальное расстояние x $(0 \le x \le \ell)$ i-го аппарата (x − расстояние от начала i-го аппарата по ходу потока). Предположим, что каждая гранула сорбента имеет форму шара радиуса R; расстояние от произвольной точки гранулы до ее центра обозначим через r $(0 \le r \le R)$. Кроме того, в i-м аппарате на k-м цикле обозначим через $c_{ik}(x,t)$ концентрацию вещества в потоке, через $a_{ik}(r,x,t)$ − концентрацию вещества в адсорбированном состоянии в грануле сорбента, через $a_{ik}^{(s)}(x,t)$ − усредненную по грануле сорбента концентрацию $a_{ik}(r,x,t)$.

Динамика сорбции в i-м аппарате на k-м цикле работы каскада с диффузией внутри гранулы сорбента описывается уравнениями баланса массы

$$v\frac{\partial c_{ik}}{\partial x}+\frac{\partial a_{ik}^{(s)}}{\partial t}=0,\qquad c_{ik}\big|_{x=0}=c_{ik0}(t),\qquad a_{ik}^{(s)}=\frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r^2 a_{ik}\,dr\,, \tag{1}$$

и уравнением диффузии

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D\frac{\partial a_{ik}}{\partial r}\right),\qquad 0<r<R,\quad 0\le x\le \ell,\quad 0<t\le T\,, \tag{2}$$

с начальными и краевыми условиями

$$a_{ik}\big|_{t=0}=a_{ik0}(r,x),\qquad \frac{\partial a_{ik}}{\partial r}\bigg|_{r=0}=0,\qquad \frac{\partial a_{ik}}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\beta\big[c_{ik}-\gamma\, a_{ik}\big|_{r=R}\big]\,, \tag{3}$$

а также условиями согласования

$$c_{ik0}(t)=\begin{cases} c_0, & i=1,\\ c_{i-1,k}(\ell,t), & i=2,\dots,n,\end{cases} \tag{4}$$

$$a_{ik0}(r,x)=\begin{cases} 0, & k=1,\quad i=1,\dots,n,\\ a_{i+1,k-1}(r,x,T), & k>1,\quad i=1,\dots,n-1,\\ 0, & k\ge 1,\quad i=n,\end{cases} \tag{5}$$

где D – коэффициент диффузии вещества в адсорбированном состоянии в грануле сорбента; β – коэффициент обмена на поверхности гранулы; γ – коэффициент Генри изотермы адсорбции (ν, β, γ, D, c_0, R – неотрицательные числа). Система интегро-дифференциальных начально-краевых задач (1)–(5) представляет собой математическую модель i-го аппарата на k-м цикле. Отличие этой модели от математической модели одиночного аппарата состоит в способе задания граничного и начального условий. Для одиночного аппарата они известны априори, для i-го аппарата на k-м цикле они определяются состояниями $(i-1)$-го аппарата на k-м цикле и $(i+1)$-го аппарата на $(k-1)$-м цикле. Условие (4) выражает тот факт, что на вход каскада подается поток с постоянной (равной c_0) концентрацией вещества и что вещество непрерывно распределено в потоке (концентрация вещества на выходе $(i-1)$-го аппарата совпадает с концентрацией вещества на входе i-го аппарата). Условие (5) означает, что в начале каскад свободен от вещества, а, кроме того, отражает способ переключения аппаратов: $(i+1)$-й аппарат на $(k-1)$-м цикле становится i-м на k-м цикле; в конец каскада подключается аппарат из сорбентом, свободный от вещества.

Математическая модель каскада аппаратов представляет собой совокупность по $i=1,2,\dots,n$ и $k=1,2,\dots$ систем интегро-дифференциальных начально-краевых задач (1)–(5).

С целью упрощения математической модели (1)–(5) преобразуем ее при помощи замены переменных $\overline{r}=r/R$, $\overline{x}=Dx/(\gamma\nu R^2)$, $\overline{t}=Dt/R^2$, функций $\overline{c}_{ik}(\overline{x},\overline{t})=c_{ik}(x,t)/c_0$, $\overline{a}_{ik}^{(s)}(\overline{x},\overline{t})=\gamma a_{ik}^{(s)}(x,t)/c_0$, $\overline{a}_{ik}(\overline{r},\overline{x},\overline{t})=\gamma\overline{r}a_{ik}(r,x,t)/c_0$ и параметров $\overline{\ell}=D\ell/(\gamma\nu R^2)$, $\overline{T}=DT/R^2$ (для простоты записи черту над новыми переменными, функциями и параметрами опускаем) к такому виду:

$$\frac{\partial c_{ik}}{\partial x}+\frac{\partial a_{ik}^{(s)}}{\partial t}=0,\qquad c_{ik}\big|_{x=0}=c_{ik0}(t),\qquad a_{ik}^{(s)}=3\int\limits_0^1 r a_{ik}\,dr\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}=\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial r^2},\qquad 0<r<1,\qquad 0\le x\le \ell,\qquad 0<t\le T\,, \tag{7}$$

$$a_{ik}\big|_{t=0} = a_{ik0}(r,x), \qquad a_{ik}\big|_{r=0} = 0, \qquad \left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial r} + (\alpha-1)a_{ik}\right]\Bigg|_{r=1} = \alpha c_{ik}, \quad (8)$$

$$c_{ik0}(t) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ c_{i-1,k}(\ell,t), & i = 2,3,\dots,n, \end{cases} \quad (9)$$

$$a_{ik0}(r,x) = \begin{cases} 0, & k = 1, \quad i = 1,2,\dots,n, \\ a_{i+1,k-1}(r,x,T), & k > 1, \quad i = 1,2,\dots,n-1, \\ 0, & k \ge 1, \quad i = n, \end{cases} \quad (10)$$

где $\alpha = \beta\gamma R > 0$.

Так как математические модели (1)–(5) и (6)–(10) эквивалентны между собой, то в дальнейшем будем изучать математическую модель каскада в виде (6)–(10).

