УДК 512.536

О. В. Гутік[1], К. П. Павлик[2,3], А. Р. Рейтер[1]

ПРО ТОПОЛОГІЧНІ НАПІВГРУПИ БРАНДТА

Описано структуру псевдокомпактних цілком 0-простих топологічних інверсних напівгруп і вказано достатні умови, за яких топологічні λ^0-розширення Брандта (абсолютно) H-замкненої напівгрупи є (абсолютно) H-замкненими напівгрупами.

1. Вступ. У роботі використовуємо термінологію, означення та позначення такі, як у [4, 9, 10]. Усі топологічні простори вважаємо гаусдорфовими.

Напівгрупа – це множина з заданою на ній бінарною асоціативною операцією. Якщо S – напівгрупа, то через S^0 $[S^1]$ позначатимемо S з приєднаним нулем [приєднаною одиницею], а через $E(S)$ – підмножину ідемпотентів у S. Через 1_S і 0_S позначатимемо одиницю і нуль напівгрупи S.

Нагадаємо [10], що напівгрупу S називають *інверсною*, якщо для довільного елемента x в S існує єдиний елемент x^{-1}, який називають *інверсним* до x, такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Напівгрупу S називають 0-*простою*, якщо вона не містить власних відмінних від нуля двосторонніх ідеалів. Напівгрупу S називають *цілком* 0-*простою*, якщо S є 0-простою і кожен відмінний від нуля ідемпотент в S є примітивним.

Топологічна (*інверсна*) *напівгрупа* – це гаусдорфовий топологічний простір із неперервною напівгруповою операцією (та інверсією).

Нехай S – напівгрупа з одиницею, I_λ – множина потужності $\lambda \ge 1$. На множині $B_\lambda(S) = (I_\lambda \times S^1 \times I_\lambda) \cup \{0\}$ означимо напівгрупову операцію «$*$» так:

$$(i,s,j) * (k,t,\ell) = \begin{cases} (i,st,\ell), & j = k, \\ 0, & j \ne k, \end{cases}$$

і $(i,s,j) * 0 = 0 * (i,s,j) = 0 * 0 = 0$ для довільних $i,j,k,\ell \in I_\lambda$, $s,t \in S^1$. Напівгрупу $B_\lambda(S)$ називають λ-*розширенням Брандта напівгрупи* S [1, 2]. Очевидно, що $B_\lambda(S)$ є матричною напівгрупою Ріса $M^0[S^1; I_\lambda, I_\lambda, M]$, де M – одинична $(I_\lambda \times I_\lambda)$-матриця. Якщо напівгрупа S складається з одного елемента і $\lambda \ge 2$, тоді $B_\lambda(S)$ є *напівгрупою* $(I_\lambda \times I_\lambda)$-*матричних одиниць*. Надалі для довільних $i,j \in I_\lambda$ позначатимемо підмножину $S_{i,j} = \{(i,s,j) \mid s \in S^1\}$ в $B_\lambda(S)$.

Означення 1 [**2**]. Нехай $\lambda \ge 1$, Ω – клас топологічних напівгруп і $(S,\tau) \in \Omega$. Якщо τ_B – топологія на $B_\lambda(S)$ така, що

1) $(B_\lambda(S), \tau_B) \in \Omega$,

2) $\tau_B|_{S_{i,i}} = \tau$ для деякого $i \in I_\lambda$,

то $(B_\lambda(S), \tau_B)$ називають *топологічним* λ-*розширенням Брандта напівгрупи* (S,τ) *у класі* Ω. Якщо Ω співпадає з класом усіх топологічних напівгруп, то топологічну напівгрупу $(B_\lambda(S), \tau_B)$ називають *топологічним* λ-*розширенням Брандта напівгрупи* (S,τ).

Нехай S − напівгрупа, I_λ − множина потужності $\lambda \ge 1$. На множині $B_\lambda(S) = (I_\lambda \times S^0 \times I_\lambda) \bigcup \{0\}$ означимо напівгрупову операцію «$*$» так:

$$(i,s,j) * (k,t,\ell) = \begin{cases} (i,st,\ell), & j = k, \\ 0, & j \ne k, \end{cases}$$

і $(i,s,j) * 0 = 0 * (i,s,j) = 0 * 0 = 0$ для довільних $i,j,k,\ell \in I_\lambda$, $s,t \in S^1$. Якщо 0_S − нуль напівгрупи S, то множина $I_0 = \{(i,0_S,j) \mid i,j \in I_\lambda\} \bigcup \{0\}$ є ідеалом в $B_\lambda(S)$. Фактор-напівгрупу Ріса $B_\lambda^0(S) = B_\lambda(S)/I_0$ називають λ^0*-розширенням Брандта напівгрупи* S [17]. Надалі для довільних $i,j \in I_\lambda$ позначатимемо підмножини

$$A_{i,j} = \begin{cases} \{(i,s,j) \mid s \in A\}, & 0 \notin A, \\ \{(i,s,j) \mid s \in A \setminus \{0_S\}\} \bigcup \{0\}, & 0 \in A, \end{cases}$$

і $A_{i,j}^* = A_{i,j} \setminus \{0\}$ в $B_\lambda^0(S)$.

