

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ С ОСЕВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

*Рассматривается неосесимметричная задача о свободных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров для некоторых типов граничных условий на торцах. Пьезокерамика поляризована в осевом направлении. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних нагрузок и покрыты тонкими электродами, которые закорочены. После разделения переменных и представления компонент вектора перемещений и электростатического потенциала в виде стоячих волн в окружном направлении, исходная трехмерная задача сводится к двумерной. Метод решения задачи основан на комбинации метода сплайн-коллокаций по продольной координате и метода дискретной ортогонализации в комбинации с пошаговым поиском по радиальной координате. Приведены результаты численного анализа цилиндра из пьезокерамики PZT 4 в широком диапазоне изменения геометрических характеристик цилиндра.*

Пьезокерамические конструкционные элементы цилиндрической формы широко применяются в радиоэлектронике, различных автоматических устройствах, в вычислительной и измерительной техники. Высокая эффективность преобразования электронной энергии в механическую и обратный процесс при сравнительно малых размерах дают возможность использовать такие материалы в нанотехнологиях.

Решение динамических задач для толстостенных элементов как пространственных задач теории упругости связано со значительными трудностями, обусловленными сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных, а также необходимостью удовлетворять краевым условиям на ограничивающих тело поверхностях. Эти трудности существенно возрастают в условиях связанности полей и анизотропии пьезоэлектрических материалов [1, 2, 8, 9]. Поэтому возникает необходимость разработки эффективных численно-аналитических подходов для решения отмеченных классов задач. В последнее время в задачах вычислительной математики, математической физики и механики для решения таких задач широко используются сплайн-функции. Это объясняется преимуществами аппарата сплайн-приближений по сравнению с другими. К числу основных преимуществ можно отнести следующие: устойчивость сплайнов относительно локальных возмущений, т.е. поведение сплайна в окрестности точки не оказывает влияния на поведение сплайна в целом, как, например, это имеет место при полиномиальном приближении – хорошая сходимости сплайн-интерполяции в отличие от многочленной; простота и удобство реализации алгоритмов построения и вычисления сплайнов на персональных компьютерах. Будем применять метод решения, основанный на комбинации метода сплайн-коллокаций, метода дискретной ортогонализации и метода пошагового поиска, который для исследования напряженно-деформированного состояния и анализа спектра свободных колебаний упругих тел применялся в работах [3–5, 7, 13].

Следует отметить, что в литературе известны только отдельные работы, посвященные исследованию проблемы колебаний пьезокерамических цилиндров конечной длины, выполненные в рамках трехмерной теории упругости [10–12, 14, 15]. В работе [6] исследовались свободные осесимметричные колебания полых пьезокерамических цилиндров с поляризацией пьезокерамики в осевом направлении.

Целью настоящей работы является исследование собственных неосесимметричных колебаний пьезокерамических цилиндров конечной длины из пьезокерамики, поляризованной в осевом направлении. При этом боко-

вые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты тонкими электродами, которые закорочены. На торцах цилиндра рассматривается жесткая заделка.

Сформулированная задача описывается взаимосвязанной системой уравнений, состоящей из

– неосесимметричных уравнений движения в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– уравнений электростатики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0, \\ E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2)$$

– соотношений Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \\ 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\rho$  – плотность материала;  $\omega$  – круговая частота;  $u_i$  – компоненты вектора перемещений;  $D_i$  – компоненты вектора электрической индукции;  $E_i$  – компоненты вектора напряженности электрического поля;  $\varphi$  – электростатический потенциал;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в осевом направлении, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_z, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_z, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z, \\ \sigma_{\theta z} &= 2c_{55}\varepsilon_{\theta z} - e_{15}E_\theta, \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r, \quad \sigma_{r\theta} = 2c_{66}\varepsilon_{r\theta}, \\ D_z &= e_{13}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_z, \\ D_r &= 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_r, \quad D_\theta = 2e_{15}\varepsilon_{\theta z} + \varepsilon_{11}E_\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $c_{ij}$  – компоненты тензора модулей упругости;  $e_{ij}$  – компоненты тензора пьезомодулей;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра  $r = R_0 \pm h$  задаются следующие:

– поверхности свободны от внешних усилий:  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$ , и либо покрыты тонкими электродами, которые закорочены:  $\varphi = 0$ , либо неэлектродированы:  $D_r = 0$ ;

– торцы цилиндра ( $z = \pm L/2$ ) жестко защемлены:  $u_r = 0$ ,  $u_\theta = 0$ ,  $u_z = 0$  и свободны от электродов:  $D_z = 0$ .

