УДК 517.95

О. М. Боценюк

ПРО ОЦІНКИ СПАДАННЯ ЗА ЧАСОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО РІВНЯННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ В НЕОБМЕЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглянуто початково-крайову задачу для одного рівняння магнітного поля в необмеженій області з некомпактною межею. Встановлено оцінки спадання розв'язків в L^p, які залежать від геометрії області.

Асимптотична поведінка розв'язків при $t \to \infty$ еволюційних рівнянь в необмежених областях розглядалась в багатьох роботах (див., наприклад, [4], а також оглядову статтю [2]). У запропонованій роботі вивчається поведінка розв'язків одного рівняння магнітного поля, яке входить в системи рівнянь магнітної гідродинаміки і нелінійної магнітопружності.

Формулювання задачі та основний результат. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – необмежена область з межею Γ класу C^2 і $\Sigma = \Gamma \times (0,\infty)$, $Q = \Omega \times (0,\infty)$. Розглянемо в Q початково-крайову задачу

$$\frac{\partial b}{\partial t} + a \operatorname{rot}\operatorname{rot} b - \operatorname{rot}(v \times b) = 0, \qquad \operatorname{div} b = 0, \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$b(x,0) = b_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$n \cdot b = 0, \qquad n \times \operatorname{rot} b = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{3}$$

Тут $b : Q \to \mathbb{R}^3$ – вектор-функція магнітної індукції; $v : Q \to \mathbb{R}^3$ – задана швидкість руху провідного середовища; n – одиничний вектор нормалі до межі Γ; $a = 1/\sigma\mu_0$ – стала. Рівняння (1) описує магнітне поле у середовищі, що рухається. Опишемо області, в яких розглядається задача (1)–(3). Розглянемо функцію $\ell(v) = \inf\{\mathrm{mes}_{n-1}(\partial G \cap \Omega) : \mathrm{mes}_n G = v, G$ – довільна відкрита підмножина в $\Omega\}$. Нехай невід'ємна монотонно неспадна функція $g \in C(0,+\infty)$ така, що $v^{1-1/n}/g(v)$, $n = 3$, монотонно неспадна і $\ell(v) \ge g(v)$ $\forall v > 0$. Будемо припускати, що існують такі сталі γ, η, що $\gamma > 0$, $1/2 < \eta \le 1 - 1/n$, $n = 3$, і

$$g(v) \ge \gamma v^{\eta} \qquad \forall v \ge 1. \tag{4}$$

Говоримо, що область Ω *задовольняє умову* **A**, якщо існує функція $g(v)$, яка задовольняє перераховані вище умови. Позначимо

$$G(s) = \left[\frac{s}{g(s)}\right]^2, \tag{5}$$

$G^{-1}(t)$ – обернена до $G(s)$ функція.

Позначення. Нехай Ω – задана однозв'язна область в $\mathbb{R}^3$. Норму в просторах $L^p(\Omega)$, $(L^p(\Omega))^3$, $1 \le p \le \infty$, позначаємо через $|\cdot|_p = |\cdot|_{p,\Omega}$. Нехай

$$\mathcal{V} = \{\varphi \mid \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3, \ \operatorname{div}\varphi = 0\},$$

$$\mathcal{W} = \{\varphi \mid \varphi \in (C^1_{(0)}(\bar\Omega))^3, \ \operatorname{div}\varphi = 0, \ n \cdot \varphi = 0 \ \text{на} \ \Gamma\},$$

де $C^1_{(0)}(\bar\Omega)$ – простір звужень на Ω функцій із $C^1_0(\mathbb{R}^3)$. Означимо простори H і W. Простір H – замикання $\mathcal{V}$ в $(L^2(\Omega))^3$; W – замикання $\mathcal{W}$ в

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2011. – 54, № 2. – С. 36-42.

