

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА R -ФУНКЦИЙ

Рассматривается математическое и компьютерное моделирование осесимметричных течений. Построена математическая модель движения вязкого несжимаемого осесимметричного потока жидкости в каналах сложного сечения. Разработано программное обеспечение для численной реализации этой модели с использованием метода R -функций в системе POLE. Приведены результаты вычислительных экспериментов. Показаны реальные устройства, разработанные с использованием предложенного подхода.

Разработка многих устройств и технологий основана на изучении характеристик гидродинамических потоков. В настоящее время при исследовании различных процессов все большее предпочтение отдается математическому моделированию и вычислительному эксперименту. Однако, для того чтобы результаты моделирования соответствовали реальному процессу, необходимы корректные математические модели и эффективные методы решения поставленных на их базе задач. При решении задач гидродинамики важным является адекватный учет геометрической информации о каналах, который реализуется в различных вычислительных методах с разной степенью эффективности. Метод R -функций (RFM), разработанный академиком НАН Украины В. Л. Рвачёвым [7, 9, 11], позволяет учесть геометрическую информацию о каналах на аналитическом уровне и точно удовлетворить граничным условиям.

Течения, симметричные относительно некоторой оси, представляют собой широкий класс. Сюда относятся течения через различные сопла кругового сечения, конфузоры, диффузоры, обтекание тел вращения и др. При расчетах таких течений в основном используют методы для произвольных трехмерных областей [14, 17]. В таком случае моделирование проводится на базе системы уравнений Навье – Стокса для физических переменных (составляющих скорости V_1, V_2, V_3 и давления P). Учет симметрии позволяет понизить порядок системы и тем самым существенно сократить время вычислений. В двумерном случае расчет течений можно проводить на основе уравнений для функции тока и вихря, а также уравнения Пуассона для статического давления [16]. Также в двумерном случае из системы можно исключить уравнение для вихря и свести систему уравнений Навье – Стокса к последовательности уравнений для функции тока и статического давления [2]. В случае трехмерного пространства ввести функцию тока в общем случае нельзя, однако в осесимметричном случае функция тока существует, и моделирование можно вести на основе уравнения для этой функции тока [12].

В предлагаемой работе рассматривается метод решения гидродинамических задач в осесимметричных каналах с использованием метода R -функций на базе уравнений для функции тока и статического давления. Применение этого метода для плоских каналов рассматривалось в работах [1, 2, 10, 13]. Осесимметричный случай рассматривался в работах [4, 12], в которых была осуществлена постановка осесимметричной задачи в виде уравнений для функции тока и статического давления. В работе детально описаны и выведены граничные условия для уравнения Навье – Стокса относительно функции тока и уравнения Пуассона относительно функции статического давления, представлена последовательность линеаризованных уравнений для функции тока, а также структуры решения поставленных

краевых задач. Этот комплекс задач для осесимметричных каналов впервые численно решен с применением метода R -функций.

Целью исследований является построение математической модели движения вязкой несжимаемой жидкости в осесимметричных каналах, применение метода R -функций совместно с методом наименьших квадратов при решении соответствующих задач математической физики и разработка программного обеспечения для расчета полей скоростей и давления в гидродинамических потоках.

Расчет полей скоростей и давления позволяет определять кавитационные зоны в потоке, вычислять количество диссипированной энергии [1, 15], а также другие характеристики гидродинамических процессов, протекающих в элементах машин и аппаратов, что является востребованным при их проектировании. Поэтому такие исследования являются актуальными.

Постановка задачи для поля скоростей. Система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах (r, φ, z) имеет следующий вид [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где (1)–(3) – уравнения Навье – Стокса; (4) – уравнение неразрывности движения; оператор Δ определяется формулой

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Для стационарного и осесимметричного случая эта система уравнений в безразмерном виде преобразуется в следующую:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right), \quad (5)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

где Re – число Рейнольдса, p – безразмерное давление.