Тут  $R_0$  – радиус срединной поверхности цилиндра;  $h$  – половина толщины цилиндра;  $L$  – длина цилиндра.

Подставив соотношения (3) и (4) в уравнения (1) и (2) и разрешив их относительно  $\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$ , получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{1}{\tilde{c}_{11}} \left( \frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_r - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \\
&\quad - \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \\
&\quad - \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \\
\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} &= - \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{\tilde{c}_{66}} \left( \frac{\tilde{c}_{66}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_\theta - \\
&\quad - \frac{\tilde{c}_{11}}{\Omega^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \\
&\quad - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}, \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= - \left( 1 + \frac{\Lambda_4}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left( 1 + \frac{\Lambda_4}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \left( 1 + \frac{\Lambda_4}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \frac{\tilde{e}_{11} \Omega^2}{\Delta} u_z - \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\Lambda_5}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\Lambda_6}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= \frac{\Lambda_1}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\Lambda_1}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{\Lambda_1}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} \Omega^2 u_z + \\
&\quad + \frac{\Lambda_2}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\Lambda_3}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta &= \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{15}^2, \\
\Lambda_1 &= \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{13} - \tilde{c}_{13} \tilde{e}_{15}, \quad \Lambda_2 = \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33} - \tilde{c}_3 \tilde{e}_{15}, \quad \Lambda_3 = \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33} \\
\Lambda_4 &= \tilde{c}_{13} \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{13} \tilde{e}_{15}, \quad \Lambda_5 = \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33}, \quad \Lambda_6 = \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{33} \tilde{e}_{11}, \tag{6}
\end{aligned}$$

а также безразмерные величины

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}, \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}, \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\epsilon_0 \lambda}}, \quad \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0}, \tag{7}$$

где  $\omega$  – круговая частота;  $\lambda = 10^{10}$  Па;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Учитывая замкнутость цилиндрического тела в направлении окружной координаты, компоненты вектора смещений и электростатический потенциал представим в виде стоячей волны в окружном направлении:

$$\begin{aligned}
u_r &= h u_1(r, z) \cos m\theta, & u_\theta &= h u_2(r, z) \sin m\theta, \\
u_z &= h u_3(r, z) \cos m\theta, & \varphi &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_0}} u_4(r, z) \cos m\theta. \tag{8}
\end{aligned}$$

Далее используем метод разделения переменных – функции  $u_1(r, z)$ ,  $u_2(r, z)$ ,  $u_3(r, z)$ ,  $u_4(r, z)$  ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_1(x) \varphi_{1i}(z), & u_2(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_2(x) \varphi_{1i}(z), \\ u_3(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_3(x) \varphi_{2i}(z), & u_4(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_4(x) \varphi_{2i}(z). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $x = \frac{r - R_0}{h}$ ;  $R_0 = \frac{R_+ + R_-}{2}$ ;  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , – искомые функции по переменной  $x$ ;  $\varphi_{ji}(z)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , – линейные комбинации  $B$ -сплайнов на равномерной сетке  $\Delta$ ;  $-\frac{L}{2} = z_0 < z_1 < \dots < z_n = \frac{L}{2}$ . Принимая во внимание граничные условия на торцах цилиндра при  $z = -\frac{L}{2}$  и  $z = \frac{L}{2}$  можно заметить, что в систему входят производные от компонент вектора решения, не выше второго порядка, следовательно, можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьего порядка.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_j &= [\varphi_{ji}(\xi_k)], & v_n &= [u_{n0}, u_{n1}, \dots, u_{nN}]^\top, & k, i &= 0, \dots, N, & j &= 1, 2, \\ \bar{a}_{k\ell}^\top &= \{a_{k\ell}(x, \xi_0, \Omega^2), a_{k\ell}(x, \xi_1, \Omega^2), \dots, a_{k\ell}(x, \xi_N, \Omega^2)\}, \\ & & (k, \ell) &\in \{(k, \ell) \mid k, \ell = 1, \dots, 8\}, \end{aligned} \quad (10)$$