Задачами данной работы являются исследование математической модели каскада аппаратов на разрешимость, неотрицательность и монотонность решения, а также доказательство существования установившегося режима работы каскада в рамках используемой математической модели.

2. Разрешимость математической модели. Обозначим через $B_1 = C[0,T]$, $B_2 = \{a = a(r,x) \mid a \in C([0,1]\times[0,\ell]),\ a(0,x) = 0\}$, $B_3 = C([0,\ell]\times[0,T])$, $B_4 = \{a = a(r,x,t) \mid a \in C(\Pi),\ a(0,x,t) = 0\}$ банаховы пространства непрерывных функций, определенных соответственно в областях $[0,T]$, $[0,1]\times[0,\ell]$, $[0,\ell]\times[0,T]$, $\Pi = [0,1]\times[0,\ell]\times[0,T]$, со стандартными $\max$-нормами.

Под решением математической модели каскада аппаратов будем понимать функции

$$c_{ik} = c_{ik}(x,t), \quad a_{ik}^{(s)} = a_{ik}^{(s)}(x,t), \quad a_{ik} = a_{ik}(r,x,t), \quad i = 1,\dots,n, \ k = 1,2,\dots,$$

такие, что функции $c_{ik}, (c_{ik})'_x, a_{ik}^{(s)}, (a_{ik}^{(s)})'_t \in B_3$, удовлетворяют соотношениям (6) в прямоугольнике $[0,\ell]\times[0,T]$ и условию согласования (9); функция $a_{ik} \in B_4$ удовлетворяет уравнению диффузии (7) в области $(0,1)\times[0,\ell]\times(0,T]$, начальному и краевым условиям (8), а также условию согласования (10).

Теорема 1. *Пусть* α *– произвольное действительное число. Тогда математическая модель каскада аппаратов* (6)–(10) *имеет единственное решение.*

Для д о к а з а т е л ь с т в а теоремы рассмотрим вспомогательную задачу в параллелепипеде Π:

$$\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial a^{(s)}}{\partial t} = 0, \qquad c\big|_{x=0} = c_0(t), \qquad a^{(s)} = 3\int_0^1 ra\,dr, \quad (11)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}, \qquad 0 < r < 1, \qquad 0 \le x \le \ell, \qquad 0 < t \le T, \quad (12)$$

$$a\big|_{t=0} = a_0(r,x), \qquad a\big|_{r=0} = 0, \qquad \left[\frac{\partial a}{\partial r} + (\alpha-1)a\right]\Bigg|_{r=1} = \alpha c. \quad (13)$$

Лемма 1. *Пусть функции* $c_0 \in B_1$, $a_0 \in B_2$, *а* α *– произвольное действительное число. Тогда начально-краевая задача* (11)–(13) *имеет единственное решение* $c, a^{(s)} \in B_3$, $a \in B_4$, *которое непрерывно зависит от исходных данных задачи* c_0, a_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выразим функцию a через функцию c, разрешив начально-краевую задачу (12), (13):

$$a(r,x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}\xi_n(x)\sin\lambda_n r+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\left\{r-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\xi_n\sin\lambda_n r\right\}c(x,\tau)\,d\tau\,, \qquad (14)$$

где λ_n, $n=1,2,\ldots$, – положительные корни трансцендентного уравнения $\mathrm{tg}\lambda=\lambda/(1-\alpha)$ при $\alpha\neq 1$ и $\lambda_n=(n-1/2)\pi$ при $\alpha=1$, а $\xi_n(x)$, ξ_n, $n=$ $=1,2,\ldots$, – коэффициенты разложения соответственно функций $a_0(r,x)$ и r по системе тригонометрических функций $\sin\lambda_n r$ на отрезке $[0,1]$. Далее, умножив обе части уравнения диффузии (12) на r и проинтегрировав по dr от 0 до 1, получаем $\dfrac{\partial a^{(s)}(x,t)}{\partial t}=3\alpha\big[c(x,t)-a(1,x,t)\big]$, следовательно,

$$c'_x(x,t)+3\alpha c(x,t)-3\alpha a(1,x,t)=0\,. \qquad (15)$$

Из соотношений (14), (15) вытекает, что функция c является решением линейного интегро-дифференциального уравнения

$$c'_x(x,t)+3\alpha\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\left\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\xi_n\sin\lambda_n\right\}c(x,\tau)\,d\tau=$$
$$=3\alpha\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}\xi_n(x)\sin\lambda_n\,. \qquad (16)$$

Исследуем разрешимость уравнения (16) с начальным условием $c(0,t)=c_0(t)$ операционным методом. Применив к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа $\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt$ по переменной t, получаем

$$\tilde{c}(x,s)=e^{-xP(s)}\tilde{c}(0,s)+\int_0^x e^{(y-x)P(s)}Q(y,s)\,dy\,, \qquad (17)$$

где $\tilde{c}(x,s)=\mathcal{L}[c(x,t)]$, а $P(s)=3\alpha s\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\xi_n\sin\lambda_n}{s+\lambda_n^2}$, $Q(y,s)=3\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\xi_n(y)\sin\lambda_n}{s+\lambda_n^2}$.

Можно показать, что правая часть формулы (17) имеет обратное преобразование Лапласа, которое единственно и непрерывно зависит от функций c_0, a_0. Таким образом, интегро-дифференциальное уравнение (16) с начальным условием $c(0,t)=c_0(t)$ имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от функций c_0, a_0. Утверждение леммы вытекает из соотношения (14). Лемма доказана. ◊

Следствие. *Задача* (11)–(13) *обладает непрерывным разрешающим оператором* $\Re_\alpha: B_1\times B_2\to B_3\times B_3\times B_4$, *который каждой паре непрерывных функций* (c_0,a_0), *ставит в соответствие тройку функций* $(c, a^{(s)}$, $a)$, *являющихся единственным решением задачи* (11)–(13) *с исходными данными* c_0, a_0.