Продифференцировав уравнение (5) по z , а (6) – по r и вычитая из первого полученного уравнения второе, исключим члены с давлением p и введем функцию тока ψ с помощью соотношений

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

В результате проведенных преобразований получим нелинейное уравнение 4-го порядка для определения функции тока ψ :

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \\
& -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} + \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \right. \\
& \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0. \tag{8}
\end{aligned}$$

Граничные условия для этого уравнения формулируем как условия прилипания на твердой стенке, условия непроницаемости на оси симметрии и задания скорости течения на входе.

Из условия прилипания на твердой стенке $v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$, $v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = (\nabla \psi, \mathbf{\tau}) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = (\nabla \psi, \mathbf{n}) = 0.$$

Так как $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$ на стенке, то функция тока $\psi = \text{const}$ на твердой стенке.

Из условий непроницаемости на оси симметрии $v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = f(z)$, $v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = rf(z)|_{r=0}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, то на оси симметрии $\psi = \text{const}$.

На входе в канал задается распределение скорости, по которому определяется функция тока. Более подробно граничные условия будут рассмотрены на примере течения жидкости через форсунку [4]. Если распределение скорости на выходе известно (например, установившееся ламинарное течение Пуазейля [6]), то его также можно задать.

Постановка задачи для поля статического давления. После построения решения для функции тока давление определяем из уравнения Пуассона [2, 10], правая часть которого выражается через производные функции тока:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \right. \\
\left. - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right) \right]. \tag{9}
\end{aligned}$$

Рассмотрим граничные условия для этого уравнения. Из уравнений Навье – Стокса (5), (6) получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial r} = -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\
\frac{\partial p}{\partial z} = -v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).
\end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial P}{\partial n} = (\nabla P, \mathbf{n})$, учитывая условие прилипания на твердой

стенке ($v_z = 0$, $v_r = 0$), имеем

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} \Delta v_z, \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_r \right), \mathbf{n} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \Delta((v_z, v_r), \mathbf{n}) = \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_n.$$

Здесь v_n – нормальная компонента скорости к твердой стенке. Пусть твердая стенка описывается уравнением $s(z, r) = 0$, где $s(z, r)$ – функция, нормализованная до первого порядка. Тогда

$$v_n = (\mathbf{V}, \mathbf{n}) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial r}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial r} \right).$$

Для некоторых задач можно использовать упрощенное условие, считая, что нормальная компонента скорости на твердой стенке в некоторой части пограничного слоя отсутствует. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_n = 0. \quad (10)$$

Учитывая условие непроницаемости на оси симметрии ($v_r = 0$), имеем

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right).$$

Поскольку $v_r = 0$ на оси Oz , то $\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = 0$.

Рассмотрим $\frac{\partial v_r}{\partial r}$ на оси симметрии. Пусть $\frac{\partial v_r}{\partial r} = f(z)$. Введем новую функцию $\tilde{V}(z, r)$, доопределив $V(z, r)$ для отрицательных r следующим образом: $\tilde{V}(z, r) = \begin{cases} V(z, r), & r \geq 0, \\ V(z, -r), & r < 0, \end{cases}$ где $\tilde{V}(z, r)$ – это проекция скорости осесимметричного течения на плоскость, проходящую через центр симметрии. Таким образом:

$$\left. \frac{\partial v_r}{\partial r} \right|_{\Delta r \rightarrow +0} = f(z), \quad \left. \frac{\partial v_r}{\partial r} \right|_{\Delta r \rightarrow -0} = -f(z).$$

В силу гладкости функции v_r имеем $f(z) = 0$. Таким образом, $\frac{\partial v_r}{\partial r} = 0$. По

тем же соображениям (в силу гладкости функции $\frac{\partial v_r}{\partial r}$), $\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} = 0$. Следовательно, на оси симметрии

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0. \quad (11)$$

Запишем граничные условия на «входе-выходе». Пусть «вход» описывается уравнением $z = c_1$, «выход» – уравнением $z = c_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= \pm \frac{\partial p}{\partial z} = \pm \left(-v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) = \\ &= \pm \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда для случая параболического профиля скорости Пуазейля имеем