система (5) превратится в систему  $8(N+1)$  линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $v_i, \tilde{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dx} &= \tilde{v}_i, & i &= 1, \dots, 4, \\ \frac{d\tilde{v}_1}{dx} &= \Phi_1^{-1}[(a_{11}\Phi_1 + a_{12}\Phi_1'')v_1 + a_{13}\Phi_1\tilde{v}_1 + a_{14}\Phi_2v_2 + \\ & & & + a_{15}\Phi_2\tilde{v}_2 + a_{16}\Phi_1'\tilde{v}_3 + \bar{a}_{17}\Phi_1'\tilde{v}_4], \\ \frac{d\tilde{v}_2}{dx} &= \Phi_2^{-1}[a_{21}\Phi_1v_1 + a_{22}\Phi_1\tilde{v}_1 + (a_{23}\Phi_2 + a_{24}\Phi_2'')v_2 + \\ & & & + a_{25}\Phi_2\tilde{v}_2 + a_{26}\Phi_1'\tilde{v}_3 + a_{27}\Phi_1'\tilde{v}_4], \\ \frac{d\tilde{v}_3}{dx} &= \Phi_1^{-1}[a_{31}\Phi_1'v_1 + a_{32}\Phi_1'\tilde{v}_1 + a_{33}\Phi_2'v_2 + (a_{34}\Phi_1 + \\ & & & + a_{35}\Phi_1'')v_3 + a_{36}\Phi_1\tilde{v}_3 + a_{37}\Phi_1''v_4], \\ \frac{d\tilde{v}_4}{dx} &= \Phi_1^{-1}[a_{41}\Phi_1'v_1 + a_{42}\Phi_1\tilde{v}_1 + a_{43}\Phi_2'v_2 + (a_{44}\Phi_1 + a_{45}\Phi_1'')v_3 + \\ & & & + (a_{46}\Phi_1 + a_{47}\Phi_1'')v_4 + a_{48}\Phi_1\tilde{v}_4]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left( \frac{m^2 \tilde{c}_{66} + \tilde{c}_{11}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{11}}, & a_{12} &= -\frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}}, & a_{13} &= -\frac{1}{x}, \\ a_{14} &= -\frac{m(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{11}x^2}, & a_{15} &= -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}x}, & a_{16} &= -\frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}}, \\ a_{17} &= -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}}, & a_{21} &= \frac{m(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{66}x^2}, & a_{22} &= \frac{m(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{66}x}, \\ a_{23} &= \left( \frac{m^2 \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{66}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{24} &= -\frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}}, & a_{25} &= -\frac{1}{x}, & a_{26} &= \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{x}, \\
a_{27} &= \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{x}, & a_{31} &= -\left(1 + \frac{\Delta_4}{\Delta}\right) \frac{1}{x}, & a_{32} &= -\left(1 + \frac{\Delta_4}{\Delta}\right), \\
a_{33} &= -\left(1 + \frac{\Delta_4}{\Delta}\right) \frac{m}{x}, & a_{34} &= \left(\frac{m^2 \Delta}{x^2} - \tilde{\epsilon}_{33} \Omega^2\right) \frac{1}{\Delta}, & a_{35} &= -\frac{\Delta_5}{\Delta}, \\
a_{36} &= -\frac{1}{x}, & a_{37} &= \frac{\Delta_6}{\Delta}, & a_{41} &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1}{x}, & a_{42} &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, & a_{43} &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{m}{x}, \\
a_{44} &= -\frac{\tilde{e}_{15} \Omega^2}{\Delta}, & a_{45} &= \frac{\Delta_2}{\Delta}, & a_{46} &= \frac{m^2}{x^2}, & a_{47} &= -\frac{\Delta_3}{\Delta}, & a_{48} &= -\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Эту систему можно привести к виду

$$\frac{d\bar{\mathcal{R}}}{dx} = A(x, \Omega)\bar{\mathcal{R}}, \quad (12)$$

где  $\bar{\mathcal{R}} = \{v_1, \tilde{v}_1, v_2, \tilde{v}_2, v_3, \tilde{v}_3, v_4, \tilde{v}_4\}$ , а ненулевые элементы матрицы  $A$  представим так:

$$\begin{aligned}
A_{12} &= 1, & A_{21} &= \Phi_1^{-1}(a_{11}\Phi_1 + a_{12}\Phi_1'), & A_{22} &= \Phi_1^{-1}a_{13}\Phi_2, \\
A_{23} &= \Phi_1^{-1}a_{14}\Phi_2, & A_{24} &= \Phi_1^{-1}a_{15}\Phi_2, & A_{25} &= \Phi_1^{-1}a_{16}\Phi_1', \\
A_{26} &= \Phi_1^{-1}a_{17}\Phi_1', & A_{34} &= 1, & A_{41} &= \Phi_2^{-1}a_{21}\Phi_1, \\
A_{42} &= \Phi_2^{-1}a_{22}\Phi_1, & A_{43} &= \Phi_2^{-1}(a_{23}\Phi_2 + a_{24}\Phi_2''), \\
A_{44} &= \Phi_2^{-1}a_{25}\Phi_2, & A_{45} &= \Phi_2^{-1}a_{26}\Phi_1', & A_{46} &= \Phi_2^{-1}a_{27}\Phi_1', \\
A_{56} &= 1, & A_{61} &= \Phi_1^{-1}a_{31}\Phi_1', & A_{62} &= \Phi_1^{-1}a_{32}\Phi_1', \\
A_{63} &= \Phi_1^{-1}a_{33}\Phi_2', & A_{64} &= \Phi_1^{-1}(a_{34}\Phi_1 + a_{35}\Phi_1''), \\
A_{65} &= \Phi_1^{-1}a_{36}\Phi_1, & A_{66} &= \Phi_1^{-1}a_{37}\Phi_1'', & A_{78} &= 1, \\
A_{81} &= \Phi_1^{-1}a_{41}\Phi_1', & A_{82} &= \Phi_1^{-1}a_{42}\Phi_1, \\
A_{83} &= \Phi_1^{-1}a_{43}\Phi_2', & A_{84} &= \Phi_1^{-1}(a_{44}\Phi_1 + a_{45}\Phi_1''), \\
A_{85} &= \Phi_1^{-1}(a_{46}\Phi_1 + a_{47}\Phi_1''), & A_{86} &= \Phi_1^{-1}a_{48}\Phi_1.
\end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь вид

$$B_1 \bar{\mathcal{R}}(-1) = 0, \quad B_2 \bar{\mathcal{R}}(1) = 0.$$

Здесь ненулевые элементы матриц  $B_1$  и  $B_2$  представим так:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \tilde{c}_{12} \frac{1}{x} \Phi_1, & b_{12} &= \tilde{c}_{11} \Phi_1, & b_{13} &= \tilde{c}_{12} \frac{m}{x} \Phi_1, & b_{15} &= \tilde{c}_{13} \Phi_1', \\
b_{17} &= \tilde{e}_{13} \Phi_1', & b_{21} &= -\tilde{c}_{66} \frac{m}{x} \Phi_1, & b_{23} &= -\tilde{c}_{66} \frac{1}{x} \Phi_2, & b_{24} &= \tilde{c}_{66} \Phi_2, \\
b_{31} &= \tilde{c}_{55} \Phi_1', & b_{36} &= \tilde{c}_{55} \Phi_1, & b_{38} &= \tilde{e}_{15} \Phi_1, & b_{47} &= \Phi_1,
\end{aligned}$$

для случая, когда торцы цилиндра покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами, если же торцы цилиндра неэлектрофицированы последняя строка матрицы будет иметь вид:

$$b_{41} = \tilde{e}_{15} \Phi_1', \quad b_{46} = \tilde{e}_{15} \Phi_1, \quad b_{47} = -\tilde{e}_{11} \Phi_1'.$$

На рис. 1 представлена зависимость первых пяти собственных частот от относительной длины цилиндра. Внешний радиус цилиндра  $R_+ = 5$ , внутренний радиус  $R_- = 2$ . Количество полуволн в окружном направлении  $m = 2$ . Сплошными линиями изображены значения собственных частот с учетом пьезоэффекта (материал цилиндра – пьезокерамика PZT 4), штриховыми – без учета пьезоэффекта ( $e_{ij} = 0$ ). Из анализа приведенных графиков следует, что при определении первых двух собственных частот влиянием пьезоэффекта можно пренебречь на всем рассматриваемом диапазоне (на рис. 1 кривые зависимостей при  $k = 1, 2$  совпадают). Для высших собственных частот влияние пьезоэффекта более существенно.