Означення 2 [**17**]. Нехай $\lambda \ge 1$, Ω − клас топологічних напівгруп і $(S,\tau) \in \Omega$. Якщо τ_B − топологія на $B_\lambda^0(S)$ така, що

1) $(B_\lambda^0(S), \tau_B) \in \Omega$,

2) $\tau_B|_{S_{i,i}} = \tau$ для деякого $i \in I_\lambda$,

то $(B_\lambda^0(S), \tau_B)$ називають *топологічним* λ^0*-розширенням Брандта напівгрупи* (S,τ) *у класі* Ω. Якщо Ω співпадає з класом усіх топологічних напівгруп, то топологічну напівгрупу $(B_\lambda^0(S), \tau_B)$ називають *топологічним* λ^0*-розширенням Брандта напівгрупи* (S,τ).

Зауважимо, що кожне (топологічне) λ-розширенням Брандта $B_\lambda(S)$ (топологічної) напівгрупи S є (топологічним) λ^0-розширенням Брандта деякого (топологічного) моноїда T з нулем $B_\lambda^0(T)$ і, крім того, λ^0-розширення Брандта зберігаються гомоморфізмами на відміну від λ-розширень Брандта [20].

Нехай Ω − клас топологічних напівгруп.

Означення 3 [**15**, **23**]. Топологічну напівгрупу $S \in \Omega$ називають H*-замкненою в класі* Ω, якщо вона є замкненою піднапівгрупою у кожній напівгрупі T з класу Ω, що містить S як піднапівгрупу. Топологічну напівгрупу $S \in \Omega$ називають H*-замкненою*, якщо клас Ω співпадає з класом усіх топологічних напівгруп.

Означення 4 [**15**, **24**]. Топологічну напівгрупу $S \in \Omega$ називають *абсолютно* H*-замкненою в класі* Ω, якщо кожен неперервний гомоморфний образ напівгрупи S у напівгрупу $T \in \Omega$ є H-замкненою напівгрупою в класі Ω. Топологічну напівгрупу S називають *абсолютно* H*-замкненою*, якщо Ω співпадає з класом усіх топологічних напівгруп.

Топологічні λ- та λ^0-розширення Брандта напівгруп введено в роботі [1], де вперше також досліджувались їх алгебраїчні та топологічні властивості. Збереження H-замкнености та абсолютної H-замкнености в класі топологічних інверсних напівгруп λ-розширеннями Брандта вивчалися в [2] і [15]. Зокрема, було доведено, що топологічна інверсна напівгрупа є (абсолютно) H-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп тоді й тільки тоді, коли кожне її топологічне λ-розширення Брандта є (абсолютно) H-замкненою напівгрупою в класі топологічних інверсних напівгруп. У праці [17] аналогічні результати було отримано для топологічних λ^0-розширень Брандта в класі топологічних інверсних напівгруп. Збереження H-замкненості та абсолютної H-замкненості в класі топологічних напівгруп топологічними λ-розширеннями Брандта вивчалися у [2] і [3]. У праці [19] за допомогою цієї техніки описано структуру зліченно компактних 0-простих топологічних інверсних напівгруп, а в [8] описано будову компактних та зліченно компактних примітивних топологічних інверсних напівгруп. Категорні властивості λ^0-розширень Брандта вивчались в роботі [20].

Напівгрупові компактифікації топологічних напівгруп, які є напівтопологічними чи топологічними напівгрупами, вивчались у роботі [7], де було доведено, що, коли простір топологічної напівгрупи S є відкрито факторизовним, то напівгрупова операція з топологічної напівгрупи S продовжується до неперервної напівгрупової операції на Стоун-Чехівську компактифікацію βS топологічного простору S. Основні властивості, будова і проблематика з теорій псевдокомпактних та зліченно компактних паратопологічних груп і псевдокомпактних (зліченно компактних) напівтопологічних і топологічних напівгруп викладені в монографії A. Arhangel'skii, M. Tkachenko [6]. Неперервність інверсій у псевдокомпактних і зліченно компактних паратопологічний групах досліджувались у працях [5] і [22].

