УДК 517.946

І. Д. Пукальський

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З ВИРОДЖЕННЯМ І ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується параболічна крайова задача з багатоточковою умовою за часовою змінною для лінійного параболічного рівняння із степеневими особливостями на координатних площинах. Одержаний результат використано для дослідження задачі оптимального керування із внутрішнім і фінальним керуванням.

Вивчення задач з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь стимулювалося різними обставинами, зокрема необхідністю розв'язання задач із теорії фізики плазми [1], обернених задач для параболічних рівнянь [4]. Нелокальним крайовим задачам, зокрема, присвячено праці [1, 4, 9–12].

Дослідженням керування системами, що описуються задачами для лінійних рівнянь із частинними похідними і нелокальними умовами з різними критеріями якості, присвячено праці [2, 3, 5, 7, 8, 14–19].

У цій статті розглядається задача зі скісною похідною для параболічного рівняння з виродженням на координатних площинах $x_i = 0$, $i \in \{1,\dots,n\}$, довільного порядку і багатоточковою умовою за часовою змінною. Одержаний результат використано для дослідження задачі оптимального керування з інтегральним критерієм якості.

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай D – область півпростору $\mathbb{R}^n_+$, $x_i \ge 0$, $i \in \{1,\dots,n\}$, обмежена поверхнями S та $x_i = 0$; t_0, T, t_1, …, t_N – довільні фіксовані додатні числа, $t_k < T$, $k \in \{0,1,\dots,N\}$. Розглянемо в області $Q = [0,T) \times D$ задачу знаходження функцій (u,p,q), на яких функціонал

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_D \mathcal{F}_1(t,x;u(t,x;p(x),q(x)),p(x))\,dx +$$
$$+ \int_D \mathcal{F}_2(x;u(t_1,x;p,q),\dots u(t_N,x;p,q),q(x))\,dx \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $(p,q) \in V = \{p \in C^{\alpha}(D), \mid p_1(x) \le p(x) \le p_2(x);\ q(x) \in C^{2+\alpha}(D) \mid q_1(x) \le q(x) \le q_2(x)\}$, із яких $u(t,x;p(x),q(x))$ задовольняє при $(t,x) \in Q^{(0)} = Q \setminus Q_{(0)}$, $Q_{(0)} = \{(t,x) \in Q \mid t = t_0,\ x \in D\}$, рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right]u =$$
$$= f(t)\cdot g(x,p(x)), \tag{2}$$

нелокальну умову за часовою змінною

$$u(0,x;p(x),q(x)) + \sum_{j=1}^N k_j(x)u(t_j,x;p(x),q(x)) = \varphi(x,q(x)), \tag{3}$$

а на бічній межі $\Gamma = [0,T) \times \partial D$, де ∂D – межа області D, крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D}\left[\sum_{j=1}^n b_j(t,x)\partial_{x_j}u + b_0(t,x)u - \psi(t,x)\right] = 0. \tag{4}$$

Нехай $\bar{D} = D \cup \partial D$; $\bar{Q} = [0,T) \times \bar{D}$; $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(2)})$, $H_i(t^{(1)}, x^{(2)})$, $i \in \{1,\dots,n\}$, – точки із $\bar{Q}$; $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\dots,x_i^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$. Позначимо

$$s_1(a^{(1)},t) = \begin{cases} |t-t_0|^{a^{(1)}}, & |t-t_0| \le 1, \\ 1, & |t-t_0| \ge 1, \end{cases} \quad t \in [0,T],$$

$$s_2(a^{(2)},x_i) = \begin{cases} x_i^{a^{(2)}}, & 0 \le x_i \le 1, \\ 1, & x_i \ge 1, \end{cases}$$

$$\rho(a^{(2)},x) = \min\{s_2(a^{(2)},x_1),\dots,s_2(a^{(2)},x_n)\},$$

$$s(a;P) = s_1(a^{(1)},t)\rho(a^{(2)},x), \quad a = (a^{(1)},a^{(2)}).$$

Покладемо $\mu_j^{(\nu)} = \mu_{j_1}^{(\nu)} + \mu_{j_2}^{(\nu)} + \dots + \mu_{j_n}^{(\nu)}$, $|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i$, $\mu_{k_i}^{(\nu)} \ge 0$, $\nu \in \{1,2\}$, $\mu_j = (\mu_j^{(1)}, \mu_j^{(2)})$.

Нехай ℓ – деяке дійсне число. Означимо функціональні простори, в яких будемо вивчати задачу (1)–(4).

$C^{\ell}(\gamma;\beta,0;Q)$ – множина функцій $u:(t,x)\in\bar{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^k \partial_x^j u$, $2j+|k| \le [\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{\ell} = \|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{[\ell]} + \langle u;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{\ell},$$

де, наприклад,

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0 = \sup_{\bar{Q}} |u| \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\begin{aligned}\langle u;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{\ell} = {} & \sum_{2j+|k|=[\ell]} \sum_{i=1}^{n} \sup_{(P_1,H_i)\subset\bar{Q}} \left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right|^{-\{\ell\}} \times \\ & \times \left|\partial_t^j \partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u(H_i)\right| s((2j+|k|+\{\ell\})\gamma;\tilde{P}_1) \times \\ & \times s_2(-\{\ell\}\beta_i^{(2)},\tilde{x}_i) \prod_{m=1}^{n} s_2(-k_m\beta_m^{(2)},\tilde{x}_m) + \\ & + \sum_{2j+|k|=[\ell]} \sum_{i=1}^{n} \sup_{(P_2,H_i)\subset\bar{Q}} \left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\{\ell/2\}} \times \\ & \times \left|\partial_t^j \partial_x^k u(H_i) - \partial_t^j \partial_x^k u(P_2)\right| s((2j+|k|+\{\ell\})\gamma;\tilde{P}_2) \times \\ & \times \prod_{m=1}^{n} s_2(-k_m\beta_m^{(2)},\tilde{x}_m).\end{aligned}$$