Доказательство **теоремы 1**. Используя оператор $\Re_\alpha$, нетрудно найти решение задачи (6)–(10). Действительно, при $i=1$, $k=1$ решением задачи (6)–(10) является тройка функций $(c_{11},a_{11}^{(s)},a_{11})=\Re_\alpha(1,0)$, при $i=2$, $k=1$ – это $(c_{21}, a_{21}^{(s)}, a_{21}) = \Re_\alpha(c_{11}(\ell,t),0)$, и т.д., при $i=n$, $k=1$ имеем $(c_{n1}, a_{n1}^{(s)}, a_{n1}) = \Re_\alpha(c_{n-1,1}(\ell,t),0)$. Таким образом, решение математической модели каскада аппаратов (6)–(10) на первом цикле (т.е. при $k=1$) получено.

Аналогично, используя условие согласования (10), находим решение для второго цикла работы каскада (при $k=2$):

$$(c_{12}, a_{12}^{(s)}, a_{12}) = \Re_\alpha(1, a_{21}(r,x,T)),$$
$$(c_{22}, a_{22}^{(s)}, a_{22}) = \Re_\alpha(c_{12}(\ell,t), a_{31}(r,x,T)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(c_{n2}, a_{n2}^{(s)}, a_{n2}) = \Re_\alpha(c_{n-1,2}(\ell,t),0).$$

Наконец, на k-м цикле получаем рекуррентные соотношения

$$(c_{1k}, a_{1k}^{(s)}, a_{1k}) = \Re_\alpha(1, a_{2,k-1}(r,x,T)),$$
$$(c_{2k}, a_{2k}^{(s)}, a_{2k}) = \Re_\alpha(c_{1k}(\ell,t), a_{3,k-1}(r,x,T)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(c_{nk}, a_{nk}^{(s)}, a_{nk}) = \Re_\alpha(c_{n-1,k}(\ell,t),0),$$

однозначно определяющие решение задачи (6)–(10) при $k>2$, $i=1,\ldots,n$. Теорема доказана. ◊

Следствие. *Решение математической модели* (6)–(10) *каскада аппаратов задается формулой*

$$(c_{ik}, a_{ik}^{(s)}, a_{ik}) = \Re_\alpha(c_{i-1,k}(\ell,t), a_{i+1,k-1}(r,x,T)), \tag{18}$$

где

$$c_{0,k}(\ell,t)=1, \quad a_{i+1,0}(r,x,T)=0, \quad a_{n+1,k-1}(r,x,T)=0,$$
$$i=1,\ldots,n, \quad k=1,2,\ldots.$$

3. Неотрицательность решения математической модели. Обозначим через K_i конус неотрицательных функций пространств B_i, $i=1,\ldots,4$. Имеет место

Лемма 2. *Если* $\alpha>0$, *то разрешающий оператор* $\Re_\alpha$ *задачи* (11)–(13) *отображает конус* $K_1 \times K_2$ *в конус* $K_3 \times K_3 \times K_4$.

Доказательство от противного. Предположим, что существует $\alpha>0$ и пара неотрицательных функций $(c_0, a_0) \in K_1 \times K_2$ таких, что тройка функций $(c, a^{(s)}, a) = \Re_\alpha(c_0, a_0)$ не принадлежит конусу $K_3 \times K_3 \times K_4$.

Тогда, в силу непрерывности оператора $\Re_\alpha$, таким же свойством будет обладать пара функций $(c_0+\varepsilon,\ a_0+\varepsilon r)$ при достаточно малом $\varepsilon>0$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $c_0(t)>0$ на отрезке $[0,T]$ и $a_0(1,x)>0$ на отрезке $[0,\ell]$.

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество нулей функции $a(1,x,t)$ в прямоугольнике $[0,\ell]\times[0,T]$. Возможны два следующих случая.

1°. Множество $\mathcal{N} \neq \varnothing$. В этом случае существует, по крайней мере, один нуль функции $a(1,x,t)$, наименее удаленный от точки $(0,0)$. Обозначим через $(x^*,t^*) = \arg\min\limits_{(x,t)\in\mathcal{N}} (x^2+t^2)$ произвольный такой нуль функции $a(1,x,t)$ и рассмотрим число $c(x^*,t^*)$. Из уравнения (15) находим, что

$$c(x,t) = e^{-3\alpha x} c_0(t) + 3\alpha \int_0^x e^{3\alpha(y-x)} a(1,y,t)\, dy\,. \tag{19}$$

Поскольку $a_0(1,x) > 0$ на отрезке $[0,\ell]$, то $t^* > 0$, а функция $a(1,x,t)$ неотрицательна в прямоугольнике $[0,x^*]\times[0,t^*]$. Поэтому при $\alpha > 0$ из соотношения (19) вытекает оценка

$$c(x^*,t^*) \ge e^{-3\alpha x^*} c_0(t^*) > 0\,. \tag{20}$$

Кроме того, из принципа максимума для первой краевой задачи для уравнения (12) следует, что $\forall\,(x,t) \in [0,\ell]\times[0,T]$

$$\min_{0\le r\le 1} a(r,x,t) \ge \min_{0\le \tau\le t} \{0, a(1,x,\tau)\}\,. \tag{21}$$

С другой стороны, поскольку $t^* > 0$, то в точке (x^*,t^*) выполняется краевое условие (13):

$$\frac{\partial a}{\partial r}(1,x^*,t^*) + (\alpha-1)a(1,x^*,t^*) = \alpha c(x^*,t^*)\,. \tag{22}$$

Так как $a(1,x^*,t^*) = 0$, то из оценки (21) вытекает, что $a(r,x^*,t^*) \ge$ $\ge a(1,x^*,t^*)$ $\forall r \in [0,1]$, поэтому $\dfrac{\partial a}{\partial r}(1,x^*,t^*) \le 0$. Но тогда при $\alpha > 0$ из равенства (22) получаем, что $c(x^*,t^*) \le 0$, что противоречит неравенству (20). Таким образом, в случае $\mathcal{N} \ne \varnothing$ приходим к противоречию.