У цій роботі описано структуру псевдокомпактних цілком 0-простих топологічних інверсних напівгруп, а також вказано достатні умови, за яких топологічне λ^0-розширення Брандта (абсолютно) H-замкненої напівгрупи є (абсолютно) H-замкненою напівгрупою.

2. Псевдокомпактні топологічні напівгрупи Брандта. Нагадаємо [4], що топологічний простір X називають *псевдокомпактним,* якщо кожна локально скінченна підмножина в X є скінченною. Кожна неперервна функція, визначена на псевдокомпактному просторі, є обмеженою [4].

Теорема 1. *Кожна цілком 0-проста псевдокомпактна топологічна інверсна напівгрупа S є топологічним λ-розширенням Брандта $B_\lambda(G)$ псевдокомпактної топологічної групи G для деякого скінченного кардинала λ у класі топологічних інверсних напівгруп.*

Д о в е д е н н я. За теоремою 3.9 [10] напівгрупа S алгебраїчно ізоморфна λ-розширенню Брандта $B_\lambda(G)$ деякої групи G. Оскільки інверсія у напівгрупі S є неперервною, то відображення $\varepsilon^+ : S \to E(S)$ і $\varepsilon^- : S \to \to E(S)$, означені відповідно за формулами $\varepsilon^+(x) = x \cdot x^{-1}$ і $\varepsilon^-(x) = x^{-1} \cdot x$, є неперервними. Таким чином, оскільки неперервний образ псевдокомпактного простору є псевдокомпактним, то $E(S)$ − псевдокомпактний простір. За лемою 1 з [18] напівгратка $E(S)$ гомеоморфна одноточковій компактифікації Александрова дискретного простору потужності $|E(S)|$, причому нуль напівгратки $E(S)$ є наростом при цій компактифікації. Таким чином, довільний ненульовий ідемпотент напівгратки $E(S)$ є ізольованою точкою в $E(S)$. Оскільки відображення ε^+ і ε^- є неперервними, то кожна максимальна підгрупа

$$H(e) = \{x \in S \mid \varepsilon^+(x) = \varepsilon^-(x) = e\},$$

що містить ненульовий ідемпотент e, є відкрито-замкненою підмножиною в S. Тоді за теоремою Колмекса [11] (див. також 3.10.E(d) [4]) простір підгрупи $H(e)$ є псевдокомпактним. Оскільки напівгрупа S є 0-біпростою, то з теореми Ґріна (див. теорему 2.20 з [11]) випливає, що довільний підпростір

$$H(e,f) = \{x \in S \mid \varepsilon^+(x) = e,\ \varepsilon^-(x) = f\}$$

в S, де $e, f \in E(S) \setminus \{0\}$, є гомеоморфний простору підгрупи $H(e)$. А з неперервності відображень ε^{+} і ε^{-} випливає, що $H(e, f)$ − псевдокомпактний відкрито-замкнений підпростір в S. Отже, маємо, що

$$S \setminus \{0\} = \bigoplus_{e, f \in E(S) \setminus \{0\}} H(e, f).$$

Оскільки кожен ненульовий ідемпотент напівгрупи S є ізольованою точкою в $E(S)$, то множина $(\varepsilon^{+})^{-1}(e) = \bigcup\{H(e, f) \mid f \in E(S) \setminus \{0\}\}$ є відкрито-замкненою в S, а, отже, за теоремою Колмеса [11] (див. 3.10.E(d) [4]) $(\varepsilon^{+})^{-1}(e)$ − псевдокомпактний простір. З попередньо доведеного випливає, що

$$(\varepsilon^{+})^{-1}(e) = \bigoplus_{f \in E(S) \setminus \{0\}} H(e, f),$$

а тоді за теоремою 3.10.25 [4] напівгратка $E(S)$ є скінченною.

Таким чином, оскільки S − топологічна інверсна напівгрупа, то S є топологічним λ-розширенням Брандта $B_{\lambda}(G)$ псевдокомпактної топологічної групи $G = H(e)$ для деякого скінченного кардинала λ у класі топологічних інверсних напівгруп. ◊

Зауваження 1. З теореми 1 випливає, що кожна цілком 0-проста псевдокомпактна топологічна інверсна напівгрупа S є скінченною топологічною сумою псевдокомпактних підпросторів $H(e, f)$ та нуля напівгрупи S.