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \text{const.}$$

Рассмотрим также следующее условие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial p}{\partial r} &= \left(-v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда для случая параболического профиля скорости Пуазейля имеем

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow P = \text{const.}$$

Расчет гидродинамических характеристик в гидровихревой форсунке. Для расчета распределения поля скоростей и поля давления в потоке жидкости при протекании через форсунку необходимо последовательно решить в области Ω краевую задачу для уравнения (8) для функции тока ψ , затем – краевую задачу для уравнения (9) относительно функции P . Для решения используем метод R -функций [9]. Пусть область Ω (см. рис. 1) описывается уравнением $\omega(z, r) \geq 0$, функция $\omega(z, r)$ представлена на рис. 2.

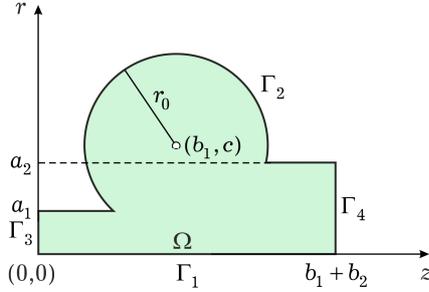


Рис. 1

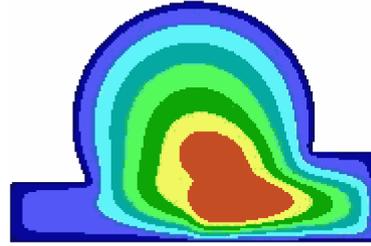


Рис. 2

Структура решения для уравнения (8) с соответствующими граничными условиями имеет вид $\psi = \psi_1 + \psi_0$ [9], где ψ_0 удовлетворяет всем граничным условиям задачи [2]

$$\psi_0 = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_i^2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^3 \frac{\Psi_i}{\omega_i^2},$$

Ψ_i – значения функции ψ , заданные на участках границы Γ_i , геометрия которых описывается уравнениями $\omega_i = 0$. Здесь

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = \frac{1}{4} a_1^2, \quad \Psi_3 = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{4a_1^2} r^4, \quad \omega_1 = r, \quad \omega_3 = z,$$

$$\omega_2 = ((z - b_1) \wedge_0 (a_2 - r) \vee_0 (a_1 - r) \vee_0 (r_0^2 - (z - b_1)^2 - (r - c)^2)).$$

Таким образом,

$$\psi_0|_{\Gamma_i} = \Psi_i, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Неизвестная функция ψ_1 с нулевыми граничными условиями Дирихле и Неймана имеет вид $\psi_1 = \omega_1^2 P_1$. Здесь $P_1 = \sum_{i=1}^N A_i \zeta_i$ – неопределенная компонента структуры; A_i – константы, которые необходимо определить; ζ_i – специальные функции, образующие базис в гильбертовом пространстве, в

котором ищем решение,

$$\omega_1 = (f_1 \wedge_0 f_2) \vee_0 (f_3 \wedge_0 f_4) \vee_0 (f_5),$$

$$\wedge_0(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \quad - R\text{-конъюнкция},$$

$$\vee_0(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \quad - R\text{-дизъюнкция},$$

$$f_1 = z(b_1 + b_2 - z)/(b_1 + b_2), \quad f_2 = r(a_1 - r)/a_1, \quad f_3 = (z - b_1),$$

$$f_4 = r(a_2 - r)/a_2, \quad f_5 = (r_0^2 - (z - b_1)^2 - (r - c)^2)/(2r_0),$$

a_1 – радиус входа в форсунку; a_2 – радиус выхода из форсунки; $b_1 + b_2$ – длина форсунки; b_1 – величина, на которую центр окружности отстоит от входа по оси Oz ; c – величина, на которую центр окружности отстоит от оси симметрии входа по оси Or ; r_0 – радиус окружности.

