УДК 514.765.1+512.813.4

В. А. Кіосак

ПРО КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ МАЙЖЕ ЕЙНШТЕЙНОВИХ ПРОСТОРІВ

Вивчено конформні відображення майже ейнштейнових просторів. Доведено замкнутість вказаних просторів відносно конциркулярних відображень. Введено поняття мобільності псевдоріманових просторів відносно конциркулярних відображень. Знайдено тензорну ознаку максимально мобільних майже ейнштейнових просторів.

Об'єктом дослідження є рівняння

$$E_{ij} = u_i u_j , \tag{1}$$

де $E_{ij} \overset{\text{def}}{=} R_{ji} - \dfrac{R}{n} g_{ij}$ – тензор Ейнштейна; R_{ij} – тензор Річі; R – скалярна кривина; u_i – деякий вектор псевдоріманового простору V_n, $n > 2$, з метричним тензором g_{ij}. Рівняння (1) давно привернуло увагу дослідників, перш за все, застосуванням у механіці, зокрема, в гідромеханіці, а також як узагальнення просторів Ейнштейна, тобто просторів, у яких тензор Ейнштейна є нульовим [3, 5–9].

Означення 1. Псевдоріманів простір V_n, відмінний від простору сталої кривини, називають *майже ейнштейновим* і позначають через M_n, якщо в ньому виконуються умови (1).

Зауважимо, що, згортаючи (1) і враховуючи безслідність тензора Ейнштейна, можна легко переконатись, що вектор u_i за необхідністю є ізотропним, тобто

$$u_\alpha u^\alpha = 0 .$$

Тут $u^i = u_\alpha g^{\alpha i}$; g^{ij} – елементи матриці, оберненої до g_{ij}.

Означення 2. *Конформним відображенням* називають взаємно однозначну відповідність між точками псевдоріманових просторів V_n та $\bar{V}_n$ таку, що

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x) , \tag{2}$$

де σ – деяка функція.

Якщо σ – стала, то відображення називають гомотетією [3, 4].

Надалі обмежимося розглядом відображень, відмінних від гомотетичних.

Зі співвідношення (2) отримаємо

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij} ,$$

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_i \sigma_j + \delta^h_j \sigma_i - \sigma^h g_{ij} ,$$

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k \sigma_{ij} - \delta^h_j \sigma_{ik} + g^{h\alpha}(\sigma_{\alpha k} g_{ij} - \sigma_{\alpha j} g_{ik}) + \Delta_1 \sigma (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}) ,$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij} , \tag{3}$$

$$\bar{R} = e^{-2\sigma}(R + 2(n-1)\Delta_2 \sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma) . \tag{4}$$

Тут $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ – символи Христофеля другого роду; R^h_{ijk} – тензор Рімана; δ^h_i –

символи Кронекера; $R_{ij} \overset{\text{def}}{=} R^{\alpha}_{ij\alpha}$; $R \overset{\text{def}}{=} R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ – скалярна кривина; $\sigma_i \equiv$ $\equiv \dfrac{\partial\sigma}{\partial x^i} \equiv \sigma_{,i}$; $\sigma^h = \sigma_\alpha g^{\alpha h}$,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i}\sigma_{,j}, \tag{5}$$

$\Delta_1\sigma$ та $\Delta_2\sigma$ – перший та другий символи Бельтрамі, що визначаються як

$$\Delta_1\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}, \qquad \Delta_2\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha\beta}.$$

Кома в індексі – знак коваріантної похідної в V_n. Об'єкти конформно відповідного до заданого псевдоріманового простору V_n будемо позначати рискою зверху: $\bar{V}_n$.

Із (3), враховуючи (2), (4) та означення просторів Ейнштейна, будемо мати

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} - \frac{n-2}{n}(\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma)g_{ij}. \tag{6}$$

Серед конформних відображень виділяють спеціальний тип відображень, які зберігають геодезичні кола [13].

Означення 3. Крива в псевдорімановому просторі V_n називається *геодезичним колом*, якщо для неї перша кривина є сталою, а друга тотожно дорівнює нулеві.