Тут позначено

$$s_2(a,\tilde{x}_i) = \min\{s_2(a,x_i^{(1)}),\ s_2(a,x_i^{(2)})\},$$

$$s(a;\tilde{P}_\nu) = \min\{s(a;P_\nu),\ s(a;H_i)\}, \qquad \nu \in \{1,2\},$$

$[\ell]$ – ціла частина числа ℓ; $\{\ell\} = \ell - [\ell]$.

$C^{\ell}(\mu_j;Q)$ – множина функцій $v_j:(t,x)\in\bar{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_x^k v_j$, $|k| \le [\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\left\|v_j;\mu_j;Q\right\|_{\ell} \equiv \left\|v_j;\mu_j;Q\right\|_{[\ell]} + \left\langle\left\langle v_j;\mu_j;Q\right\rangle\right\rangle_{\ell},$$

де, наприклад,

$$\left\|\left| v_j;\mu_j;Q\right\|\right|_{[\ell]} = \sum_{|r|\le[\ell]} \sup_{P\in\bar{Q}} \left[\prod_{k=1}^{n} s_2(\mu_{j_k}^{(2)},x_k)s_1(\mu_{j_k}^{(1)},t)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{n} s_2(r_i,x_i)\rho_1(\delta_k\mu_0^{(2)};x)s_1(\delta_k\mu_0^{(1)};t)\right]\left|\partial_x^r v_j(P)\right|,$$

$|r| = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$, $\delta_k = \begin{cases} 0, & |k| \ne 0, \\ 1, & |k| = 0, \end{cases}$ $\mu_0^{(\nu)} = \text{const} \ge 0$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Нехай для задачі (1)–(4) виконуються такі умови.

1°. Коефіцієнти рівняння $A_i \in C^\alpha(\mu_i,Q)$, $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $A_0 \le K < \infty$, $K = \text{const}$, $A_{ij} \in C^\alpha(\beta_i+\beta_j;Q)$ і для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} s_1(\beta_i^{(1)}+\beta_j^{(1)},t)s_2(\beta_i^{(2)},x_i)s_2(\beta_j^{(2)},x_j)A_{ij}(P)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2, \qquad (5)$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі.

2°. Функції $p_\nu(x) \in C^\alpha(D)$, $q_\nu(x) \in C^{2+\alpha}(D)$, $\nu \in \{1,2\}$; $k_j(x) \in C^{2+\alpha}(D)$, $\sum_{j=1}^{N}|k_j(x)|e^{-\lambda t_j} \le \lambda_0 < 1$, де λ – довільне число, яке задовольняє нерівність $\lambda < -A_0(t,x)$; $f(t)g(x,p(x)) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$; $\varphi(x,q(x)) \in C^{2+\alpha}(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D)$; $\tilde\gamma = (0,\gamma^{(2)})$; $\psi(t,x) \in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $\gamma^{(\nu)} = \max\left\{\max_i(1+\beta_i^{(\nu)}),\ \max_i(\mu_i^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}),\ \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2},\delta^{(\nu)}\right\}$, $\delta^{(\nu)} \ge 0$; вектор $\{s(\beta_1;P)b_1(P),\ldots,s(\beta_n;P)b_n(P)\}$ утворює з напрямком внутрішньої нормалі **n** до Γ в точці $P\in\Gamma$ кут, менший від $\pi/2$; $b_k \in C^{1+\alpha}(\beta_k;Q)$, $b_0 \in C^{1+\alpha}(\delta,Q)$, $b_0 < 0$.

3°. Поверхня ∂D належить до класу $C^{2+\alpha}$ і виконуються умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{j=1}^{n} b_j(0,x)\partial_{x_j}\varphi + b_0(0,x)\varphi - \psi(0,x) - \sum_{j=1}^{N}k_j(x)\psi(t_j,x)\right] = 0,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\sum_{j=1}^{N} b_j(t_j,x)\partial_{x_j}k_j(x) = 0.$$

4°. Функції $\mathcal{F}_1(t,x;u(t,x;p(x),q(x)),p(x))$, $\mathcal{F}_2(x;u(t_1,x;p,q),\ldots,q(x))$ як функції від (t,x) та x належать відповідно до просторів $C^\alpha(Q)$, $C^\alpha(D)$. Крім того, функції $g(x,p(x))$, $\varphi(x,q(x))$, $\mathcal{F}_1(t,x;u,p,q)$, $\mathcal{F}_2(x;u(t_1,x;p,q),\ldots,u(t_N,x;p,q),q(x))$ мають гельдерові похідні другого порядку за u, p, q, неперервні як функції від змінних (t,x) та x.