2°. Рассмотрим второй возможный случай: множество $\mathcal{N} = \varnothing$. Тогда $a(1,x,t) > 0$ в прямоугольнике $[0,\ell]\times[0,T]$ и при $\alpha > 0$ из соотношений (19), (21) следует, что $c \in K_3$ и $a \in K_4$. Но это противоречит предположению $(c, a^{(s)}, a) \notin K_3 \times K_3 \times K_4$.

Таким образом, противоречие возникает как в случае $\mathcal{N} \ne \varnothing$, так и в случае $\mathcal{N} = \varnothing$, что и доказывает справедливость утверждения леммы. Лемма доказана. ◊

Последовательное применение леммы 2 к соотношениям (18) доказывает неотрицательность решения математической модели. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть* $(c_{ik}, a_{ik}^{(s)}, a_{ik})$, $i = 1,\dots,n$, $k = 1,2,\dots$, *− решение математической модели* (6)–(10). *Тогда*

$$(c_{ik}, a_{ik}^{(s)}, a_{ik}) \in K_3 \times K_3 \times K_4, \qquad i = 1,\dots,n, \quad k = 1,2,\dots .$$

Замечание. Используя оценки, полученные в ходе доказательства леммы 2, можно показать, что имеют место такие строгие неравенства:

$$c_{ik}(x,t) > 0 \qquad \forall (x,t) \in [0,\ell]\times[0,T]\,,$$

$$a_{ik}^{(s)}(x,t) > 0 \qquad \forall (x,t) \in [0,\ell]\times(0,T]\,,$$

$$a_{ik}(r,x,t) > 0 \qquad \forall (r,x,t) \in (0,1]\times[0,\ell]\times(0,T], \quad i = 1,\dots,n, \quad k = 1,2,\dots .$$

4. Монотонность решения математической модели. Пусть u, v − произвольные функции с общей областью определения. Условимся писать $u \le$ $\le v$, если соответствующее неравенство имеет место для любой точки из области определения. Кроме того, запись $u \downarrow_y$ $(u \uparrow_y)$ будет означать, что функция u монотонно не возрастает (не убывает) по переменной y при любых фиксированных значениях других переменных из области определения.

Обозначим через C_0 множество $\{\varphi = \varphi(t) \mid \varphi \in K_1, \varphi \uparrow_t\}$ непрерывных неотрицательных монотонно неубывающих на отрезке $[0,T]$ функций, а через C (а также через $\mathscr{A}^{(s)}$) – множество $\{\varphi = \varphi(x,t) \mid \varphi \in K_3, \varphi \downarrow_x, \varphi \uparrow_t\}$ непрерывных неотрицательных в прямоугольнике $[0,\ell] \times [0,T]$ функций, монотонно невозрастающих по x на отрезке $[0,\ell]$ при любом фиксированном значении переменной $t \in [0,T]$ и монотонно неубывающих по t на отрезке $[0,T]$ при любом фиксированном значении переменной $x \in [0,\ell]$.

Пусть d – произвольное действительное число. Обозначим через $\mathscr{A}_0(d)$ множество функций $\varphi = \varphi(r,x)$ из конуса K_2 таких, что $\varphi \uparrow_r$, $\varphi \downarrow_x$ в прямоугольнике $[0,1] \times [0,\ell]$, причем $\forall\, x \in [0,\ell]$ функции φ выпуклы по r на отрезке $[0,1]$ и существуют производные $\varphi'_r(1,x)$, удовлетворяющие неравенству

$$\varphi'_r(1,x) + (\alpha - 1)\varphi(1,x) \le \alpha e^{-3\alpha x}\left[d + 3\alpha \int_0^x e^{3\alpha y}\varphi(1,y)\,dy\right]. \tag{23}$$

Наконец, для произвольной функции $\omega = \omega(t)$ на отрезке $[0,T]$ положим $\mathscr{A}(\omega) = \{\varphi = \varphi(r,x,t) \mid \varphi \in K_4,\ \varphi \uparrow_t,\ \forall t \in [0,T]\ \varphi(\cdot\,,\,\cdot\,,t) \in \mathscr{A}_0(\omega(t))\}$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha > 0$, $(c_0, a_0) \in C_0 \times \mathscr{A}_0(c_0(0))$. *Тогда решение задачи* (11)–(13) *таково, что* $(c, a^{(s)}, a) = \Re_\alpha(c_0, a_0) \in C \times \mathscr{A}^{(s)} \times \mathscr{A}(c_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о от противного. Предположим, что существует $\alpha > 0$ и пара функций $(c_0, a_0) \in C_0 \times \mathscr{A}_0(c_0(0))$ таких, что $\Re_\alpha(c_0, a_0) \notin$ $\notin C \times \mathscr{A}^{(s)} \times \mathscr{A}(c_0)$.

Пусть h и ε – произвольные положительные числа. На отрезке $[0,T]$ определим функцию $c_{h\varepsilon}(t) = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{t-h}^{t+h} c_0(\tau)\,d\tau + \varepsilon t + \varepsilon$, доопределяя функцию c_0 на отрезках $[-h, 0]$, $[T, T+h]$ соответственно значениями $c_0(0)$ и $c_0(T)$. Функция $c_{h\varepsilon}$ положительна, обладает непрерывной положительной производной на отрезке $[0,T]$ и, кроме того, $c_{h\varepsilon} \to c_0$ при $h, \tau \to 0$ в пространстве B_1. Поэтому без ограничения общности можно считать (переходя, при необходимости, к функции $c_{h\varepsilon}$), что функция c_0 также положительна, обладает непрерывной положительной производной на отрезке $[0,T]$ и $a_0 \in$ $\in \mathscr{A}_0(c_0(0) - \varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Из определения множества $\mathscr{A}_0(c_0(0) - \varepsilon)$ следует, что начальные данные задачи (11)–(13) таковы, что $a_0 \in K_2$, $a_0 \uparrow_r$, $a_0 \downarrow_x$, в прямоугольнике $[0,1] \times [0,\ell]$, причем $\forall\, x \in [0,\ell]$ функция a_0 выпукла по r на отрезке $[0,1]$ и существуют производные $\dfrac{\partial a_0}{\partial r}(1,x)$, удовлетворяющие неравенству (см. (19), (23))

$$\frac{\partial a_0}{\partial r}(1,x) + (\alpha - 1)a_0(1,x) \le \alpha c(x,0) - \alpha e^{-3\alpha x}\varepsilon.$$

Но тогда $a \uparrow_t$ на достаточно малом временном отрезке $[0,T_1]$ $(0 < T_1 < T)$.