$(H^1(\Omega))^3$. Простір H наділяється скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, індукованим із $(L^2(\Omega))^3$; простір W є гільбертовим простором зі скалярним добутком $((\cdot,\cdot))$ і нормою $\|\cdot\|$, індукованими із $(H^1(\Omega))^3$. Простір W вкладений в H і щільний в ньому, причому вкладення є неперервним. Через H^* і W^* позначаємо простори, спряжені до H і W. Ототожнюючи за теоремою Рісса H і H^*, приходимо до включень $W \subset H \subset W^*$. Через $\langle \cdot,\cdot \rangle$ позначимо скалярний добуток між W^* і W. Означимо оператори $A : W \to W^*$, $B : W \to W^*$ за допомогою рівностей

$$\langle Au, w \rangle = a(u,w) = a\int_\Omega \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} w \, dx \qquad \forall u, w \in W,$$

$$\langle Bu, w \rangle = -\int_\Omega (v \times u) \cdot \operatorname{rot} w \, dx \qquad \forall u, w \in W, \qquad v \in (H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^3 .$$

Надалі літерою c будемо позначати різні додатні сталі, а через u' – похідну за змінною t в $\mathcal{D}^*(]0,T[;W^*) = L(\mathcal{D}(]0,T[);W^*)$.

Означення. *Слабким розв'язком* задачі (1)–(3) назвемо функцію $b(x,t)$ таку, що $b \in L^2(0,T;W)$, $b' \in L^2(0,T;W^*)$ $\forall T > 0$, $b(0) = b_0$, $b_0 \in H$ і $b(t)$ задовольняє рівняння:

$$b'(t) + Ab(t) + Bb(t) = 0 \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}^*(]0,T[;W^*) .$$

Теорема 1. *Нехай область* Ω *опукла і задовольняє умову* **A**. *Припустимо, що* $b_0 \in H \cap (L^{\beta+1}(\Omega))^3$, $\beta > 1$, $v \in L^\infty(0,+\infty;(H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^3)$. *Тоді існує константа* $\nu > 0$ *така, що, коли*

$$\max\left\{ \operatorname{vrai\,max}_{t \ge 0} \|v(t)\|^2_{(H^1(\Omega))^3} , \quad \operatorname{vrai\,max}_{t\ge 0} \|v(t)\|_{(H^1(\Omega))^3} \right\} \le \frac{\nu}{\beta+1},$$

то задача (1)–(3) *має єдиний слабкий розв'язок* $b(x,t)$ *такий, що*

$$|b|^{(\beta+1)/2} \in L^\infty(0,+\infty;L^2(\Omega)), \qquad \nabla(|b|^{(\beta+1)/2}) \in L^2(0,+\infty;(L^2(\Omega))^3),$$

і для цього розв'язку виконується оцінка

$$|b(t)|_{\beta+1} \le \frac{|b_0|_2}{\left[G^{-1}\left(\dfrac{\gamma t}{(\beta+1)}\right)\right]^{(\beta-1)/(2(\beta+1))}}, \qquad t > 0, \tag{6}$$

де $\gamma > 0$ *не залежить від* b, β, t.

Допоміжні твердження. Із результатів роботи [3, лема 1] випливає таке твердження.

Лема 1. *Нехай* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *задовольняє умову* **A** *і* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\alpha(\Omega)$, *де* $1 < p < n$, $0 < \alpha < q \le np/(n-p)$. *Тоді виконується нерівність*

$$|\nabla u|_p^p \ge \frac{c\,|u|_q^p}{G_{p,q}\left(\left[\dfrac{|u|_\alpha}{|u|_q}\right]^{\alpha q/(q-\alpha)}\right)}, \tag{7}$$

де

$$G_{p,q}(z) = \frac{z^{p/q+p-1}}{(g(z))^p}, \qquad |u|_\lambda \equiv \left(\int_\Omega |u(x)|^\lambda \, dx\right)^{1/\lambda}, \qquad \lambda > 0 .$$

Лема 2. *Нехай* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *задовольняє умову* **A** *при* $n > 2$ *і* $u \in H^1(\Omega)$. *Тоді виконується нерівність*

$$\left(\int_{E_1} |u(x)|^q \, dx \right)^{1/q} + \left(\int_{E_2} |u(x)|^{q_0} \, dx \right)^{1/q_0} \le c \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}, \tag{8}$$

де

$$E_1 = \{x \in \Omega : |u(x)| < a\}, \qquad E_2 = \{x \in \Omega : |u(x)| \ge a\}, \qquad a = 2^{k_0+1},$$