Справджується така

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **1°–3°**. Тоді для довільних* $(p,q)\in V$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2)–(4) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ *і правильною є оцінка*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\big(\|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} +$$

$$+\|f\cdot g;\gamma;\beta;0;Q\|_\alpha + \|\psi;\gamma,\beta;0,Q\|_{1+\alpha}\big). \qquad (6)$$

Для дослідження задачі (2)–(4) встановимо спочатку розв'язність послідовності допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничним значенням якої буде розв'язок задачі (2)–(4).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m = Q \cap \{(t,x) \in Q \mid s_1(1,t) \ge m_1^{-1}, s_2(1,x_i) \ge m_2^{-1}, m = (m_1, m_2), m_1 \ge 1, m_2 \ge 1\}$ – послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до $Q^{(0)}$. Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - \right.$$

$$\left. - a_0(t,x)\right] u_m(t,x) = f_m(t,x), \tag{7}$$

які задовольняють нелокальну умову

$$u_m(0,x;p(x),q(x)) + \sum_{j=1}^{N} k_j(x) u_m(t_j,x;p(x),q(x)) = \varphi_m(x), \tag{8}$$

і крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D} \left[\sum_{j=1}^{n} h_j(t,x)\partial_{x_j} u_m + h_0(t,x)u_m - \psi_m(t,x)\right] = 0. \tag{9}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_k, h_0 і функції f_m, φ_m, ψ_m при $(t,x) \in Q_m$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, b_j, b_0 і $f \cdot g$, φ, ψ відповідно, а при $(t,x) \in$ $\in Q \setminus Q_m$ є продовженнями зі збереженням норми і гладкості [13, с. 82].

Встановимо оцінку розв'язків допоміжних крайових задач. Розглянемо крайову задачу

$$((L_1 - \lambda)v_m)(t,x) = f_m(t,x)e^{\lambda t}, \qquad v_m(0,x) = \varphi_m(x),$$

$$(\mathcal{B}v_m)(t,x)\big|_{\Gamma} = \left[\sum_{j=1}^{n} h_j(t,x)\partial_{x_j} v_m + h_0(t,x)v_m\right]\Bigg|_{\Gamma} = \psi_m(t,x)e^{\lambda t}, \tag{10}$$

де λ задовольняє умову ***2°***.

Теорема 2. *Нехай* $v_m(t,x)$ *– класичний розв'язок задачі* (10) *в області* Q *і виконуються умови* ***1°–3°***. *Тоді для* v_m *справджується нерівність*

$$|v_m| \le \max\left\{\|\varphi_m; D\|_0, \left\|f_m e^{\lambda t}(-\lambda - a_0)^{-1}; Q\right\|_0, \left\|h_0^{-1}\psi_m e^{\lambda t}; \Gamma\right\|_0\right\}. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я цієї теореми проводиться за схемою доведення теореми 2.2 із [6, с. 25], тобто береться функція $v_m(t,x)$ і аналізуються всі можливі розміщення її додатного максимуму і від'ємного мінімуму. ◊

Позначимо через $(G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi), G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi))$ функцію Ґріна крайової задачі (10) з [9, с. 141]. Справджується така

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* ***1°–3°***, *то існує єдиний розв'язок задачі* (7)–(9), *для якого є правильною оцінка*

$$|u_m| \le c\left(\|\varphi_m; D\|_0 + \left\|f_m e^{\lambda t}; Q\right\|_0 + \left\|\psi_m e^{\lambda t}; Q\right\|_0\right). \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Зробимо в задачі (7)–(9) заміну

$$u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{-\lambda t},$$

де λ задовольняє умову ***2°***. Одержимо задачу про знаходження розв'язків рівняння

$$((L_1 - \lambda)v_m)(t,x) = f_m(t,x)e^{\lambda t}, \tag{13}$$

які задовольняють нелокальну умову

$$v_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} k_j(x) e^{-\lambda t_j} v_m(t_j, x) = \varphi_m(x) \tag{14}$$

і крайову умову

$$(\mathcal{B} v_m)(t,x)\big|_{\Gamma} = \psi_m(t,x) e^{\lambda t} . \tag{15}$$

Розв'язок задачі (13)−(15) шукаємо у вигляді

$$v_m(t,x) = \omega_m(t,x) + \int_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi) v_m(0,\xi)\, d\xi , \tag{16}$$

де $\omega_m(t,x)$ − розв'язок задачі (13), (15), що задовольняє умову

$$\omega_m(0,x) = \varphi_m(x) .$$

Використаємо для $\omega_m(t,x)$ таке подання [9, с. 141]:

$$\omega_m(t,x) = \int_0^t d\tau \int_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d\xi + \int_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi) \varphi_m(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\partial D} G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi) \psi_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d_\xi S .$$

Задовольняючи нелокальну умову (14), маємо

$$v_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} k_j(x) e^{-\lambda t_j} \int_D G_m^{(1)}(t_j,x,0,\xi) v_m(0,\xi)\, d\xi =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} k_j(x) e^{-\lambda t_j} \omega_m(t_j,x) \equiv F(x) . \tag{17}$$

Оскільки $G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi) \ge 0$ і $\int_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)\, d\xi \le 1$, то

$$\sum_{j=1}^{N} \left| k_j(x) \right| e^{-\lambda t_j} \int_D G_m^{(1)}(t_k,x,0,\xi)\, d\xi \le \lambda_0 < 1 .$$

Розв'язок інтегрального рівняння (17) шукаємо методом послідовних наближень і для нього справджується оцінка

$$\left| v_m(0,x) \right| \le \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} \| F; Q \|_0 . \tag{18}$$

Запишемо розв'язок інтегрального рівняння (17) у вигляді

$$v_m(0,x) = F(x) + \int_D Z_m(x,y) F(y)\, dy , \tag{19}$$

де $Z_m(x,y)$ − резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$Z_m(x,\xi) = \sum_{j=1}^{N} k_j(x) e^{-\lambda t_j} G_m^{(1)}(t_j,x,0,\xi) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} k_j(x) e^{-\lambda t_j} \int_D G_m^{(1)}(t_j,x,0,y) Z_m(y,\xi)\, dy .$$