Рассмотрим поведение решения задачи (11)–(13) при $t \ge T_1$.

Поскольку функция c_0 непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, T]$, то из интегро-дифференциального уравнения (16) следует, что функция c непрерывно дифференцируема в прямоугольнике $[0, \ell] \times [T_1, T]$. Обозначим через $\mathcal{N}$ множество нулей функции c'_t в этом прямоугольнике. Возможны следующие два случая.

1°. Множество $\mathcal{N} \neq \varnothing$. В этом случае существует, по крайней мере, один нуль функции c'_t, наименее удаленный от точки $(0, T_1)$, который обозначим через (x^*, t^*). Покажем, что в прямоугольнике $[0, x^*] \times [0, t^*]$ функция c монотонно неубывающая по t.

Действительно, для прямоугольника $[0, x^*] \times [0, T_1]$ это утверждение следует из соотношения (19) и того, что в этом прямоугольнике монотонно неубывающие по t функции c_0, $a|_{r=1}$. Для прямоугольника $[0, x^*] \times [T_1, t^*]$ данное утверждение очевидно, поскольку в нем $c'_t \geq 0$.

Таким образом, $c \uparrow_t$ в прямоугольнике $[0, x^*] \times [0, t^*]$. Но тогда из соотношения (15) следует, что в этом прямоугольнике монотонно не убывает по t функция $a|_{r=1}$. Наконец, из равенства (19) получаем, что при $\alpha > 0$ имеет место оценка $c'_t(x^*, t^*) \geq e^{-3\alpha x^*} c'_{0t}(t^*) > 0$, противоречащая определению точки (x^*, t^*). Таким образом, в случае $\mathcal{N} \neq \varnothing$ приходим к противоречию.

2°. Рассмотрим второй возможный случай: множество $\mathcal{N} = \varnothing$. Тогда $c \uparrow_t$ в прямоугольнике $[0, \ell] \times [0, T]$ (при $t \leq T_1$ используется монотонность функции a по t и соотношение (19)), а поэтому из равенства (14) вытекает, что $a \uparrow_t$ в параллелепипеде Π, следовательно, также $a^{(s)} \uparrow_t$.

Таким образом, $a'_t \geq 0$ в параллелепипеде Π. Из уравнения (12) находим, что $\forall (x, t) \in [0, \ell] \times [0, T]$ функция $a(r, x, t)$ выпукла по r на отрезке $[0, 1]$. Но тогда из краевых условий (13) следует, что $a|_{r=1} \leq c$, поэтому из уравнения (15) вытекает $c'_x \leq 0$, т.е. $c \downarrow_x$ в прямоугольнике $[0, \ell] \times [0, T]$.

Покажем, наконец, что $a \downarrow_x$ в Π. Действительно, пусть x_1, x_2 ($x_1 \leq x_2$) − две произвольные точки отрезка $[0, \ell]$. Положим $c_0(t) = c(x_2, t) - c(x_1, t)$, $a_0(r) = a_0(r, x_2) - a_0(r, x_1)$. Функция $a(r, t) = a(r, x_2, t) - a(r, x_1, t)$ является, очевидно, решением задачи (11)−(13) с исходными данными $c_0(t)$, $a_0(r)$ и $\ell = 0$. Так как $c_0(t) \geq 0$, $a_0(r) \geq 0$, то, в силу леммы 2, $a(r, t) \geq 0$. Поэтому функция a монотонно неубывающая по x.

Итак, в случае $\mathcal{N} = \varnothing$ имеем $c \in C$, $a^{(s)} \in \mathcal{A}^{(s)}$, $a \in \mathcal{A}(c_0)$, что противоречит предположению $(c, a^{(s)}, a) \notin C \times \mathcal{A}^{(s)} \times \mathcal{A}(c_0)$.

Таким образом, противоречие возникает как в случае $\mathcal{N} \neq \varnothing$, так и в случае $\mathcal{N} = \varnothing$, что и доказывает справедливость утверждения леммы. Лемма доказана. ◊

Свойства монотонности решения математической модели (6)−(10) сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* α *− произвольное положительное число и* $(c_{ik}, a^{(s)}_{ik}, a_{ik})$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$, *− решение математической модели* (6)−(10) *каскада аппаратов. Тогда* $\forall k = 1, 2, \ldots$

$c_{ik} \downarrow_x$, $c_{ik} \uparrow_t$, $a_{ik}^{(s)} \downarrow_x$, $a_{ik}^{(s)} \uparrow_t$, $a_{ik} \uparrow_r$, $a_{ik} \downarrow_x$, $a_{ik} \uparrow_t$, $i = 1,\dots,n$, $\forall (x,t) \in [0,\ell]\times[0,T]$ *функция* $a_{ik}(r,x,t)$ *выпукла по* r *на отрезке* $[0,1]$ *и*

$$\textbf{1°, 2°)}\quad a_{ik}(r,x,t) \le r c_{ik}(x,t), \qquad a_{ik}^{(s)} \le c_{ik}, \qquad i = 1,\dots,n,$$

$$\textbf{3°)}\quad c_{ik} \le c_{i,k+1}, \qquad a_{ik}^{(s)} \le a_{i,k+1}^{(s)}, \qquad a_{ik} \le a_{i,k+1}, \qquad i = 1,\dots,n,$$