Нехай X − топологічний простір. Пара (Y, c), де Y − компактний гаусдорфовий простір і відображення $c : X \to Y$ − гомеоморфне вкладення простору X в Y таке, що $\mathrm{cl}_Y(c(X)) = Y$, називається *компактифікацією простору* X. Означимо частковий порядок $\prec$ на сім'ї усіх компактифікацій $C(X)$ простору X таким чином: $c_2(X) \prec c_1(X)$ тоді й тільки тоді, коли існує неперервне відображення $f : c_1(X) \to c_2(X)$ таке, що $f \circ c_1 = c_2$. Найбільший елемент сім'ї $C(X)$ стосовно так означеного часткового порядку $\prec$ називають *Стоун-Чехівською компактифікацією* топологічного простору X і позначають βX [4]. У [12] автори W. W. Comfort, R. A. Ross довели, що Стоун-Чехівська компактифікація псевдокомпактної топологічної групи є топологічною групою. Наступна теорема є аналогом теореми Комфорта−Росса.

Теорема 2. *Нехай S − цілком 0-проста псевдокомпактна топологічна інверсна напівгрупа. Тоді на Стоун-Чехівській компактифікації βS існує структура цілком 0-простої топологічної інверсної напівгрупи, при цьому відображення вкладення напівгрупи S у βS є гомеоморфізмом «в» («into»).*

Д о в е д е н н я. За теоремою 1 напівгрупа S топологічно ізоморфна топологічному λ-розширенню Брандта $B_{\lambda}(G)$ деякої топологічної групи G у класі топологічних інверсних напівгруп, причому $\lambda < \omega$ та $G_{\alpha,\beta}$ і $G_{\gamma,\delta}$ є гомеоморфними відкрито-замкненими псевдокомпактними підпросторами в $B_{\lambda}(G)$ для всіх $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in I_{\lambda}$. Очевидно, що топологічний простір $B_{\lambda}(G) \setminus \{0\}$ гомеоморфний добутку $G \times I_{\pi} \times I_{\pi}$, і оскільки множина $I_{\pi} \times I_{\pi}$ є скінченною, то за наслідком 3.10.27 [4] простір $B_{\lambda}(G) \setminus \{0\}$ є псевдокомпактним. Тоді згідно з теоремою 1 [14] виконується рівність

$$\beta(G \times I_{\pi} \times I_{\pi}) = \beta G \times \beta I_{\pi} \times \beta I_{\pi} = \beta G \times I_{\pi} \times I_{\pi},$$

а, отже, $\beta(B_{\lambda}(G)) = B_{\lambda}(\beta G)$. ◊

З теореми 1 випливає такий

Наслідок 1. *Кожна цілком* 0*-проста псевдокомпактна топологічна інверсна напівгрупа є щільною піднапівгрупою* 0*-простої компактної топологічної інверсної напівгрупи.*

З наслідку 1 випливає

Наслідок 2. *Простір цілком* 0*-простої псевдокомпактної топологічної інверсної напівгрупи є цілком регулярним.*

3. H**-замкнені топологічні** λ^0**-розширення Брандта.**

Твердження 1. *Нехай топологічне* λ^0*-розширення Брандта* $B_\lambda^0(S)$ *топологічного моноїда* S *є піднапівгрупою топологічної напівгрупи* T. *Тоді для кожного елемента* $x=(i,s,j)\in B_\lambda^0(S)$, $i,j\in I_\lambda$, *існує відкритий окіл* $U(x)$ *точки* x *в* T *такий, що* $U(x)\bigcap B_\lambda^0(S)\subseteq S_{i,j}^*$.

Д о в е д е н н я. З неперервності напівгрупової операції в T випливає, що для довільного відкритого околу $W(x)$ точки x в T, що не містить нуля напівгрупи $B_\lambda^0(S)$, існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в T такий, що

$$(i,1_S,i)\cdot U(x)\cdot(j,1_S,j)\subseteq W(x).$$

Тоді $U(x)\bigcap B_\lambda^0(S)\subseteq S_{i,j}^*$, оскільки у протилежному випадку маємо, що

$$0\in(i,1_S,i)\cdot U(x)\cdot(j,1_S,j)\subseteq W(x). \qquad \Diamond$$

Твердження 2. *Нехай топологічне* λ^0*-розширення Брандта* $B_\lambda^0(S)$ *топологічного моноїда* S *є щільною піднапівгрупою топологічної напівгрупи* T. *Тоді*:

(***i***) *якщо елемент* $x\in T\setminus B_\lambda^0(S)$ *є ідемпотентом, то існує відкритий окіл* $U(x)$ *точки* x *в* T *такий, що* $U(x)\bigcap B_\lambda^0(S)\subseteq S_{i,i}^*$ *для деякого* $i\in I_\lambda$;

(***ii***) *максимальні ідемпотенти напівгрупи* $B_\lambda^0(S)$ *є максимальними ідемпотентами напівгрупи* T;