На рис. 2 представлена зависимость первых пяти собственных частот от внутреннего радиуса цилиндра  $R_-$ , при этом остаются фиксированными длина цилиндра ( $L = 5$ ) и внешний диаметр ( $R_+ = 5$ ). Рассматривается изменение внутреннего радиуса в диапазоне от 0.05 до 4.5 безразмерных единиц. Материал цилиндра так же пьезокерамика PZT 4. Количество полуволн в окружном направлении  $m = 2$ . Сплошным линиям соответствуют частоты собственных колебаний пьезокерамических цилиндров, штриховым – собственные частоты колебаний упругих цилиндров ( $e_{ij} = 0$ ). Анализ приведенных графиков показывает, что при увеличении толщины цилиндра происходит увеличение значений собственных частот колебаний. Причем можно отметить, что только для первых четырех частот влияние пьезоэффекта на спектр собственных частот незначительно. Для более высоких частот наблюдается увеличение влияния пьезоэффекта на собственные частоты несимметричных колебаний.

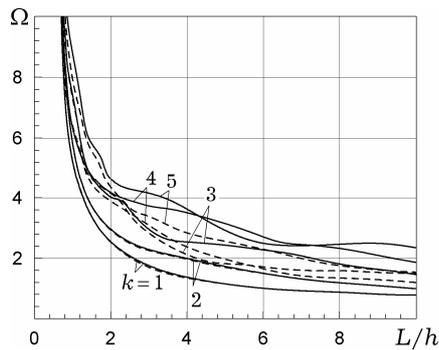


Рис.1

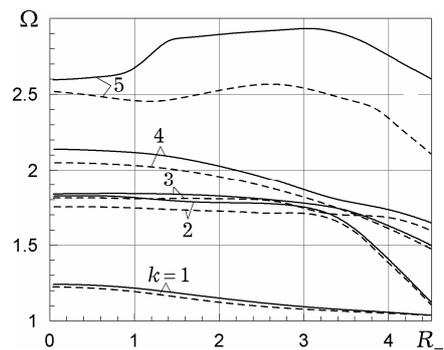


Рис. 2

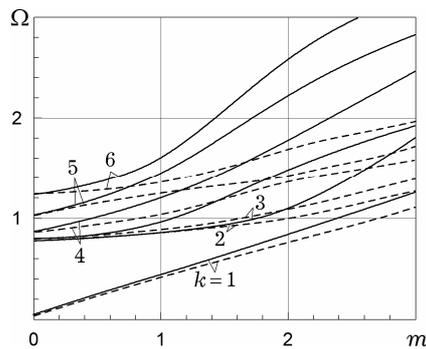


Рис. 3

На рис. 3 представлена зависимость первых шести частот собственных колебаний от числа полуволн  $m$  в окружном направлении. Хотя промежуточные значения собственных частот между целыми значениями числа по-

луволен не имеют физического смысла, для большей наглядности зависимости они соединены линией. Сплошной линией соединены значения частот собственных колебаний для случая пьезокерамического цилиндра, пунктирной – для случая упругого цилиндра ( $e_{ij} = 0$ ). Из представленного рисунка можно заметить, что наименьшее влияние пьезоэффект оказывает на первую собственную частоту. На вторую собственную частоту влияние пьезоэффекта незначительно лишь для области малых значений  $m$  (при  $m \leq 2$ ). С ростом числа полуволен в окружном направлении наблюдается увеличение влияния пьезоэффекта на спектр собственных частот.

Таким образом, предложенная численно-аналитическая методика представляет собой эффективный алгоритм для исследования спектральных характеристик пьезокерамических цилиндров в широком диапазоне изменения их геометрических и физических характеристик. Учитывая тот факт, что интегрирование системы (12) выполняется устойчивым методом дискретной ортогонализации в радиальном направлении, это дает возможность легко учесть неоднородность цилиндра в этом направлении. Причем речь может идти как о структурной неоднородности (слоистость), так и о физической неоднородности (зависимость констант, входящих в физические соотношения (4), от радиальной координаты).