Означення 4. Конформні відображення псевдоріманового простору V_n, при яких зберігаються геодезичні кола, тобто кожне геодезичне коло простору V_n переходить у геодезичне коло конформного до нього $\bar{V}_n$, називають *конциркурярними відображеннями.*

Необхідною і достатньою умовою того, що конформне відображення буде конциркулярним, є виконання у ньому таких умов для функції σ із рівнянь (2):

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma}{n} g_{ij}. \tag{7}$$

Враховуючи (7) і (6), сформулюємо таку теорему [10, 11].

Теорема 1. *Для того щоб псевдоріманів простір V_n допускав конформне відображення зі збереженням тензора Ейнштейна, необхідно та достатньо, щоб відображення було конциркулярним.*

Розглянемо конциркулярні відображення майже ейнштейнових просторів. Враховуючи теорему 1 і означення 1, отримуємо

Наслідок 1. *Майже ейнштейнові простори M_n є замкнутими відносно конциркулярних відображень, тобто, якщо майже ейнштейнів простір M_n допускає конциркулярне відображення на псевдоріманів простір $\bar{V}_n$, то $\bar{V}_n$ – також майже ейнштейнів простір .*

Умови інтегровності рівнянь (7) з урахуванням тотожності Річі мають вигляд

$$\sigma_\alpha R^{\alpha}_{ijk} = \rho_k g_{ij} - \rho_j g_{ik}, \tag{8}$$

де

$$\rho_k = \frac{1}{n}(\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma)_{,k} - (\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma)\sigma_k. \tag{9}$$

Домножаючи (8) на σ^i і згортаючи за i, з огляду на те, що $\sigma^\alpha \sigma^\beta R_{\alpha\beta jk} = 0$, отримаємо

$$\rho_k \sigma_j - \rho_j \sigma_k = 0.$$

Звідси будемо мати

$$\rho_k = B\sigma_k. \tag{10}$$

Тут B – деякий інваріант. Тоді (8) набуде такого вигляду:

$$\sigma_\alpha R^\alpha_{ijk} = B(\sigma_k g_{ij} - \sigma_j g_{ik}).$$

Згортаючи з g^{ij}, запишемо

$$\sigma_\alpha R^\alpha_k = B(n-1)\sigma_k. \tag{11}$$

Враховуючи в (11) те, що простір майже ейнштейнів, отримуємо

$$\frac{R}{n}\sigma_k + \sigma^\alpha u_\alpha u_k = B(n-1)\sigma_k. \tag{12}$$

Домножимо (12) на u^k і виконаємо згортку за індексом k:

$$\sigma^\alpha u_\alpha \left(\frac{R}{n} - B(n-1)\right) = 0. \tag{13}$$

Із (12) та (13), оскільки і $u_i \neq 0$, і $\sigma_i \neq 0$, випливає, що обидва співмножники в (13) дорівнюють нулеві, тобто

$$\sigma^\alpha u_\alpha = 0$$

та

$$B = \frac{R}{n(n-1)}. \tag{14}$$

Отже, доведено такі твердження.

Теорема 2. *Якщо майже ейнштейнів простір M_n допускає конциркулярні відображення, то вектори u_i та σ_i взаємно ортогональні.*

Теорема 3. *Для майже ейнштейнових просторів M_n умови інтегровності рівнянь* (7) *мають вигляд*

$$\sigma_\alpha Y^\alpha_{ijk} = 0,$$

де

$$Y^h_{ijk} = R^\alpha_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$$

– *тензор конциркулярної кривини* [12, 13].

З метою вивчення геометричних властивостей майже ейнштейнових просторів, що допускають конциркулярні відображення, доведемо таку теорему.