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{Z} : \mathrm{mes}_n\{x \in \Omega : |u(x)| \ge 2^k\} \le 1\},$$

$$q = 2/(2\eta - 1), \qquad q_0 = 2n/(n-2).$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що функція u невід'ємна і $u \in C^1_{(0)}(\bar{\Omega})$. Нехай $u_k = \min\{(u - 2^k)^+, 2^k\}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$, $f^+ := \max\{f, 0\}$. Застосувавши нерівність (7) до функції u_k при $p = q = 2$, $\alpha = 1$, отримаємо

$$|u_k|_2^2 \le c |\nabla u_k|_{2,B_k}^2 \, G([|u_k|_1 / |u_k|_2]^2), \tag{9}$$

де функція $G(s)$ задана через (5), $B_k = \{x \in \Omega : 2^k \le u(x) < 2^{k+1}\}$. Маємо такі нерівності

$$|u_k|_1 \le |u_k|_2 \, (\mu\{x \in \Omega : u(x) \ge 2^k\})^{1/2},$$

$$|u_k|_2^2 \ge 2^{2k} \mu\{x \in \Omega : u(x) \ge 2^{k+1}\},$$

де

$$\mu(X) \equiv \mathrm{mes}_n \, X.$$

Позначимо

$$b_k = |\nabla u_k|_{2,B_k}^2.$$

Надалі будемо також писати $\mu\{u \ge s\}$ замість $\mu\{x \in \Omega : u(x) \ge s\}$. Із (9) випливає нерівність

$$2^{2k} \mu\{u \ge 2^{k+1}\} \le c b_k G(\mu\{u \ge 2^k\}) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Оскільки функція g задовольняє умову (4) і $z^{1-1/n}/g(z)$ монотонно неспадна, то $G(z) \le c_g z^{2/n}$ при $z \le 1$ і $G(z) \le c z^{2(1-\eta)}$ при $z \ge 1$. Нехай $\theta_k = 2/q_k$, де $q_k = q$ при $k \le k_0$ і $q_k = q_0$ при $k > k_0$. Позначимо $a_k = 2^{2k} \mu\{u \ge 2^k\}^{\theta_k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Піднесемо обидві частини нерівності (10) до степеня θ_{k+1}. Тоді матимемо

$$a_{k+1} \le 2 c^{\theta_{k+1}} b_k^{\theta_{k+1}} [2^{2k(1-\theta_{k+1})} (G(\mu\{u \ge 2^k\}))^{\theta_{k+1}}]. \tag{11}$$

Застосувавши до (11) нерівність Юнга з $\varepsilon > 0$, отримаємо

$$a_{k+1} \le c_\varepsilon b_k + \varepsilon 2^{2k} [G(\mu\{u \ge 2^k\})]^{\theta_{k+1}/(1-\theta_{k+1})},$$

звідки випливає

$$a_{k+1} \le c_\varepsilon b_k + \varepsilon a_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді маємо

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k+1} \le c_\varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k + \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k. \tag{12}$$

Вибравши в (12) $\varepsilon = 1/2$, отримаємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \le c|\nabla u|^2_{2,\Omega}.$$

Звідси з огляду на вкладення $\ell^2 \subset \ell^p$, $p \ge 2$, випливає

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k=k_0} 2^{qk}\mu\{u \ge 2^k\}\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=k_0+1}^{k=\infty} 2^{q_0 k}\mu\{u \ge 2^k\}\right)^{1/q_0} \le c|\nabla u|_2. \qquad (13)$$

Позначимо

$$r = 2^{q(k_0+1)}, \qquad r_0 = 2^{q_0(k_0+1)}, \qquad I_k = [2^k, 2^{k+1}],$$

$$J = \int_0^r \mu\{u^q \ge t\}\,dt, \qquad J_0 = \int_{r_0}^{\infty} \mu\{u^{q_0} \ge t\}\,dt.$$

Оцінимо інтеграл J:

$$J = q\sum_{k=-\infty}^{k=k_0}\int_{I_k} s^{q-1}\mu\{u \ge s\}\,ds \le q\sum_{k=-\infty}^{k=k_0}\mu\{u \ge 2^k\}\int_{I_k} s^{q-1}\,ds =$$

$$= (2^q - 1)\sum_{k=-\infty}^{k=k_0} 2^{qk}\mu\{u \ge 2^k\}. \qquad (14)$$

Аналогічно отримуємо нерівність

$$J_0 \le (2^{q_0} - 1)\sum_{k=k_0+1}^{k=\infty} 2^{q_0 k}\mu\{u \ge 2^k\}. \qquad (15)$$

Оцінимо інтеграл J знизу:

$$J \ge \int_0^r \mu\{x \in E_1 : |u(x)|^q \ge t\}\,dt = \int_{E_1} |u(x)|^q\,dx. \qquad (16)$$