Звідси випливає оцінка

$$\left| \int_D Z_m(x,\xi)\, d\xi \right| \le \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} .$$

Враховуючи властивості функції Ґріна $G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)$, умови ***1°–3°*** і рівність (17), при кожному фіксованому (m_1, m_2) одержуємо, що $v_m(0,x) \in C^{2+\alpha}(Q)$. Враховуючи зображення (16), маємо $v_m(t,x) \in C^{2+\alpha}(Q)$. ◊

Встановимо формулу для зображення розв'язку задачі (7)–(9).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 3. *Тоді існує функція Ґріна* $(G_m^{(1)}, G_m^{(2)}, Z_1^{(1)}, \ldots, Z_N^{(1)}, Z_1^{(2)}, \ldots, Z_N^{(2)})$ *задачі* (13)–(15) *і справджується таке подання:*

$$
\begin{aligned}
v_m(t,x) = {} & \int_0^t d\tau \int_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d\xi + \int_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi)\, d\xi + \\
& + \int_0^t d\tau \int_{\partial D} G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d_\xi S + \\
& + \sum_{j=1}^N \Bigg[\int_0^{t_j} d\tau \int_D Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d\xi + \\
& + \int_D Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi)\, d\xi + \\
& + \int_0^{t_j} d\tau \int_{\partial D} Z_j^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d_\xi S \Bigg]. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Д о в е д е н н я. Підставляючи в рівність (19) замість $F(y)$ значення

$$
\begin{aligned}
F(x) = -\sum_{j=1}^N k_j(x) e^{-\lambda t_j} \Bigg[& \int_0^{t_j} d\tau \int_D G_m^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d\xi + \\
& + \int_D G_m^{(1)}(t_j,x,0,\xi)\varphi_m(\xi)\, d\xi + \\
& + \int_0^{t_j} d\tau \int_{\partial D} G_m^{(2)}(t_j,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d_\xi S \Bigg]
\end{aligned}
$$

і змінивши порядок інтегрування, отримаємо

$$
\begin{aligned}
v_m(0,x) = \sum_{j=1}^N \Bigg[& \int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_{mj}^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d\xi + \\
& + \int_D F_{mj}^{(1)}(t_j,x,0,\xi)\varphi_m(\xi)\, d\xi + \\
& + \int_0^{t_j} d\tau \int_{\partial D} \Gamma_{mj}^{(2)}(t_j,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi) e^{\lambda\tau}\, d_\xi S \Bigg], \qquad (21)
\end{aligned}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{mj}^{(\nu)}(t_j,x,\tau,\xi) = {} & -k_j(x) e^{-\lambda t_j} G_m^{(\nu)}(t_j,x,\tau,\xi) - \\
& - \int_D Z_m(x,y) e^{-\lambda t_j} k_j(y) G_m^{(\nu)}(t_j,y,\tau,\xi)\, dy, \qquad \nu \in \{1,2\}.
\end{aligned}
$$

Підставивши (21) у поверхневий інтеграл рівності (16) і змінивши порядок інтегрування, одержимо зображення (20), де

$$
Z_j^{(\nu)}(t,x,\tau,\xi) = \int_D G_m^{(1)}(t,x,0,y)\Gamma_{mj}^{(\nu)}(t_j,y,\tau,\xi)\, dy, \qquad j \in \{1,\ldots,N\}. \quad ◊
$$

Знайдемо оцінку похідних розв'язку $u_m(t,x)$. Введемо в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому (m_1,m_2) гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}$, тільки замість функцій $s_1(a^{(1)},t)$, $s_2(a^{(2)},x_i)$, $\rho(a^{(2)},x)$ беремо відповідно $d_1(a^{(1)},t)$, $d_2(a^{(2)},x_i)$, $d_3(a^{(2)},x)$, де

$$d_1(a^{(1)},t)=\begin{cases}\max\{d_1(a^{(1)},t),\ m_1^{-a^{(1)}}\}, & a^{(1)}\ge 0,\\ \min\{s_1(a^{(1)},t),\ m_1^{-a^{(1)}}\}, & a^{(1)}<0,\end{cases}$$

$$d_2(a^{(2)},x_i)=\begin{cases}\max\{s_2(a^{(2)},x_i),\ m_2^{-a^{(2)}}\}, & a^{(2)}\ge 0,\\ \min\{s_2(a^{(2)},x_i),\ m_2^{-a^{(2)}}\}, & a^{(2)}<0,\end{cases}$$

$$d_3(a^{(2)},x)=\begin{cases}\max\{\rho(a^{(2)},x),\ m_2^{-a^{(2)}}\}, & a^{(2)}>0,\\ \min\{\rho(a^{(2)},x),\ m_2^{-a^{(2)}}\}, & a^{(2)}<0,\end{cases}$$

$$d(\gamma;P)=d_1(\gamma^{(1)};t)d_3(\gamma^{(2)};x).$$

Справджується

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* ***1°–3°****. Тоді для роз'язку задачі* (7)–(9) *є правильною оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c(\|f_m;\gamma;\beta;0;Q\|_\alpha+\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|\psi_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{1+\alpha}+\|v_m;Q\|_0). \tag{22}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [13], маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le(1+\varepsilon^\alpha)\langle u_m;\gamma,\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0,$$

де $\varepsilon\in(0,1)$, ε – довільне дійсне число. Тому достатньо оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в Q точок P_1, H_i, P_2, для яких справджується одна з нерівностей

$$\mu\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le E_\nu,\qquad \nu\in\{1,2\},$$