Теорема 4. *Якщо при конциркулярних відображеннях майже ейнштейнових просторів M_n вектор σ_i має сталу довжину, то простір M_n є простором сталої скалярної кривини.*

Д о в е д е н н я. Нехай вектор σ_i має сталу довжину, тобто

$$\sigma^\alpha \sigma_\alpha = c,$$

де c – деяка стала. Тоді

$$\sigma^\alpha \sigma_{\alpha,j} = 0$$

або з урахуванням (5) та (7)

$$c + \frac{1}{n}(\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma) = 0 ,$$

звідки

$$(\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma)_{,i} = 0 .$$

І тоді умова (9) набуває вигляду

$$\rho_k = nc\sigma_k . \tag{15}$$

Враховуючи (10), (14) та (15), отримаємо

$$\frac{R}{n(n-1)} = nc ,$$

тобто

$$R_{,i} = 0 ,$$

що й потрібно було довести. ◊

Зробивши заміну $v \overset{\text{def}}{=} -e^{-\sigma}$ у рівнянні (7), переконуємось, що в просторі V_n існує векторне поле таке, що

$$v_{i,j} = \tau \cdot g_{ij} ,$$

де $v_i = v_{,i}$, $\tau = -e^{-\sigma} \cdot \rho$.

Векторне поле v_i називають еквідистантним, а псевдоріманові простори, що допускають еквідистантні векторні поля, − еквідистантними просторами.

При $\tau \neq 0$ еквідистантний простір будемо вважати належним до основного типу, а при $\tau \equiv 0$ − до особливого.

Якщо вектор v_i ізотропний, тобто $v_\alpha v_\beta g^{\alpha\beta} = 0$, то еквідистантний простір належить за необхідністю до особливого типу. Еквідистантні простори основного типу характеризуються тим, що в них існує спеціальна система координат, у якій метричний тензор можна записати у вигляді

$$ds_n^2 = d(x^1)^2 + f(x^1) ds_{n-1}^2(x^2, \dots, x^n) .$$

Тут $f(x^1) \neq 0$ − деяка функція, ds_{n-1}^2 − метрика $(n-1)$-вимірного псевдоріманового простору [4].

Максимальну кількість $(n+1)$ еквідистантних векторних полів допускають простори сталої кривини і лише вони. Не існує псевдоріманових просторів, відмінних від просторів сталої кривини, що допускають більш ніж $(n-2)$ еквідистантні векторні поля.

Простори, що допускають $(n-2)$ еквідистантні векторні поля, характеризуються умовами

$$R_{ijk\ell} = B(g_{i\ell}g_{jk} - g_{ik}g_{j\ell}) + e(a_i b_j - a_j b_i)(a_k b_\ell - a_\ell b_k) , \tag{16}$$

$$a_{i,j} = \overset{1}{\xi}_j a_i + \overset{2}{\xi}_j b_i + c_i a_j , \tag{17}$$

$$b_{i,j} = \overset{3}{\xi}_j a_i + \overset{4}{\xi}_j b_i + c_i b_j , \tag{18}$$

$$c_{i,j} = \overset{5}{\xi}_j a_i + \overset{6}{\xi}_j b_i + c_i c_j - B g_{ij} . \tag{19}$$

Тут a_i, b_i − деякі взаємно ортогональні ненульові вектори; c_i, $\overset{\alpha}{\xi}_i$ − деякі вектори; $e = \pm 1$ [1].

Рівняння (7) та (11) утворюють систему типу Коші.

Означення 5. Максимальну кількість r параметрів, від якої залежить загальний розв'язок системи (7), (11), називають *степенем мобільності* псевдоріманового простору V_n відносно конциркулярних відображень [2].

Очевидно, що мобільність простору відносно конциркулярних відображень співпадає з кількістю еквідистантних векторних полів.

У майже ейнштейнових просторах із степенем мобільності $(n-2)$ відносно конциркулярних відображень умова (16) набуде вигляду

$$Y_{ijk\ell} = e(a_i b_j - a_j b_i)(a_k b_\ell - a_\ell b_k), \tag{20}$$

де $Y_{ijk\ell} = g_{\alpha i} Y^i_{jk\ell}$.