Для J_0 маємо

$$J_0 = \int_0^{\infty} \mu\{x \in \Omega : (|u(x)|^{q_0} - r_0)^+ \ge s\}\,ds = \int_{\Omega} (|u(x)|^{q_0} - r_0)^+\,dx =$$

$$= \int_{E_2} |u(x)|^{q_0}\,dx - r_0\mu\{u \ge 2^{k_0+1}\}. \qquad (17)$$

Із (15), (17) випливає

$$\int_{E_2} |u(x)|^{q_0}\,dx \le 2^{q_0}\sum_{k=k_0+1}^{k=\infty} 2^{q_0 k}\mu\{u \ge 2^k\}. \qquad (18)$$

Із (13), використавши (14), (16), (18), отримаємо (8). ◊

Із доведення леми 1 в [1] випливає така

Лема 3. *Нехай функція ψ і вектор-функція u такі, що $\psi \in L^{\infty}(\Omega)$, $\nabla\psi \in (L^2(\Omega))^3$, $u \in W$, $\psi u \in (H^1(\Omega))^3$, $\psi(x) \ge 0$ для майже всіх $x \in \Omega$. Припустимо, що область Ω опукла і належить до класу C^2. Тоді справджується нерівність*

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot}(\psi u)\,dx \ge \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega} \psi|\nabla u_i|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} \nabla\psi \cdot \nabla|u|^2\,dx. \qquad (19)$$

Оцінка розв'язків.

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Для функції $u(x)$, $x \in \Omega$ означимо

$$u_{(m)}(x) = S_m(u)(x) = \min\{\max\{u(x), -m\}, m\},$$

де $m > 0$. Нехай $\psi = \varphi(\xi)$, де функція φ монотонно неспадна, $\varphi \in C^1(0, +\infty)$,

$\varphi(s) \geq 0 \;\; \forall s \geq 0$, $\xi = [S_m(|b|)]^2$, b – розв'язок задачі (1)–(3). Помножимо обидві частини рівняння (1) на ψb і проінтегруємо на Ω. Тоді отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \psi \frac{\partial}{\partial t}|b|^2\,dx + a(b,\psi b) = \int_\Omega f\cdot \operatorname{rot}(\psi b)\,dx\,, \tag{20}$$

де $f = v \times b$. Застосувавши лему 3 для $u = b$, матимемо

$$a(b,\psi b) \geq a\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \psi\,|\nabla b_i|^2\,dx + \frac{a}{2}\int_\Omega \varphi'(\xi)\,|\nabla\xi|^2\,dx\,. \tag{21}$$

Оцінимо інтеграл у правій частині рівності (20):

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\cdot\operatorname{rot}(\psi b)\,dx &= \int_\Omega \psi b\cdot\operatorname{rot} b\,dx + \int_\Omega \varphi'(\xi) f\cdot(\nabla\xi\times b)\,dx \leq \\ &\leq \varepsilon\int_\Omega \psi\,|\operatorname{rot} b|^2\,dx + c_\varepsilon\int_\Omega \psi\,|f|^2\,dx + \\ &+ \varepsilon\int_\Omega \varphi'(\xi)\,|\nabla\xi|^2\,dx + c_\varepsilon\int_{\Omega_m(t)} \varphi'(\xi)\,|f|^2\,|b|^2\,dx\,,\end{aligned} \tag{22}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число, $\Omega_m(t) = \{x \in \Omega : |b(x,t)| < m\}$. Вибравши в (22) ε достатньо малим, із (20)–(22) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \psi \frac{\partial}{\partial t}|b|^2\,dx + c\int_\Omega \varphi'(\xi)\,|\nabla\xi|^2\,dx \leq J_1 + J_2\,, \tag{23}$$

де

$$J_1 = c\int_\Omega \psi\,|f|^2\,dx, \qquad J_2 = c\int_{\Omega_m(t)} \varphi'(\xi)\,|f|^2\,|b|^2\,dx\,.$$

Позначимо $F_m(z) = \int_0^z \varphi(S_{m^2}(\sigma))\,d\sigma$, $z \geq 0$. Покладемо $\varphi(\xi) = \xi^{(\beta-1)/2}$, $\beta > 1$. Тоді матимемо

$$\int_\Omega \psi \frac{\partial}{\partial t}|b|^2\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega F_m(|b|^2)\,dx, \qquad F_m(|b|^2) \geq \frac{2}{\beta+1}\varphi(|b|^2_{(m)})\,|b|^2. \tag{24}$$