де

$$E_1=\sum_{2j+|k|=2}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(P_1,H_2)\subset\bar Q}\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(H_i)\right|\times$$
$$\times d((2+\alpha)\gamma;\tilde P_1)d_2(-\alpha\beta_i^{(2)},\tilde x_i)\prod_{r=1}^{n}d_2(-k_r\beta_r^{(2)};\tilde x_r),$$

$$E_2=\sum_{2j+|k|=2}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(P_2,H_i)\subset\bar Q}\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_2)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(H_i)\right|\times$$
$$\times d((2+\alpha)\gamma;\tilde P_2)\prod_{r=1}^{n}d_2(-k_r\beta_r^{(2)};\tilde x_r),$$

$$\mu\in\left(\frac{1+\lambda_0}{2},1\right),\qquad d(a,\tilde P_\nu)=\min\{d(a;P_\nu),d(a,H_i)\}.$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\ge\frac{\rho}{16}d(2\gamma;\tilde P_\nu)\equiv T_1$, $\rho\in(0,1)$, або $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\ge\frac{\rho}{4}\frac{1}{n}d(\gamma-\beta_i;\tilde P_\nu)\equiv$ $\equiv T_2$, то, використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E_\nu\le\varepsilon^\alpha\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0. \tag{23}$$

Розглянемо випадок, коли $\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right| \le T_2$ або $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \le T_1$. Вважаємо, що $\tilde{P}_\nu = P_1$. Виконаємо в задачі (7)–(9) заміну $u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{\lambda t}$ і запишемо її у вигляді

$$(L_2 v_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right] v_m(t,x) =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} [a_{ij}(P_1) - a_{ij}(t,x)]\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} v_m +$$

$$+ (a_0(t,x) - \lambda)v_m + e^{\lambda t} f_m(t,x) \equiv F(t,x,v_m),$$

$$v_m(0,x) = \varphi_m(x) - \sum_{j=1}^{N} k_j(x) e^{-\lambda t_j} v_m(t_j,x) \equiv \Phi(x,v_m),$$

$$(L_0 v_m)(t,x)\big|_\Gamma \equiv \left[\sum_{i=1}^{n} h_i(P_1)\partial_{x_i} v_m\right]\bigg|_\Gamma = \bigg(-\sum_{i=1}^{n}[h_i(t,x) - h_i(P_1)]\partial_{x_i} v_m +$$

$$+ h_0(t,x)v_m + \psi_m(t,x)e^{\lambda t}\bigg)\bigg|_\Gamma \equiv G(t,x;v_m). \tag{24}$$

Нехай $\left|x_i^{(1)} - \xi_i\right| \le 2T_2$, $\xi \in \partial D$. Позначимо через $\mathcal{K}(r;P)$ кулю радіуса r, $r \ge 8T_2 n$, з центром в деякій точці $P \in \Gamma$, яка містить точки P_1, H_i, P_2. Використовуючи обмеження на гладкість поверхні ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap \mathcal{K}(r;P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ [13, с. 126], в результаті якого область $\Pi = Q \cap \mathcal{K}(r;P)$ переходить в $\tilde{\Pi}$, для точок якої $t \ge 0$, $y_n \ge 0$. Якщо покласти при цьому перетворенні $v_m(t,x) \equiv \equiv \omega_m(t,y)$, $P_\nu \equiv B_\nu$, $d(\gamma;P_1) \equiv \tilde{d}(\gamma;B_1)$ і $H_i \equiv M_i$ і позначити коефіцієнти диференціальних виразів L_2 і L_0 через $r_{ij}(t,y)$, $\ell_i(t,y)$, то $\omega_m(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(B_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\right]\omega_m = F(t,\psi(y),\omega_m),$$

$$\omega_m(0,x) = \Phi(\psi(y),\omega_m),$$

$$\sum_{k=1}^{m} \ell_k(B_1)\partial_{y_k} v_m\Big|_{y_n=0} = G(t,\psi(y),\omega_m)\big|_{y_n=0}. \tag{25}$$

Зробимо в задачі (25) заміну $\omega_m(t,y) = V_m(t,z)$, де

$$z_i = d_1(\beta_i^{(1)};t^{(1)})\tilde{d}_2(\beta_i^{(2)};y_i^{(1)})y_i.$$

Позначимо $z_i^{(1)} = d_1(\beta_i^{(1)};t^{(1)})\tilde{d}_2(\beta_i^{(2)};y_i^{(1)})y_i^{(1)}$, $\Pi_\delta = \{(t,z) : \left|t - t^{(1)}\right| \le \delta^2 T_1$, $\left|z_i - z_i^{(1)}\right| \le \delta n^{-1}\frac{\rho}{4}\tilde{d}(\gamma;B_1),\ i \in \{1,\dots,n\}\}$ і виберемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,z)$, яка задовольняє умови

$$\eta(\tau,z) = \begin{cases} 1, & (t,z) \in \Pi_{1/4}, \quad 0 \le \eta(t,z) \le 1, \\ 0, & (t,z) \not\in \Pi_{3/4}, \quad \left|\partial_t^j \partial_z^k \eta\right| \le c_{jk}\tilde{d}^{-1}((2|k| + j)\gamma;B_1),\ \ j + 2|k| \le 3. \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z) = V_m(t,z)\eta(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(B_1)d_1(\beta_i^{(1)}+\beta_j^{(1)};t^{(1)})\tilde{d}_2(\beta_i^{(2)};y_i^{(1)})\tilde{d}_2(\beta_j^{(2)};y_j^{(1)})\partial_{z_i}\partial_{z_j}\right]W_m =$$