$$\textbf{4°)}\quad c_{i+1,k} \le c_{ik}, \qquad a_{i+1,k}^{(s)} \le a_{ik}^{(s)}, \qquad a_{i+1,k} \le a_{ik}, \qquad i = 1,\dots,n-1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала свойства ***1°***, ***2°***. На первом цикле имеем $(c_{11}, a_{11}^{(s)}, a_{11}) = \Re_\alpha(1,0)$. Поскольку $(1,0) \in C_0 \times \mathcal{A}_0(1)$ то, в силу леммы 3, $(c_{11}, a_{11}^{(s)}, a_{11}) \in C \times \mathcal{A}^{(s)} \times \mathcal{A}(1)$ и соотношения ***1°***, ***2°*** с $k = 1$, $i = 1$ выполнены. Далее, заметим, что $(c_{11}(\ell,t),0) \in C_0 \times \mathcal{A}_0(c_{11}(\ell,0))$. Поэтому, в силу леммы 3, $(c_{21}, a_{21}^{(s)}, a_{21}) = \Re_\alpha(c_{11}(\ell,t),0) \in C \times \mathcal{A}^{(s)} \times \mathcal{A}(c_{11}(\ell,t))$ и свойства ***1°***, ***2°*** имеют место для $k = 1$, $i = 2$. Так же анализируются случаи $k = 1$, $i = 3,\dots,n$. При переходе на второй и следующие циклы ($k \ge 1$) используются формулы (18) и последовательно по $i = 1,\dots,n$ проверяется условие леммы 3 для пар функций $(c_{i-1,k}(\ell,t), a_{i+1,k-1}(r,x,T))$.

Свойства ***3°***, ***4°*** доказываются аналогично путем последовательного применения леммы 2. Теорема доказана. ◊

Замечание. Используя оценки, полученные в ходе доказательства леммы 3, можно показать, что $\forall\, i,k$ имеют место такие строгие неравенства:

$$(c_{ik})'_x < 0, \qquad (a_{ik}^{(s)})'_t > 0 \qquad \forall (x,t) \in [0,\ell]\times[0,T],$$

$$(c_{ik})'_t > 0, \qquad (a_{ik}^{(s)})'_x < 0 \qquad \forall (x,t) \in [0,\ell]\times(0,T],$$

$$(a_{ik})'_x < 0, \qquad (a_{ik})'_t > 0, \qquad (a_{ik})'_r > 0, \qquad (a_{ik})''_{rr} > 0,$$

$$\forall (r,x,t) \in (0,1]\times[0,\ell]\times(0,T].$$

5. Установившийся режим работы каскада. Обозначим через B_i^n, $i = 1,\dots,4$, декартовое произведение n банаховых пространств B_i с обычной max-нормой. Равенства $(c_1, a_1^{(s)}, a_1) = \Re_\alpha(1,\varphi_1)$, $(c_2, a_2^{(s)}, a_2) = \Re_\alpha(c_1(\ell,t),\varphi_2)$, …, $(c_n, a_n^{(s)}, a_n) = \Re_\alpha(c_{n-1}(\ell,t),\varphi_n)$ определяют линейные ограниченные операторы $\mathcal{A}_\alpha : B_2^n \to B_4^n$, $\mathcal{A}_\alpha^{(s)}$, $C_\alpha : B_2^n \to B_3^n$, заданные формулами $C_\alpha \boldsymbol{\varphi} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\mathcal{A}_\alpha^{(s)} \boldsymbol{\varphi} = (a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \dots, a_n^{(s)})$, $\mathcal{A}_\alpha \boldsymbol{\varphi} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ − произвольная вектор-функция из пространства B_2^n. Зададим формулой $\mathcal{P}_\alpha \boldsymbol{\varphi} = (a_2(r,x,T), a_3(r,x,T), \dots, a_n(r,x,T), 0)$ линейный ограниченный оператор $\mathcal{P}_\alpha : B_2^n \to B_2^n$, который потребуется в дальнейшем.

Введенные операторы связаны с решением математической модели каскада аппаратов следующим образом. Пусть $\boldsymbol{\varphi}_k$, $k = 1,2,\dots$, − итерационная последовательность:

$$\boldsymbol{\varphi}_{k+1} = \mathcal{P}_\alpha \boldsymbol{\varphi}_k, \qquad k = 1,2,\dots, \qquad \boldsymbol{\varphi}_1 = 0. \tag{24}$$

Тогда вектор-функции $C_\alpha \boldsymbol{\varphi}_k$, $\mathcal{A}_\alpha^{(s)} \boldsymbol{\varphi}_k$, $\mathcal{A}_\alpha \boldsymbol{\varphi}_k$ равны соответственно $(c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk})$, $(a_{1k}^{(s)}, a_{2k}^{(s)}, \dots, a_{nk}^{(s)})$, $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$, т.е. содержат компоненты решения математической модели на k-м цикле. Поэтому поведение решения математической модели при $k \to \infty$ определяется поведением последовательности $\boldsymbol{\varphi}_k$. Имеет место

Лемма 4. *Пусть* α *– произвольное положительное число. Тогда итерационная последовательность* $\boldsymbol{\varphi}_k$*, заданная рекуррентным соотношением* (24), *сходится в пространстве* B_2^n.

Доказательство. В силу теоремы 3, последовательность $\boldsymbol{\varphi}_k$ монотонно не убывает. Докажем, что она компактна в пространстве B_2^n. Для этого достаточно показать, в силу теоремы Арцела, что множество вектор-функций $\Phi = \{\boldsymbol{\varphi}_k,\ k = 1, 2, \dots\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Равномерная ограниченность Φ следует из теоремы 3: $\|\boldsymbol{\varphi}_k\| \le \|\mathbf{c}_k\| \le 1$.