Отже, з огляду на (24) із (23) випливає

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega F_m(|b|^2)\,dx + \frac{c(\beta-1)}{(\beta+1)^2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \leq J_1 + J_2\,, \tag{25}$$

де $w := \xi^{(\beta+1)/4}$. Для інтеграла J_1 маємо

$$J_1 \leq c\int_\Omega g_m w^\gamma\,dx + c\int_\Omega |v|^2\,w^2\,dx \equiv R_1 + R_2\,, \tag{26}$$

де $g_m = |v|^2\left(|b|^2 - |b|^2_{(m)}\right)$, $\gamma = 2(\beta-1)/(\beta+1)$. Для оцінки R_1 і R_2 застосуємо лему 2 при $u = w$. Використовуючи нерівності Гельдера і Юнга з ε, отримуємо

$$\begin{aligned}R_1 &= c\int_{E_1} g_m w^\gamma\,dx + c\int_{E_2} g_m w^\gamma\,dx \leq \\ &\leq c\,|g_m|_{p,E_1}\,|w|^\gamma_{q,E_1} + c\,|g_m|_{p_0,E_2}\,|w|^\gamma_{q_0,E_2} \leq \\ &\leq \varepsilon\,|w|^2_{q,E_1} + \varepsilon\,|w|^2_{q_0,E_2} + c_\varepsilon\,|g_m|^r_{p,E_1} + c_\varepsilon\,|g_m|^r_{p_0,E_2}\,,\end{aligned} \tag{27}$$

де $p = q/(q-\gamma)$, $p_0 = q_0/(q_0-\gamma)$, $r = (\beta+1)/2$, $\varepsilon > 0$. Із (27) з урахуванням (8) випливає, що

$$R_1 \leq c\varepsilon\,|\nabla w|^2_{2,\Omega} + c_\varepsilon\,|g_m|^r_{p,E_1} + c_\varepsilon\,|g_m|^r_{p_0,E_2}\,. \tag{28}$$

Використовуючи нерівності Гельдера і (8), отримуємо оцінку для R_2:

$$R_2 = c\int_{E_1} |v|^2\, w^2\, dx + c\int_{E_2} |v|^2\, w^2\, dx \le c\,|v|^2_{s,E_1}\, |w|^2_{q,E_1} +$$

$$+ c\,|v|^2_{s_0,E_2}\, |w|^2_{q_0,E_2} \le c\,\|v\|^2_{(H^1(\Omega))^3}\, |\nabla w|^2_{2,\Omega}, \tag{29}$$

де $s = 2q/(q-2)$, $s_0 = 2q_0/(q_0-2)$.

Для інтеграла J_2 маємо

$$J_2 \le c(\beta-1)\int_\Omega |v|^2\, w^2\, dx \le c(\beta-1)\,\|v\|^2_{(H^1(\Omega))^3}\, |\nabla w|^2_{2,\Omega}. \tag{30}$$

Вибравши числа ε, ν достатньо малими (ε у нерівності (28) і ν з умови теореми 1), із (25), (26), (28), (29) отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega F_m(|b|^2)\, dx + \frac{c(\beta-1)}{(\beta+1)^2}|\nabla w|_2^2 \le c\,|g_m|^r_{p,E_1} + c\,|g_m|^r_{p_0,E_2} \equiv z_m. \tag{31}$$

Покладемо у (20) $\psi \equiv 1$. Тоді аналогічно отримаємо оцінку

$$|b(t)|_2^2 + c\sum_{i=1}^{3}\int_0^t |\nabla b_i|_2^2\, d\tau \le |b_0|_2^2, \qquad t > 0. \tag{32}$$

При m достатньо великих маємо

$$z_m \le c\left|\left(|b|^2 - |b|^2_{(m)}\right)\right|^r_{p_0} |v|^{2r}_\infty. \tag{33}$$

Застосовуючи нерівність Гельдера і лему 2 при достатньо великих m, отримуємо

$$\left|\left(|b|^2 - |b|^2_{(m)}\right)\right|^r_{p_0} \le \left|\left(|b|^2 - |b|^2_{(m)}\right)\right|_1^{r(1-\theta)} \left|\left(|b|^2 - |b|^2_{(m)}\right)\right|_3^{r\theta} \le$$

$$\le c\,|b|_2^{2r(1-\theta)}\left(\sum_{i=1}^{3}|\nabla b_i|_2^2\right)^{(\beta-1)/4}, \quad \theta = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{p_0}\right). \tag{34}$$