(***iii***) *напівгрупа* T *не містить правих (лівих) одиниць.*

Д о в е д е н н я. (***i***). Оскільки нуль напівгрупи $B_\lambda^0(S)$ є нулем напівгрупи T (див. лему 1 з [2]), то існує відкритий окіл $W(x)$ точки x в T, що не містить нуля 0 напівгрупи T. З неперервності напівгрупової операції в T випливає, що існує відкритий окіл $U(x)$ ідемпотента x в T такий, що $U(x)\cdot U(x)\subseteq W(x)$. Якщо окіл $U(x)$ містить точки або з двох різних множин $S_{i,i}^*$ і $S_{j,j}^*$, $i\neq j$, $i,j\in I_\lambda$, або ж точки з множини $S_{i,j}^*$, де $i\neq j$, $i,j\in I_\lambda$, то $0\in U(x)\cdot U(x)\subseteq W(x)$, а це суперечить вибору околу $W(x)$.

(***ii***). Зауважимо, що кожен елемент $(i,1_S,i)$ напівгрупи $B_\lambda^0(S)$ є максимальним ідемпотентом в $B_\lambda^0(S)$. Припустимо, що існує ідемпотент $e\in T\setminus B_\lambda^0(S)$ такий, що $(i,1_S,i)<e$ для деякого $i\in I_\lambda$. Тоді з неперервності напівгрупової операції в T та з твердження (***i***) випливає, що існує відкритий окіл $U(e)$ ідемпотента e в T такий, що $U(e)\bigcap B_\lambda^0(S)\subseteq S_{i,i}^*$, але за теоремою 1.7 з [9, Vol. 1] підмножина

$$(i,1_S,i)T(i,1_S,i)=(i,1_S,i)T\bigcap T(i,1_S,i)$$

є замкненою в T і, крім того, $S_{i,i}^*\subseteq(i,1_S,i)T(i,1_S,i)$ і $e\notin(i,1_S,i)T(i,1_S,i)$, а це суперечить тому, що e − точка дотику множини $B_\lambda^0(S)$ в T. З отриманого протиріччя випливає твердження (***ii***).

(***iii***). Припустимо, що напівгрупа T містить ліву одиницю 1_T^{ℓ}. Очевидно, що $1_T^{\ell} \notin B_{\lambda}^0(S)$. Тоді за твердженням (***i***) існує відкритий окіл $U(1_T^{\ell})$ точки 1_T^{ℓ} в T такий, що $U(1_T^{\ell}) \bigcap B_{\lambda}^0(S) \subseteq S_{i,i}^*$ для деякого $i \in I_{\lambda}$. Нехай $W(i,1_S,i)$ і $W(1_T^{\ell})$ – диз'юнктні відкриті околи точок $(i,1_S,i)$ і 1_T^{ℓ} в T. З неперервності напівгрупової операції в T випливає, що існують відкриті околи $V(i,1_S,i)$ і $V(1_T^{\ell})$ точок $(i,1_S,i)$ і 1_T^{ℓ} в T такі, що

$$V(1_T^{\ell}) \cdot V(i,1_S,i) \subseteq V(i,1_S,i), \qquad V(i,1_S,i) \subseteq W(i,1_S,i) \bigcap U(i,1_S,i)$$

і

$$V(1_T^{\ell}) \subseteq W(1_T^{\ell}).$$

Але тоді $(V(1_T^{\ell}) \cdot (i,1_S,i)) \bigcap V(1_T^{\ell}) \neq \varnothing$, що суперечить вибору околів $W(i,1_S,i)$ і $W(1_T^{\ell})$. З отриманого протиріччя випливає, що напівгрупа T не містить лівої одиниці. Доведення того факту, що напівгрупа T не містить правої одиниці є аналогічним. ◊

Лема 1. *Нехай топологічне λ^0-розширення Брандта $B_{\lambda}^0(S)$ топологічного моноїда S є піднапівгрупою топологічної напівгрупи T. Якщо $A_{i,j}$ – замкнена підмножина в T для деяких $i,j \in I_{\lambda}$, то $A_{k,\ell}$ – замкнена підмножина в T для всіх $k,\ell \in I_{\lambda}$.*

Д о в е д е н н я. Означимо відображення $\varphi : T \to T$ і $\psi : T \to T$ за формулами $\varphi(t) = (k,1_S,i) \cdot t \cdot (j,1_S,\ell)$ і $\psi(t) = (i,1_S,k) \cdot t \cdot (\ell,1_S,j)$. Оскільки відображення φ і ψ є неперервними як композиції зсувів в T, то $A = \psi^{-1}(A_{i,j})$ – замкнена підмножина в T. Тоді для відображення $f = \varphi \circ \psi$ звуження $f_A = f|_A : A \to A_{k,\ell}$ є ретракцією, а сама множина $A_{k,\ell}$ – ретрактом простору A. Отже, $A_{k,\ell}$ – замкнена підмножина в T. ◊