Уравнение (8) относительно функций ψ_1 и ψ_0 примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} + \\ & + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} - \\ & - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} \right) + \frac{2}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + \\ & + \frac{3}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) - \frac{3}{r^4} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} \right) - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} \right) = -\frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^2 \partial r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - \\ & - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} - \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z}. \end{aligned}$$

После линеаризации получим последовательность линейных уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \Psi_{n+1}}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \Psi_{n+1}}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \Psi_{n+1}}{\partial z^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \Psi_{n+1}}{\partial r^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_n}{\partial z^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial z^2 \partial r} - \\
& \quad - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_n}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial r^3} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} - \\
& \quad + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_{n+1}}{\partial z^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_{n+1}}{\partial r^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial r^2} - \\
& \quad - \frac{3}{r^4} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_{n+1}}{\partial r^2} - \frac{3}{r^4} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_n}{\partial z^3} + \\
& \quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial z^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_n}{\partial r^2 \partial z} - \\
& \quad - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \frac{\partial^2 \Psi_{n+1}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial z^2 \partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial r^3} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial r^3} \right) + \\
& \quad + \frac{2}{r^3} \left(\frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_{n+1}}{\partial z^2} \right) + \frac{3}{r^3} \left(\frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_{n+1}}{\partial r^2} \right) - \frac{3}{r^4} \left(\frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial r} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial z^3} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial z^3} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_{n+1}}{\partial r^2 \partial z} \right) - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \Psi_{n+1}}{\partial r \partial z} \right) = \\
& = -\frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial z^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial r^3} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \\
& \quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} + \\
& \quad + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial z^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \\
& \quad + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_n}{\partial z^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi_n}{\partial r^3} + \\
& \quad + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial r^2} - \frac{3}{r^4} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} + \\
& \quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_n}{\partial z^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \frac{\partial^3 \Psi_n}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial r \partial z}.
\end{aligned}$$

Задачу решаем методом наименьших квадратов [8]. Приближенное решение понимаем в смысле нормы в $L_2(\Omega)$.

Далее находим решение уравнение (9) относительно функции P в области Ω с правой частью, зависящей от найденной функции тока. Рассмотрим граничные условия краевой задачи для уравнения (9). На твердой стенке (Γ_2) и на оси симметрии (Γ_1) воспользуемся граничными условиями (10), (11): $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$. На входе в канал (Γ_4) используем граничное условие $\frac{\partial P}{\partial n} = \text{const}$. На выходе из канала (Γ_5) воспользуемся граничным условием $P = \text{const}$.

Структуру решения для уравнения (9) с соответствующими граничными условиями запишем в виде

$$P = P_2\omega_2 - \omega \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x} \frac{\partial(P_2\omega_2)}{\partial x} + \frac{\partial\omega_1}{\partial y} \frac{\partial(P_2\omega_2)}{\partial y} \right) - \omega\varphi + \omega_1^2\omega_2P_3 + C,$$

где

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \vee_0 (f_7 \wedge_0 f_4) \vee_0 (f_5),$$

$$\omega_1 = (f_1 \wedge_0 f_2) \vee_0 (f_3 \wedge_0 f_4) \vee_0 (f_5), \quad \omega_2 = (b_1 + b_2 - z),$$

$$f_7 = (z - b_1)(b_1 + b_2 - z)/b_2,$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^N C_i \zeta_i, \quad P_3 = \sum_{i=1}^N D_i \zeta_i,$$

C_i, D_i – константы, которые необходимо определить; C – значение статического давления на выходе (константа задается из физической постановки задачи). Функцию

$$\varphi = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_i} \right)^{-1} \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi_i}{\omega_i},$$

строим по формуле склейки [9]. Значения φ_i на участках границы области совпадают с производными по нормали функции P на соответствующих участках границы Γ_i , на которых задано условие Неймана:

$$\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \varphi_3 = \frac{4}{\text{Re } a_1^2}.$$

Для решения применяем метод наименьших квадратов.