Із (32)–(34) за допомогою теореми Лебеґа виводимо, що $z_m \to 0$ при $m \to \infty$ для майже всіх t. Зауважимо, що з (34) випливає $\|z_m\|_{L^1(0,T)} \le c$ $\forall m > 0$ при $\beta \le 5$. Інтегруючи (31), отримуємо $\left|F_m(|b(t)|^2)\right|_{1,\Omega} \le c$ $\forall m > 0$, тоді за теоремою Фату маємо $b \in L^\infty(0,T;(L^{1+\beta}(\Omega))^3)$. Перейшовши до границі в (31) при $m \to \infty$, дістанемо

$$\frac{d}{dt}|b|^{1+\beta}_{1+\beta} + \frac{c(\beta-1)}{\beta+1}\left|\nabla\left(|b|^{(\beta+1)/2}\right)\right|^2 \le 0. \tag{35}$$

Зазначимо, що (35) виконується для всіх $\beta > 1$. Дійсно, з (35) випливає, що $b \in L^\infty(0,T;(L^6(\Omega))^3)$. Тоді з першої нерівності в (34) отримуємо, що $\|z_m\|_{L^\infty(0,T)} \le c$ $\forall m > 0$. Отже, аналогічно виводимо (35) для всіх $\beta > 1$.

Позначимо $u = |b|^{(\beta+1)/2}$. Застосувавши лему 1 до функції u при $p = q = 2$, $\alpha = 4/(\beta+1)$, з огляду на (32) отримаємо

$$|\nabla u(t)|_2^2 \ge c\,|u(t)|_2^2 / G(\omega(t)), \tag{36}$$

де

$$\omega(t) := \left[|b_0|_2^{(\beta+1)/2} / |u(t)|_2\right]^{4/(\beta-1)}.$$

Із (35), (36) випливає

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_2 + \frac{c(\beta-1)|u(t)|_2}{(\beta+1)G(\omega(t))} \le 0 .$$

Звідси отримуємо

$$(\omega(t))^{-1}G(\omega(t))\omega'(t) \ge \frac{c}{(\beta+1)} . \qquad (37)$$

Інтегруючи (37), матимемо

$$\Phi(\omega(t)) \ge \frac{ct}{(\beta+1)}, \qquad \Phi(z) := \int_0^z s^{-1}G(s)\,ds . \qquad (38)$$

Оскільки функція $s^{2/3}/g(s)$ монотонно неспадна, то $\Phi(z) \le 3G(z)/2$, і тому з (38) випливає (6). ◊

1. *Боценюк О. М.* Про оцінки спадання за часом розв'язків одного рівняння магнітного поля в нелінійному необмеженому середовищі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 81–87.
   Те саме: *Botsenyuk O. M.* On time decay estimates of solutions of an equation of a magnetic field in a nonlinear unbounded medium // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 2. – P. 219–228.
2. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи мат. наук. – 2005. – **60**, № 4. – С. 145–212.
   Те саме: *Denisov V. N.* On the behaviour of solutions of parabolic equations for large values of time // Rus. Math. Surveys. – 2005. – **60**, No. 4. – P. 721–790.
3. *Тедеев А. Ф.* Двусторонние оценки решения задачи Неймана при $t \to \infty$ для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 7. – С. 989–998.
   Те саме: *Tedeev A. F.* Two-sided estimates of a solution of the Neumann problem as $t \to \infty$ for a second-order quasilinear parabolic equation // Ukr. Math. J. – 1996. – **48**, No. 7. – P. 1119–1130.
4. *Zejia Wang, Jingxue Yin, Chunpeng Wang and Hang Gao.* Large time behavior of solutions to Newtonian filtration equation with nonlinear boundary sources // J. Evolution Equat. – 2007. – **7**, No. 4. – P. 615–648.

ОБ ОЦЕНКАХ УБЫВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Рассмотрена начально-краевая задача для одного уравнения магнитного поля в неограниченной области с некомпактной границей. Установлены оценки убывания решений в L^p*, которые зависят от геометрии области.*

ON TIME DECAY ESTIMATES OF SOLUTIONS OF ONE EQUATION OF MAGNETIC FIELD IN UNBOUNDED MEDIA

The initial boundary value problem for one magnetic field equation in the unbounded domain with noncompact boundary is considered. The decay estimates of solution in L^p *which depend on the geometry of domain are established.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
24.03.10