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій Р. С. Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 75–84.
2. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Особливості числового розв'язування зв'язаних задач про визначення електромагнітних, теплових і механічних полів у деформованих термочутливих електропровідних тілах за квазіусталених електромагнітних навантажень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 166–177.
3. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – **46**, № 10. – С. 74–85.
4. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П. О напряженном состоянии прямоугольных в плане нетонких ортотропных оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 91–102.
5. Григоренко Я. М., Яремченко С. Н. Анализ напряженного состояния ортотропных эллиптических оболочек в уточненной постановке при изменении геометрических параметров // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 9. – С. 53–62.
6. Григоренко О. Я., Ефимова Т. Л., Лоза І. А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 112–120.  
То же: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Loza I. A. Solution of an axisymmetric problem of free vibrations of piezoceramic hollow cylinders of finite length by the spline collocation method // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 2. – P. 290–300.
7. Григоренко Я. М., Авраменко О. А. Исследование напряженно-деформированного состояния замкнутых тонких ортотропных конических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С. 46–58.
8. Карнаузов В. Г., Ткаченко Я. В., Зражевська В. Ф. Дослідження гармонічних коливань сферичної оболонки з фізично нелінійного п'єзоелектричного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 125–129.
9. Ковалев Ю. Д., Стативка Е. Н. Изгиб пьезокерамического неоднородного слоя при скользящей заделке его торцов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 86–95.
10. Лазуткин В. Н., Михайлов А. И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте // Акуст. журн. – 1976. – **22**, № 3. – С. 393–399.
11. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 11. – С. 15–19.

- То же: *Shul'ga N. A., Borisenko L. V.* Vibrations of an axially polarized piezoceramic cylinder during electrical loading // *Int. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, No. 11. – P. 1070–1074.
12. *Шульга Н. А., Борисенко Л. В.* Электроупругие колебания секционированного пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией // *Прикл. механика.* – 1990. – **26**, № 2. – С. 126–130.
  13. *Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Лоза И. А.* Осесимметричные электроупругие волны в полой пьезокерамическом цилиндре // *Прикл. механика.* – 1984. – **20**, № 1. – С. 26–32.
  14. *Hussein M., Heyliger P. R.* Discrete layer analysis of axisymmetric vibrations of laminated piezoelectric cylinders // *J. Sound and Vibr.* – 1996. – **192**, No. 5. – P. 995–1013.
  15. *Kharouf N., Heyliger P. R.* Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders // *J. Sound and Vibr.* – 1994. – **174**, No. 4. – P. 539–561.

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО НЕОСЕСИМЕТРИЧНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ З ОСЬОВОЮ ПОЛЯРИЗАЦІЄЮ**

*Розглядається неосесиметрична задача про вільні коливання порожнистих п'єзокерамічних циліндрів для деяких типів граничних умов на торцях. П'єзокераміка поляризована у осьовому напрямку. Бічні поверхні циліндра вільні від зовнішніх навантажень і покриті тонкими електродами, що закорочені. Після відокремлення змінних і подання компонент вектора переміщень і електростатичного потенціалу у вигляді стоячих хвиль у коловому напрямі, початкову тривимірну задачу зведено до двовимірної. Метод розв'язування базується на комбінації методу сплайн-колокації за позовжньою координатою та методу дискретної ортогоналізації в комбінації з покроковим пошуком за радіальною координатою. Наведено результати чисельного аналізу циліндру з п'єзокераміки PZT 4 у широкому діапазоні зміни геометричних характеристик циліндра.*

**SOLVING OF NONAXISYMMETRIC FREE VIBRATIONS PROBLEM OF PIEZOCERAMIC HOLLOW CYLINDERS WITH AXIAL POLARIZATION**

*The nonaxisymmetric problem on free longitudinal vibrations of hollow piezoceramic cylinders with some types of boundary conditions at the edges is considered. Piezoceramics is polarized in the axial direction. The lateral surfaces are free from external loading and are covered by thin electrodes which are short-circuited. The initial three-dimensional problem is reduced to two-dimensional after separation of the variables and representation of the displacement vector components and electrostatic potential in the form of standing waves in the circumferential direction. The method of solving the problem is based on a combination of method of spline-collocation by the longitudinal coordinate and the method discrete of orthogonalization combined with step-by-step search by the radial coordinate. The results of numerical analysis of cylinder from piezoceramic PZT 4 in a wide range of geometric characteristics of the cylinder are presented.*

<sup>1</sup> Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенко  
НАН України, Київ,

<sup>2</sup> Нац. транспорт. ун-т, Київ

Получено

29.12.09