$$= V_m\partial_t\eta - \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(B_1)d_1(\beta_i^{(1)}+\beta_j^{(1)};t^{(1)})\tilde{d}_2(\beta_i^{(2)};y_i^{(1)})\times$$

$$\times\tilde{d}_2(\beta_j^{(2)};y_j^{(1)})[\partial_{z_i}V_m\partial_{z_j}\eta + \partial_{z_j}V_m\partial_{z_i}\eta + V_m\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta] +$$

$$+ F(t,\psi,V_m)\eta(t,z) \equiv F_1(t,z;V_m),$$

$$W_m(0,z) = \Phi(\psi,V_m)\cdot\eta(0,z) \equiv \Phi_1(z,V_m),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ell_i(B_1)d_1(\beta_i^{(1)};t^{(1)})\tilde{d}_2(\beta_i^{(2)};y_i^{(1)})\partial_{z_i}W_m\big|_{z_n=0} = \left[V_m\sum_{i=1}^{n}\ell_i(B_1)d_1(\beta_i^{(1)};t)\times\right.$$

$$\left.\times\tilde{d}_2(\beta_i^{(2)};y_i^{(1)})\partial_{z_i}\eta + G(t,\psi,V_m)\eta(t,z)\right]\Big|_{z_n=0} = G_1(t,z,V_m)\big|_{z_n=0}. \tag{26}$$

На підставі теореми 5.3 із [6, с. 364] для розв'язку задачі (26) і довільних точок N_1 і $N_2 \in \Pi_{1/4}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(N_1,N_2)\left|\partial_t^j\partial_z^k V_m(N_1) - \partial_t^j\partial_z^k V_m(N_2)\right| \le c(\|F_1\|_{C^{\alpha}(\Pi_{3/4})} +$$

$$+\|\Phi_1\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}\cap(t=0))} + \|G_1\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4}\cap(z_n=0))}), \tag{27}$$

$d(N_1,N_2)$ − параболічна відстань між точками N_1 і N_2.

Враховуючи нерівність (27), властивості функції $\eta(t,z)$, обмеження на коефіцієнти виразів L_0, L_2 і повертаючись до змінних (t,x), знаходимо

$$E_\nu \le c(\|f_m;\gamma,\beta;0;Q\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \|\psi_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{1+\alpha} + \|v_m;Q\|_0) +$$

$$+ (\mu + n^2\rho^2 + n\rho + \varepsilon)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2. \tag{28}$$

Нехай $|x_i^{(1)} - \xi_i| \ge 2T_2$, $\xi \in \partial D$. В задачі (24) зробимо заміну $v_m(t,x) = V_m(t,z)$, де $z_i = d_1(\beta_i^{(1)};t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)};x_i^{(1)})x_i$.

Позначимо

$$\tilde{\Pi}_\delta = \{(t,z): |t - t^{(1)}| \le \delta^2 T_1, |z_i - z_i^{(1)}| \le \delta n^{-1}\frac{\rho}{4}d(\gamma;P_1), \quad i \in \{1,\dots,n\}\},$$

$$\eta_1(\tau,z) = \begin{cases} 1, & (t,z)\in\tilde{\Pi}_{1/4},\ \ 0 \le \eta_1(t,z) \le 1, \\ 0, & (t,z)\in\tilde{\Pi}_{3/4},\ \ |\partial_t^j\partial_z^k\eta_1| \le c_{jk}d^{-1}((2|k|+j)\gamma;P_1),\ \ j+2|k| \le 3. \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z) = V_m(t,z)\eta_1(t,z)$ в області $\tilde{\Pi}_\delta$ задовольняє крайову задачу

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)}+\beta_j^{(1)};t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)};x_i^{(1)})d_2(\beta_j^{(2)};x_j^{(1)})\partial_{z_i}\partial_{z_j}\right]W_m =$$

$$= V_m\partial_t\eta_1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d_1(\beta_i^{(1)}+\beta_j^{(1)};t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)};x_i^{(1)})\times$$

$$\times d_2(\beta_j^{(2)};x_j^{(1)})[\partial_{z_i}V_m\partial_{z_j}\eta_1 + \partial_{z_j}V_m\partial_{z_i}\eta_1 + V_m\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta_1] +$$

$$+ F(t,Z,V_m) \equiv F_2(t,z;V_m),$$

$$W_m(0,z) = \Phi(Z, V_m)\eta_1(0,z), \qquad W_m(t,z)\big|_\Gamma = 0, \tag{29}$$

де $Z = (d_1^{-1}(\beta_i^{(1)}; t^{(1)}) d_2^{-1}(\beta_i^{(2)}; x_i^{(1)}) z_1, \ldots, d_1^{-1}(\beta_n^{(1)}; t^{(1)}) d_2^{-1}(\beta_n^{(2)}; x_n^{(1)}) z_n)$.