Для доказательства равностепенной непрерывности множества вектор-функций Φ выберем сначала две произвольные точки r_1, r_2 из отрезка $[0,1]$. Используя теорему 3, находим, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}_k(r_1, x) - \boldsymbol{\varphi}_k(r_2, x)\| \le \left\|\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k}{\partial r}(1, x)\right\| |r_1 - r_2|.$$

Но $\boldsymbol{\varphi}_1 = 0$, а при $k > 1$ из определения $\boldsymbol{\varphi}_k$ следует оценка

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k}{\partial r}(1, x)\right\| \le \left\|\frac{\partial \mathbf{a}_{k-1}}{\partial r}(1, x, T)\right\| = \|\alpha \mathbf{c}_{k-1}(x, T) - (\alpha - 1)\mathbf{a}_{k-1}(1, x, T)\| \le \alpha.$$

Поэтому $\forall\, k = 1, 2, \dots$ и $\forall\, x \in [0, \ell]$ имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{\varphi}_k(r_1, x) - \boldsymbol{\varphi}_k(r_2, x)\| \le \alpha |r_1 - r_2|. \tag{25}$$

Далее, зафиксируем две произвольные точки x_1, x_2 из отрезка $[0, \ell]$ и покажем, что $\forall\, r \in [0,1]$ имеет место также оценка

$$|\varphi_{ik}(r, x_1) - \varphi_{ik}(r, x_2)| \le M |x_1 - x_2|, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{26}$$

где число M не зависит от r, x_1, x_2. Для этого последовательно оценим величины $\Delta\varphi_{ik}(r) = \varphi_{ik}(r, x_1) - \varphi_{ik}(r, x_2)$, $i = n, n-1, \dots$.

Поскольку $\Delta\varphi_{nk} = 0$, $k = 1, 2, \dots$, то при $i = n$ неравенство (26), очевидно, выполнено с константой $M = M_0 = 0$.

Рассмотрим $\Delta\varphi_{n-1,k}$. Так как $\Delta\varphi_{n-1,1} = 0$, то можно полагать $k > 1$. Тогда, исходя из определения $\Delta\varphi_{n-1,k}(r) = \Delta a_{n,k-1}(r, T)$, где для краткости введены обозначения $\Delta a_{ik}(r, t) = a_{ik}(r, x_1, t) - a_{ik}(r, x_2, t)$, $\Delta c_{ik}(t) = c_{ik}(x_1, t) - c_{ik}(x_2, t)$, $\Delta x = x_1 - x_2$. Заметим, что функция $\Delta a_{n,k-1}$ является решением начально-краевой задачи (12), (13) с исходными данными $\Delta\varphi_{n,k-1}$, $\Delta c_{n,k-1}$, а, следовательно, определяется ими однозначно: $\Delta a_{n,k-1} = F(\Delta\varphi_{n,k-1}, \Delta c_{n,k-1})$. Но из уравнения (15) и теоремы 3 следует, что

$$\|\Delta c_{ik}\| \le 3\alpha |\Delta x|, \qquad i = 1, \dots, n, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{27}$$

поэтому, используя формулу (14), получаем оценку: $\forall\, k = 1, 2, \dots$

$$\|\Delta\varphi_{n-1,k}\| \le \sup\{\|F(\Delta\varphi, \Delta c)\| \mid \|\Delta\varphi\| \le M_0 |\Delta x|, \|\Delta c\| \le 3\alpha |\Delta x|\} \le M_1 |\Delta x|,$$

где число M_1 не зависит от x_1, x_2. Таким образом, неравенство (26) имеет место для $i = n - 1$ с константой $M = M_1$.

Аналогично с помощью (14), (27) оцениваем $\left\|\Delta\varphi_{n-i,k}\right\|$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$\left\|\Delta\varphi_{n-i,k}\right\| \le \sup\left\{\|F(\Delta\varphi, \Delta c)\| \mid \|\Delta\varphi\| \le M_{i-1}|\Delta x|,\ \Delta\varphi(0) = 0,\ \|\Delta c\| \le ,\right.$$

$$\left. \le 3\alpha|\Delta x|\right\} \le M_i |\Delta x|,$$

где числа M_i не зависят от x_1, x_2, а $\Delta\varphi \in C[0,1]$, $\Delta c \in C[0,T]$. Полагая $M = \max\left\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}\right\}$, получаем оценку (26).

Из неравенств (25), (26) следует равностепенная непрерывность множества вектор-функций Φ. Таким образом, последовательность $\boldsymbol{\varphi}_k$ монотонно не убывает и компактна в пространстве B_2^n, а, следовательно, сходится в этом пространстве. Лемма доказана. ◊

Следующая теорема характеризует установившийся режим работы каскада аппаратов в рамках используемой математической модели.

Теорема 4. *Пусть* α *– произвольное положительное число и* $(c_{ik}, a_{ik}^{(s)}, a_{ik})$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$, *– решение математической модели каскада аппаратов. Тогда последовательности* c_{ik}, $a_{ik}^{(s)}$, a_{ik}, $i = 1, \ldots, n$, *монотонно не убывают и сходятся соответственно в пространствах* B_3 *и* B_4. *Их пределы* $c_{i\infty}$, $a_{i\infty}^{(s)}$, $a_{i\infty}$, $i = 1, \ldots, n$, *описывающие установившийся режим работы каскада, удовлетворяют следующей системе интегро-дифференциальных начально-краевых задач в области* Π *:*

$$\frac{\partial c_{i\infty}}{\partial x} + \frac{\partial a_{i\infty}^{(s)}}{\partial t} = 0, \qquad a_{i\infty}^{(s)} = 3\int_0^1 r a_{i\infty}\, dr,$$

$$\frac{\partial a_{i\infty}}{\partial t} = \frac{\partial^2 a_{i\infty}}{\partial r^2}, \qquad 0 < r < 1, \qquad 0 \le x \le \ell, \qquad 0 < t \le T,$$

$$a_{i\infty}\big|_{r=0} = 0, \qquad \left[\frac{\partial a_{i\infty}}{\partial r} + (\alpha - 1)a_{i\infty}\right]\Bigg|_{r=1} = \alpha c_{i\infty},$$

$$c_{i\infty}(0,t) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ c_{i-1,\infty}(\ell, t), & i = 2, 3, \ldots, n, \end{cases}$$

$$a_{i\infty}(r,x,0) = \begin{cases} a_{i+1,\infty}(r,x,T), & i = 1, \ldots, n-1, \\ 0, & i = n, \end{cases}$$