Теорема 3. *Нехай $B_{\lambda}^0(S)$ – топологічне λ^0-розширення Брандта топологічного моноїда S. Якщо напівгрупа S є H-замкненою і в'язка напівгрупи $B_{\lambda}^0(S)$ є компактною, то $B_{\lambda}^0(S)$ – H-замкнена топологічна напівгрупа.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що топологічна напівгрупа $B_{\lambda}^0(S)$ не є H-замкненою. Тоді існує топологічна напівгрупа T, яка містить $B_{\lambda}^0(S)$ як незамкнену піднапівгрупу. Оскільки замикання піднапівгрупи у топологічній напівгрупі є піднапівгрупою (див. [9, Vol. 1, c. 9]), то, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $B_{\lambda}^0(S)$ – щільна піднапівгрупа в T і $T \setminus B_{\lambda}^0(S) \neq \varnothing$. За лемою 1 з [2] нуль 0 напівгрупи $B_{\lambda}^0(S)$ є нулем напівгрупи T. Нехай $x \in T \setminus B_{\lambda}^0(S)$. Тоді $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$. Згідно з лемою 1 підмножина $S_{i,j}$ є замкненою в T для всіх $i,j \in I_{\lambda}$. Отже, кожен відкритий окіл точки x перетинає нескінченну кількість множин типу $S_{i,j}$, $i,j \in I_{\lambda}$.

Нехай $U(x)$ і $U(0)$ – відкриті околи точки x та нуля 0 в T відповідно такі, що $U(x) \bigcap U(0) = \varnothing$. Оскільки $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$, то з неперервності напівгрупової операції в T випливає, що існують відкриті околи $V(x)$ і $V(0)$ відповідно точки x та нуля 0 в T такі, що виконуються наступні умови:

$$V(x)\cdot V(0)\subseteq U(0),\qquad V(0)\cdot V(x)\subseteq U(0),\qquad V(0)\subseteq U(0)$$

і

$$V(x)\subseteq U(x).$$

З компактності в'язки $E(B_{\lambda}^{0}(S))$ випливає, що для довільного околу $W(0)$ нуля 0 в T напівгрупи $B_{\lambda}^{0}(S)$ множина

$$A(W(0))=\{(i,1_s,i)\mid(i,1_s,i)\notin W(0)\}$$

є скінченною. Таким чином, оскільки окіл $V(x)$ перетинає нескінченну кількість множин $S_{i,i}$, $i\in I_{\lambda}$, то виконується хоча б одна з умов:

$$(V(x)\cdot V(0))\bigcap V(x)\neq\varnothing\quad\text{або}\quad(V(0)\cdot V(x))\bigcap V(x)\neq\varnothing,$$

а це суперечить вибору околів $U(x)$ і $U(0)$. З отриманого протиріччя випливає твердження теореми. ◊

Лема 2. *Нехай $B_{\lambda}^{0}(S)$ − топологічне λ^0-розширення Брандта топологічного моноїда S, T − топологічна напівгрупа і $h:B_{\lambda}^{0}(S)\to T$ − неперервний гомоморфізм. Тоді $h(B_{\lambda}^{0}(S))$ − топологічне λ^0-розширення Брандта деякого топологічного моноїда M.*

Д о в е д е н н я. За твердженням 3.2 з [20] піднапівгрупа $h(B_{\lambda}^{0}(S))$ в T є λ^0-розширенням Брандта піднапівгрупи $M=h(S_{i,i})$ в T, для деякого $i\in I_{\lambda}$. Оскільки піднапівгрупа M в T є топологічним моноїдом, то з означення 2 випливає, що $h(B_{\lambda}^{0}(S))$ − топологічне λ^0-розширення Брандта топологічного моноїда M. ◊

З леми 2, твердження II.2 [13] і леми II.1.10 [21] випливає

Твердження 3. *Нехай $B_{\lambda}^{0}(S)$ − топологічне λ^0-розширення Брандта топологічного інверсного моноїда S в класі топологічних інверсних напівгруп, T − топологічна інверсна напівгрупа і $h:B_{\lambda}^{0}(S)\to T$ − неперервний гомоморфізм. Тоді $(B_{\lambda}^{0}(S))h$ − топологічне λ^0-розширення Брандта деякого топологічного інверсного моноїда M у класі топологічних інверсних напівгруп.*