На підставі теореми 3.2 із [6, с. 364], враховуючи властивості функції $\eta_1(t,z)$, умови ***1°–3°*** і повертаючись до змінних (t,x), одержимо

$$E_\nu \le c_1(\|f_m;\gamma;\beta;0;Q\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} + \|u_m;Q\|_0) +$$

$$+ (\mu + n^2\rho^2 + n\rho + \varepsilon)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2. \tag{30}$$

Скориставшись нерівностями (23), (28), (30) і вибравши ρ і ε достатньо малими, одержимо нерівність (22). ◊

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Враховуючи нерівності (12) і (22), запишемо нерівність

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c_1(\|f\cdot g;\gamma;\beta;0;Q\|_\alpha + \|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} +$$

$$+ \|\psi;\gamma;\beta;0;Q\|_{1+\alpha}), \tag{31}$$

права частина якої не залежить від m. Крім того, послідовності

$$\{V_m^{(0)}\} = \{|u_m(P)|\},$$

$$\{V_m^{(1)}\} = \{d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}; t) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}; x_i)\,|\partial_{x_i} u_m(P)|\},$$

$$\{V_m^{(2)}\} = \{d(2\gamma; P)\,|\partial_t u_m(P)|\},$$

$$\{V_m^{(3)}\} = \{d_1(2\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)} - \beta_j^{(1)}; t) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}; x_i) d_2(\gamma^{(2)} - \beta_j^{(2)}; x_j) \times$$

$$\times |\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(P)|\}$$

рівномірно обмежені і одностайно неперервні в області $\bar Q$. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{V_{m_k}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $\bar Q$ до $V^{(\nu)}$, $\nu \in \{1, \ldots, 4\}$. Переходячи до границі при $k \to \infty$ в задачі (7)–(9), одержуємо, що $u(t,x) = V^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (2)–(4) і $u(t,x) \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$. ◊

Теорема 6. *Якщо виконуються умови **1°–3°**, то єдиний розв'язок задачі* (2)–(4) *в просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою*

$$u(t,x;p(x),q(x)) = \int_Q \mathcal{E}_1(t,x;d\tau,d\xi) f(\tau) g(\xi, p(\xi)) +$$

$$+ \int_D \mathcal{E}_2(t,x;d\xi)\varphi(\xi, q(\xi)) +$$

$$+ \int_\Gamma \mathcal{E}_3(t,x;d\tau,d_\xi S)\psi(\tau,\xi). \tag{32}$$

Д о в е д е н н я. Розглядаючи $u(t,x;p(x),q(x))$ при фіксованих (t,x) як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f\cdot g, \varphi, \psi)$ на нормованому просторі $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ з нормою, що дорівнює правій частини нерівності (16), згідно з теоремою Рісса, оскільки $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) \subset C(Q)$, можна вважати, що $u(t,x;p(x),q(x))$ породжує борелівську міру $\mathcal{E}(t,x,Z)$, визначену на σ-алгебрі множин Z області $\bar Q$, включаючи Q і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціонала визначається формулою (32). ◊

Задача оптимального керування. Для встановлення існування розв'язку задачі (1)–(4) потрібно встановити розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій (u_m, p, q), на яких функціонал

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_D \mathcal{F}_1(t,x;u_m(t,x;p(x),q(x)),p(x))\,dx +$$
$$+ \int_D \mathcal{F}_2(x;\boldsymbol{\omega},q(x))\,dx \tag{33}$$

досягає мінімуму в класі функцій $(p,q) \in V$, із яких u_m є розв'язком задачі

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t)\cdot g_m(x,p(x)),$$
$$u_m(0,x;p(x),q(x)) + \sum_{j=1}^N k_j(x)\omega_j(t_j,x) = \varphi_m(x,q(x)),$$
$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{i=1}^n h_i(t,x)\partial_{x_i}u_m + h_0(t,x)u_m - \psi_m(t,x)\right] = 0, \tag{34}$$

де

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1,\ldots,\omega_N\} = \{u_m(t_1,x,p(x),q(x)),\ldots,u_m(t_N,x,p(x),q(x))\}.$$

За умов ***1°–4°*** для будь-яких $(p,q)\in V$ існує єдиний розв'язок задачі (34) і для нього справджується оцінка (31).

Позначимо

$$\mu(\xi) = \int_0^T f_m(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\int_\tau^T e^{-\lambda t}\,dt\int_D \frac{\partial\mathcal{F}_1(t,x;u_m,p)}{\partial u_m}G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)\,dx +$$
$$+\sum_{j=1}^N\int_0^T e^{-\lambda t}\,dt\int_0^{t_j} f_m(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\int_D\frac{\partial\mathcal{F}_1(t,x;u_m,p)}{\partial u_m}Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi)\,dx +$$
$$+\sum_{i=1}^N\left(\int_0^{t_i} f_m(\tau)e^{-\lambda(t_i-\tau)}\,d\tau\int_D\frac{\partial\mathcal{F}_2(x,\boldsymbol{\omega},q)}{\partial\omega_i}G_m^{(1)}(t_i,x,\tau,\xi)\,dx +\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^N\int_0^{t_j} f_m(\tau)e^{-\lambda(t_i-\tau)}\,d\tau\int_D\frac{\partial\mathcal{F}_2(x,\boldsymbol{\omega},q)}{\partial\omega_i}Z_j^{(1)}(t_i,x,\tau,\xi)\,dx\right),$$

$$\eta(\xi) = \int_0^T e^{-\lambda t}\,dt\int_D\frac{\partial\mathcal{F}_1(t,x;u_m,p)}{\partial u_m}\left(G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)+\sum_{j=1}^N Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi)\right)dx +$$
$$+\sum_{i=1}^N\int_D\frac{\partial\mathcal{F}_2(x,\boldsymbol{\omega},q)}{\partial\omega_i}\left(G_m^{(1)}(t_i,x,0,\xi)+\sum_{j=1}^N Z_j^{(1)}(t_i,x,0,\xi)\right)dx,$$

$$H_1(\mu,p,u_m) = \mu(x)g_m(x,p(x)) + \int_0^T\mathcal{F}_1(t,x;u_m,p)\,dt,$$

$$H_2(\eta,q,u_m) = \eta(x)\varphi_m(x,q(x)) + \mathcal{F}_2(x;\boldsymbol{\omega},q).$$

Справджуються такі теореми.