и обладают такими свойствами монотонности:

$$c_{i\infty}\downarrow_x,\ \ c_{i\infty}\uparrow_t,\ \ a_{i\infty}^{(s)}\downarrow_x,\ \ a_{i\infty}^{(s)}\uparrow_t,\ \ a_{i\infty}\uparrow_r,\ \ a_{i\infty}\downarrow_x,\ \ a_{i\infty}\uparrow_t,\ \ i = 1, \ldots, n,$$

$\forall (x,t) \in [0,\ell]\times[0,T]$ *функция* $a_{i\infty}(r,x,t)$ *выпукла по* r *на отрезке* $[0,1]$ *и*

$$a_{i\infty}(r,x,t) \le r c_{i\infty}(x,t), \qquad a_{i\infty}^{(s)} \le c_{i\infty}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$c_{i+1,\infty} \le c_{i\infty}, \qquad a_{i+1,\infty}^{(s)} \le a_{i\infty}^{(s)}, \qquad a_{i+1,\infty} \le a_{i\infty}, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство. В силу леммы 4, в пространстве B_2^n существует предел $\boldsymbol{\varphi}_\infty$ последовательности $\boldsymbol{\varphi}_k$. Положим $\mathbf{c}_\infty = C_\alpha \boldsymbol{\varphi}_\infty$, $\mathbf{a}_\infty^{(s)} = \mathcal{A}_\alpha^{(s)} \boldsymbol{\varphi}_\infty$, $\mathbf{a}_\infty = \mathcal{A}_\alpha \boldsymbol{\varphi}_\infty$. Так как c_{ik}, $a_{ik}^{(s)}$, a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, n$, – компоненты вектор-функций $C_\alpha \boldsymbol{\varphi}_k$, $\mathcal{A}_\alpha^{(s)} \boldsymbol{\varphi}_k$, $\mathcal{A}_\alpha \boldsymbol{\varphi}_k$, то, очевидно, они монотонно не убывают по k и сходятся к соответствующим компонентам вектор-функций $\mathbf{a}_\infty$, $\mathbf{a}_\infty^{(s)}$, $\mathbf{c}_\infty$, которые удовлетворяют указанным в теореме свойствам. Теорема доказана. ◊

1. *Аксянова А. В.* Исследование циклических адсорбционных процессов очистки сточных вод: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Казань: КГУ, 1996.
2. *Бондаренко Л. Н.* Каскад последовательно соединенных сорбционных аппаратов (нелинейный случай) // Мат. моделирование. – 1998. – **10**, № 4. – С. 41–50.
3. *Бондаренко Л. Н., Жук П. Ф.* Асимптотическое поведение решения нелинейной математической модели каскада последовательно соединенных сорбционных аппаратов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – **44**, № 7. С. 1306–1313.
4. *Венецианов Е. В., Рубинштейн Р. Н.* Динамика сорбции из жидких сред. – Москва: Наука, 1983. – 237 с.
5. *Денисов А. М., Лукшин А. В.* Математические модели однокомпонентной динамики сорбции. – Москва: Изд-во МГУ, 1989. – 71 с.
6. *Лукин В. Д., Новосельский А. В.* Циклические адсорбционные процессы: Теория и расчет. – Ленинград: Химия, 1989. – 256 с.
7. *Рода И. Г., Жук П. Ф.* Расчет каскада аппаратов с неподвижным слоем при произвольных изотермах сорбции // Химия и технология воды. – 1989. – **11**, № 6. – С. 552–554.
8. *Токмачев М. Г., Тихонов Н. А., Хамизов Р. Х.* Изучение безреагентного циклического ионообменного процесса обработки природных вод // Мат. моделирование. – 2008. – **20**, № 3. – С. 59–76.
9. *Щеглов А. Ю.* Об одной задаче динамики сорбции с диффузией внутри сорбента //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. – 2000. – № 4. – С. 19–22.
10. *Chen J. W., Cunningham R. L., Buege J. A.* Computer simulation of plantscale multicolumn adsorption processes under periodic counter-current operation // Ind. Eng. Chem. Proc. Design Develop. – 1972. – **11**, No. 3. – P. 430–436.
11. *Riegel M., Tokmachev M., Hoell W.* Kinetics of uranium sorption onto weakly basic anion exchangers // Reactive and Functional Polymers. – 2008. – **68**. – P. 1072–1080.
12. *Sung E., Han C. D., Rhee H.* Optimal design of multistage adsorption-bed systems // Amer. Inst. Chem. Eng. J. – 1979. – **25**, No. 1. – P. 87–100.
13. *Svedberg G.* Numerical solution of multicomponent adsorption process under periodic counter-current operation // Chem. Eng. Sci. – 1976. – **31**, No. 5. – P. 345–354.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КАСКАДУ СОРБЦІЙНИХ АПАРАТІВ З ДИФУЗІЄЮ ВСЕРЕДИНІ ОДНОРІДНО-ПОРИСТОГО СОРБЕНТУ

Побудовано і досліджено математичну модель каскаду сорбційних апаратів при внутрішньодифузійному процесі сорбції в гранулах однорідно-пористого сорбенту (відомими прикладами таких сорбентів є активне вугілля КАД, АГ-3, СКТ).

MATHEMATICAL MODEL OF CASCADE OF SORPTION APPARATUS WITH DIFFUSION WITHIN THE HOMOGENEOUS POROUS SORBENT

A mathematical model of the cascade of sorption apparatus at the process of sorption in intradiffusion granules of homogeneously porous sorbent is constructed and analyzed (known examples of such adsorbents are some activated carbons).

[1] Нац. авиац. ун-т, Киев,
[2] Нац. ун-т гос. налоговой службы, Ирпень

Получено
01.02.10