Згортаючи (20) та враховуючи (1), отримаємо

$$u_i u_j = e(-a_\alpha a^\alpha b_i b_j - a_i a_j b_\alpha b^\alpha), \tag{21}$$

звідки

$$0 = -2e \cdot a_\alpha a^\alpha b_\alpha b^\alpha .$$

Тобто серед векторів a_i, b_i один обов'язково є ізотропним, а інший – ні. Нехай ізотропним буде вектор b_i, тоді (21) набуде вигляду

$$u_i u_j = -e a_\alpha a^\alpha b_i b_j, \tag{22}$$

а умова (20)

$$Y_{ijk\ell} = \frac{1}{a^\alpha a_\alpha}(a_i u_j - a_j u_i)(a_k u_\ell - a_\ell u_k). \tag{23}$$

Справджується така

Теорема 5. *Якщо майже ейнштейнів простір M_n має степінь мобільності $(n-2)$ відносно конциркулярних відображень, то в ньому виконуються умови* (23), (17), (18), (19), *причому a_i, b_i, c_i – взаємно ортогональні вектори, a_i – неізотропний, а b_i – ізотропний, u_i задовольняє рівняння* (22), *а B* – (14).

Таким чином, отримано тензорну ознаку максимально мобільних відносно конциркулярних відображень майже ейнштейнових просторів, яка має вигляд алгебраїчних умов на тензор конциркулярної кривини.

1. *Киосак В. А., Микеш Й.* О степени подвижности римановых пространств относительно геодезических отображений // Геометрия погруженных многообразий: Межвуз. сб. науч. тр. – Москва: Моск. пед. гос. ун-т, 1986. – С. 27–32.
2. *Киосак В. А., Микеш Й., Евтушик Л. Е.* О мобильности пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 8. – С. 36–41.
3. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. – Москва: Наука, 1966. – 495 с.
4. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. – Москва: Наука, 1979. – 255 с.
5. *Chaki M. C., Maity R. K.* On quasi-Einstein manifolds // Publ. Math. Debrecen. – 2000. – **57**. – P. 297–306.
6. *Deszcz R., Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L.* Quasi-Einstein totally real submanifolds of S6(1) // Tohoku Math. J. – 1999. – **51**. – P. 461–478.
7. *Deszcz R., Głodowska M., Hotlos M., Senturk Z.* On certain quasi-Einstein semisymmetric hypersurfaces // Ann. Univ. Sci. Budapest. – 1998. – **41**. – P. 153–166.
8. *Deszcz R., Hotlos M., Senturk Z.* On curvature properties of quasi-Einstein hypersurfaces in semi-Euclidean spaces // Soochow J. Math. – 2001. – **27**, No. 4. – P. 375–389.
9. *Deszcz R., Hotlos M., Senturk Z.* Quasi-Einstein hypersurfaces in semi-Riemannian space forms // Colloq. Math. – 2001. – **81**. – P. 81–97.

10. *Kiosak V., Matveev V.* There are no conformal Einstein rescalings of complete pseudo-Riemannian Einstein metrics // C. R. Acad. Sci. (Paris). Ser. I. – 2009. – **347** – P. 1067–1069.
11. *Kiosak V., Mikeš J., Chepurna O.* Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor // J. Appl. Math. – 2010. – **8**, No. 1. – P. 253–258.
12. *Mikeš J., Kiosak V., Vanžurová A.* Geodesic mappings of manifolds with affine connection. – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2008. – 220 p.
13. *Yano K.* Concircular geometry // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1940. – **16**. – P. 195–200, 354–360; 442–448; 505–511.

О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПОЧТИ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Изучены конформные отображения почти эйнштейновых пространств. Доказана замкнутость указанных пространств относительно конциркулярных отображений. Введено понятие мобильности псевдоримановых пространств относительно конциркулярных отображений. Найден тензорный признак максимально мобильных почти эйнштейновых пространств.

ON CONFORMAL MAPPINGS OF QUASI-EINSTEIN SPACES

We study the conformal mappings of quasi-Einstein spaces. It is proved that they are closed with respect to concircular mappings. The notion of mobility of pseudo-Riemannian spaces with respect to concircular mappings is introduced. The tensor characteristic of maximal mobility for quasi-Einstein spaces is found.

Одеськ. нац. політех. ун-т, Одеса

Одержано
21.12.10