Теорема 7. *Якщо* $\partial_p H_1(\mu, u_m, p) > 0$ *і* $\partial_q H_2(\eta, u_m, q) > 0$, *то оптимальним є керування* (p_1, q_1), *а оптимальним розв'язком задачі* (33), (34) *є* $u_m^{(0)}(t, x; p, q) = u_m(t, x; p_1, q_1)$.

Якщо $\partial_p H_1(\mu, u_m, p) < 0$ *і* $\partial_q H_2(\eta, u_m, q) > 0$, *то оптимальним є керування* (p_2, q_1), *а оптимальним розв'язком задачі* (33), (34) *є* $u_m(t, x; p_2, q_1)$.

Якщо $\partial_p H_1(\mu, u_m, p) > 0$ *і* $\partial_q H_2(\eta, u_m, q) < 0$, *то оптимальним є керування* (p_1, q_2), *а оптимальним розв'язком задачі* (33), (34) *є* $u_m(t, x; p_1, q_2)$.

Якщо $\partial_p H_1(\mu, u_m, p) < 0$ *і* $\partial_q H_2(\eta, u_m, q) < 0$, *то оптимальним є керування* (p_2, q_2), *а оптимальним розв'язком задачі* (33), (34) *є* $u_m(t, x; p_2, q_2)$.

Нехай умови теореми 7 не виконуються. Тоді правильною є така

Теорема 8. *Для того щоб* $(p^{(0)}, q^{(0)})$ *і відповідний розв'язок задачі* (34) $u_m^{(0)}(t, x; p^{(0)}, q^{(0)})$ *були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

(***i***) *функція* $H_1(\mu, u_m, p)$ *за аргументом* p *має в точці* $p^{(0)}$ *мінімальне значення;*

(***ii***) *функція* $H_2(\eta, u_m, q)$ *за аргументом* q *має в точці* $q^{(0)}$ *мінімальне значення;*

(***iii***) *для довільного вектора* $(e_1, e_2) \neq 0$ *і* $(t, x) \in Q$ *виконується нерівність*

$$\partial_{u_m}^2 \mathcal{F}_1(t, x; u_m^{(0)}, p^{(0)}) e_1^2 + 2\partial_p \partial_{u_m} \mathcal{F}_1(t, x; u_m^{(0)}, p^{(0)}) e_1 e_2 + \\ + \partial_p^2 \mathcal{F}_1(t, x; u_m^{(0)}, p^{(0)}) e_2^2 > 0\,;$$

(***iiii***) *для довільного вектора* $(\nu_1, \ldots, \nu_{N+1}) \neq 0$ *і* $x \in D$ *виконується нерівність*

$$\sum_{ij=1}^{N+1} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2(x; \boldsymbol{\omega}^{(0)}, \omega_{N+1}^{(0)})}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \nu_i \nu_j > 0\,,$$

де $\omega_{N+1}^0 = q^{(0)}(x)$.

Д о в е д е н н я теорем 7, 8 проводиться за допомогою методики, запропонованої в [11]. Переходячи до границі в задачі (33), (34) при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$, одержимо оптимальний розв'язок задачі (1)–(4).

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, № 4. – С. 739–740.
2. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
4. *Иванчов М. И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 3. – С. 612–621.
5. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T управления упругими граничными силами на двух концах струны // Докл. РАН. – 2007. – **417**, № 4. – С. 456–463.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., vol 23. – Providence, RI: AMS, 1968.

7. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – Москва: Мир, 1972. – 414 с.
8. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – Москва: Наука, 1975. – 478 с.
9. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
10. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
11. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
12. *Пукальський І. Д.* Параболічна крайова задача і задача оптимального керування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 34–41.
    Те саме: *Pukalskyi I. D.* A parabolic boundary-value problem and a problem of optimal control // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 2. – P. 159–168.
13. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equation of parabolic type. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1964.
14. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
15. *Lange H., Teismann H.* Controltability of the nonlinear Schrödinger equation in the vicinity of the ground state // Math. Meth. in Appl. Sci. – 2007. – **30**, No. 13. – P. 1483–1505.
16. *Majewski M.* On the existence of optimal solutions to an optimal control problem // J. Optimiz. Theory and Appl. – 2006. – **126**, No. 3. – P. 635–651.
17. *Rösch A., Tröltzsch F.* Existence of regular Lagrange multipliers for a nonlinear elliptic optimal control problem with pointwise control-state constraints // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 2006. – **45**, No. 2. – P. 548–564.
18. *Wang Gengsheng, Wang Lijuan, Yang Donghui.* Shape optimization of an elliptic equation in an exterior domain // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 2006. – **45**, No. 2. – P. 532–547.
19. *Yanlei Kou, Shijin Ding.* Solutions of Ginzburg – Landau equations with weight and minimizers of the renormalized energy // Appl. Math. J. Chin. Univ. B. – 2007. – **22**, No. 1. – P. 48–60.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ВЫРОЖДЕНИЕМ И ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется параболическая краевая задача с многоточечным условием по временной переменной для линейного параболического уравнения со степенными особенностями на координатных плоскостях. Полученный результат используется для исследования задачи оптимального управления с внутренним и финальным управлением.

NONLOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH DEGENERATION AND OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR LINEAR PARABOLIC EQUATIONS

The parabolic boundary-value problem with multi-point condition with respect to time variable for the linear parabolic equation and with power peculiarities on the coordinate planes is investigated. The obtained result is used to investigate optimal control problem in the cases of internal and final control.

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
24.06.10