Результаты вычислительных экспериментов. На рис. 3, 4 приведены результаты вычислительных экспериментов течения жидкости через модельный канал гидровихревой форсунки с использованием сплайнов 5-го порядка на сетке 40×40 с количеством итераций, равным 9.

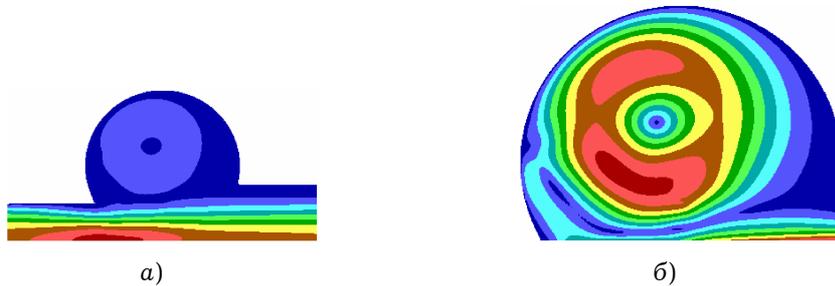


Рис. 3. Распределение модуля скорости при $\text{Re} = 200$.

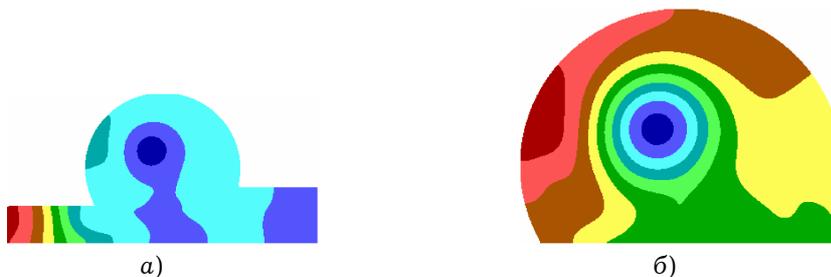


Рис. 4. Распределение статического давления при $Re = 200$.

Практическое применение. На основе приведенного математического и компьютерного моделирования разработаны высокоэффективные распыливающие устройства – гидровихревые форсунки.

Уникальная особенность такого типа форсунок состоит в возможности обеспечения подачи в камеру сгорания теплогенерирующих установок суспензионных и эмульгированных горючих, где стандартные типы форсунок неприменимы. Основной проблемой для организации устойчивого горения таких топлив является образование конгломератов наполнителя как вдоль топливоподающего тракта, так и непосредственно в камере сгорания. Наиболее эффективным способом борьбы с конгломератами является кавитация [3]. Поэтому при проектировании гидровихревых форсунок необходимо стремиться к образованию в течении интенсивных кавитационных зон. Использование предложенного подхода к моделированию распыливающих устройств для композиционных топлив позволяет существенно улучшить технические, экономические, а также экологические показатели эффективности работы энергетических установок.

На рис. 5, 6 показаны модель гидровихревой форсунки и типы реальных форсунок, на рис. 7, 8 – распыливание топлива и сжигание суспензионного композиционного топлива с использованием биоила очистных сооружений в качестве наполнителя.

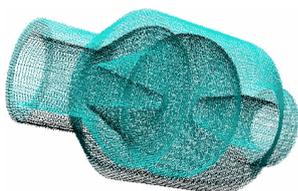


Рис. 5. Модель гидровихревой форсунки.



Рис. 6. Типы гидровихревых форсунок.



Рис. 7. Распыливание топлива и определение дисперсности распыла по лазерному методу.



Рис. 8. Экспериментальная установка по сжиганию композиционного топлива.

Выводы. Построена математическая модель осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости по каналам сложного профиля в виде последовательности уравнений для функций тока и статического давления. Разработано программное обеспечение для решения соответствующих задач в системе *POLE* с применением метода *R*-функций. Универсальность метода и программы позволяют проводить многопараметрические численные эксперименты для различных каналов. Приведены результаты вычислений для течения жидкости через модельный канал гидровихревой форсунки. На основе расчетов гидродинамических полей в каналах гидровихревых форсунок разработаны и созданы уникальные распыливающие устройства, позволяющие качественно распыливать суспензионные и эмульгированные композиционные топлива. Использование таких форсунок для сжигания композиционных топлив позволяет существенно улучшить технико-экономические и экологические показатели эффективности работы энергетических установок.