Твердження 4. *Нехай $B_{\lambda}^{0}(S)$ − топологічне λ^0-розширення Брандта топологічного моноїда S, T − топологічна напівгрупа і $h:B_{\lambda}^{0}(S)\to T$ − неперервний гомоморфізм. Якщо A − непорожня підмножина в S така, що $h(A_{i,j})$ − замкнена підмножина в T для деяких $i,j\in I_{\lambda}$, то $h(A_{k,\ell})$ − замкнена підмножина в T для всіх $k,\ell\in I_{\lambda}$.*

Д о в е д е н н я. За лемою 2 маємо, що $h(B_{\lambda}^{0}(S))$ є топологічним λ^0-розширенням Брандта топологічного моноїда $M=h(S_{i,i})$, для деякого $i\in I_{\lambda}$. Означимо відображення $\varphi:T\to T$ і $\psi:T\to T$ за формулами $\varphi(t)=h((k,1_S,i))\cdot t\cdot h((j,1_S,\ell))$ і $\psi(t)=h((i,1_S,k))\cdot t\cdot h((\ell,1_S,j))$. Оскільки відображення φ і ψ є неперервними як композиції зсувів, то $A=\psi^{-1}(h(A_{i,j}))$ − замкнена підмножина в T. Тоді для відображення $f=\varphi\circ\psi$ звуження $f_A=f|_A:A\to h(A_{k,\ell})$ є ретракцією, а сама множина $h(A_{k,\ell})$ − ретрактом простору A. Таким чином, $h(A_{k,\ell})$ − замкнена підмножина в T. ◊

Теорема 4. *Нехай $B_\lambda^0(S)$ − топологічне λ^0-розширення Брандта топологічного моноїда S. Якщо напівгрупа S є абсолютно H-замкненою і в'язка напівгрупи $B_\lambda^0(S)$ є компактною, то $B_\lambda^0(S)$ − абсолютно H-замкнена топологічна напівгрупа.*

Д о в е д е н н я. Нехай T − довільна топологічна напівгрупа і $h : B_\lambda^0(S) \to T$ − неперервний гомоморфізм. Тоді за лемою 2 піднапівгрупа $h(B_\lambda^0(S))$ є топологічним λ^0-розширенням Брандта деякого топологічного моноїда M, а саме, топологічної піднапівгрупи $h(S_{i,i})$ в T для деякого $i \in I_\lambda$. Оскільки напівгрупа S є абсолютно H-замкненою, то $h(S_{i,i})$ − замкнена підмножина в T і за теоремою 3 і лемою 2 піднапівгрупа $h(B_\lambda^0(S))$ є замкненою в T. ◊

З теореми 4 випливає

Наслідок 3. *Якщо $B_\lambda^0(S)$ − топологічне λ^0-розширення Брандта компактного топологічного моноїда S таке, що в'язка напівгрупи $B_\lambda^0(S)$ є компактною, то $B_\lambda^0(S)$ − абсолютно H-замкнена топологічна напівгрупа.*

Теорема 5. *Нехай $B_\lambda^0(S)$ − топологічне λ^0-розширення Брандта топологічного інверсного моноїда S з компактною в'язкою $E(S)$ в класі топологічних інверсних напівгруп. Якщо простір $E(B_\lambda^0(S))$ є регулярним і $B_\lambda^0(S)$ − H-замкнена напівгрупа, то в'язка $E(B_\lambda^0(S))$ є компактною.*

Д о в е д е н н я. Припустимо супротивне: в'язка $E(B_\lambda^0(S))$ не є компактною підмножиною в $B_\lambda^0(S)$. Тоді, оскільки в'язка $E(S)$ напівгрупи S є компактною, то за твердженням 1 існує відкритий окіл $U(0)$ нуля 0 напівгрупи $B_\lambda^0(S)$ в $E(B_\lambda^0(S))$ такий, що множина $E(B_\lambda^0(S)) \setminus U(0)$ перетинає нескінченну кількість множин типу $E(S)_{i,i}$, $i \in I_\lambda$. Оскільки простір $E(B_\lambda^0(S))$ є регулярним, то існує відкритий окіл $V(0)$ нуля в $E(B_\lambda^0(S))$ такий, що $\overline{V(0)} \subseteq U(0)$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що таких множин є зліченна кількість, і перенумеруємо їх натуральними числами: $E(S)_{i,i}$, $i = 1, 2, \ldots$. Позначимо $A_i = E(S)_{i,i} \setminus \overline{V(0)}$. Тоді A_i − відкрита підмножина в $E(B_\lambda^0(S))$ і $A_i \cap U(0) = \varnothing$ для всіх $i = 1, 2, \ldots$. Означимо відображення $\pi_1 : B_\lambda^0(S) \to E(B_\lambda^0(S))$ і $\pi_2 : B_\lambda^0(S) \to E(B_\lambda^0(S))$ за формулами $\pi_1(s) = s \cdot s^{-1}$ і $\pi_2(s) = s^{-1} \cdot s$. Оскільки $B_\lambda^0(S)$ − топологічна інверсна напівгрупа, то відображення π_1 і π_2 є неперервними. Для довільного натурального n позначимо $Z_n = \pi_1^{-1}(A_{2n-1}) \cap \pi_2^{-1}(A_{2n})$ і $P_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} Z_k$. З неперервності відображень π_1 і π_2 випливає, що $\pi_1^{-1}(V(0)) \cap \pi_2^{-1}(V(0))$ і P_n − відкриті підмножини в $B_\lambda^0(S)$ для довільного натурального n, і тоді очевидно, що $\pi_1^{-1}(V(0)) \cap \pi_2^{-1}(V(0)) \cap P_n = \varnothing$.