1. Баранов И. А., Кравченко О. В., Суворова И. Г. Метод *R*-функций для расчета взаимосвязанных полей в гидротоках // Вісн. Харків. нац. ун-ту. – 2007. – № 780. – С. 9–18.
2. Баранов И. А., Кравченко О. В., Суворова И. Г. Расчет гидродинамических характеристик потока вязкой несжимаемой жидкости методом *R*-функций // Вісн. Харків. нац. ун-ту. – 2008. – № 809. – С. 9–19.
3. Кравченко О. В., Суворова И. Г., Бастеев А. В. Совершенствование технологии добычи, переработки и использования углеводородных энергоносителей на основе интенсификации физико-химических процессов // Proc. conf. «Efektywność Energetyczna-2009», Krakow, 21–23 wrzesnia, 2009. – P. 214–218.
4. Кравченко О. В., Суворова И. Г., Смирнов Я. В., Холубцев С. С. Математическое и компьютерное моделирование кавитационных потоков в сложнополостных каналах // Проблемы машиностроения. – 2007. – 10, № 3. – С. 22–26.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Т. 6. Гидродинамика. – Москва: Наука, 1988. – 736 с.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – Москва: Дрофа, 2003. – 840 с.
7. Максименко-Шейко К. В. *R*-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. – Харьков: Ин-т проблем машиностроения НАН Украины, 2009. – 306 с.
8. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – Москва: Наука, 1970. – 512 с.
9. Рвачев В. Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
10. Рвачев В. Л., Суворова И. Г., Шейко Т. И. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом *R*-функций в системе «Поле-3» // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 33. – С. 95–99.
11. Рвачев В. Л., Шейко Т. И., Шапиро В. Метод *R*-функций (*RFM*) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 1. – С. 146–159.
То же: Rvachev V. L., Sheyko T. I., Shapiro V. The *R*-function method in boundary-value problems with geometric and physical symmetry // J. Math. Sci. – 1999. – 97, No. 1. – P. 3888–3899.
12. Суворова И. Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. нац. техн. ун-та «ХПИ». – 2004. – № 31. – С. 141–148.
13. Суворова И. Г., Кравченко О. В. Математическое моделирование потока жидкости методом *R*-функций // Системні технології. – 2006. – Вип. 4 (45). – С. 57–69.
14. Chung T. J. Computational fluid dynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. – 1012 p.
15. Meinhard T. Schobeiri. Fluid mechanics for engineers: A Graduate Textbook. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. – 504 p.
16. Roache Patrick J. Computational fluid dynamics. – Albuquerque: Hermosa publishers, 1972. – 434 p.
17. Wesseling P. Principles of computational fluid dynamics. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2001. – 644 p.

**МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ
ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСКУВАНОЇ РІДИНИ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ R -ФУНКЦІЙ**

Розглядається математичне і комп'ютерне моделювання осесиметричних течій. Побудовано математичну модель руху в'язкого нестискуваного осесиметричного потоку рідини в каналах складного перерізу. Розроблено програмне забезпечення для числової реалізації цієї моделі з використанням методу R -функцій в системі POLE. Наведено результати обчислювальних експериментів. Проілюстровано реальні пристрої, розроблені з використанням запропонованого підходу.

**MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING OF AXISYMMETRIC FLOWS
OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLUID WITH THE USE OF R -FUNCTION METHOD**

Mathematical and computer modeling of axisymmetric flows is considered. A mathematical model of viscous incompressible axisymmetric flow motion of fluid in the channels of complex section is constructed. The software for numerical realization of this model is worked out on the basis of R -function method in the programme system POLE. The results of numerical experiments are presented. The devices which are developed with the use of proposed method are illustrated.

Ин-т проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено
18.05.10