Нехай $x \notin B_\lambda^0(S)$. Продовжимо напівгрупову операцію з $B_\lambda^0(S)$ на множину $T = B_\lambda^0(S) \cup \{x\}$ наступним чином: $x \cdot x = s \cdot x = x \cdot s = 0$ для всіх

$s \in B_\lambda^0(S)$. Очевидно, що так визначена бінарна операція на T є асоціативною. Нехай τ_B – топологія на $B_\lambda^0(S)$. Топологію τ_T на T означимо так:

1) бази топологій τ_B і τ_T у кожній точці $s \in B_\lambda^0(S)$ співпадають;

2) сім'я $\Im(x) = \{U_n(x) = \{x\} \cup P_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ є базою топології τ_T у точці $x \in T$.

Оскільки $\pi_1^{-1}(V(0)) \cap \pi_2^{-1}(V(0)) \cap P_n = \varnothing$ і для довільної підмножини $S_{i,j}^*$ в $B_\lambda^0(S)$ існує натуральне m таке, що $S_{i,j}^* \cap P_m = \varnothing$, то T – гаусдорфовий простір. Також для довільного відкритого околу нуля $W(0) \subseteq V(0)$ маємо, що

$$W(0) \cdot U_n(x) = U_n(x) \cdot W(0) = U_n(x) \cdot U_n(x) = \{0\} \subseteq W(0)$$

і оскільки для довільної підмножини $S_{i,j}^*$ в $B_\lambda^0(S)$ існує натуральне k таке, що $S_{i,j}^* \cdot P_k = P_k \cdot S_{i,j}^* = \{0\} \subseteq W(0)$, то T – топологічна напівгрупа, яка містить $B_\lambda^0(S)$ як щільну піднапівгрупу. З отриманої суперечності випливає, що $E(B_\lambda^0(S))$ – компактна підмножина в $B_\lambda^0(S)$.

Зауваження 2. Оскільки кожне топологічне λ-розширення Брандта $B_\lambda(S)$ топологічної напівгрупи S є топологічним λ^0-розширенням Брандта деякого топологічного моноїда T з нулем $B_\lambda^0(T)$, то твердження теорем 3–5 виконуються і для топологічних λ-розширень Брандта топологічних напівгруп.

Теорема 6. *Топологічна інверсна напівгрупа Брандта $B_\lambda(G)$ з H-замкненою максимальною підгрупою у класі топологічних напівгруп є H-замкненою топологічною напівгрупою тоді й тільки тоді, коли в'язка $E(B_\lambda(G))$ напівгрупи $B_\lambda(G)$ є компактною.*

Д о в е д е н н я. *Достатність* випливає з теореми 3 та зауваження 2. Доведемо *необхідність*. Оскільки за лемою 4 з [16] кожен ненульовий ідемпотент в'язки $E(B_\lambda(G))$ є ізольованою точкою в $E(B_\lambda(G))$, то топологічний простір $E(B_\lambda(G))$ є 0-вимірним, а, отже, і регулярним. Таким чином, виконуються умови теореми 5. ◊

Теорема 7. *Топологічна інверсна напівгрупа Брандта $B_\lambda(G)$ з абсолютно H-замкненою максимальною підгрупою у класі топологічних напівгруп є абсолютно H-замкненою топологічною напівгрупою тоді й тільки тоді, коли в'язка $E(B_\lambda(G))$ напівгрупи $B_\lambda(G)$ є компактною.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність* випливає з теореми 6. *Достатність* є наслідком теореми 4 і зауваження 2. ◊

Дослідження другого автора виконано за фінансової підтримки ґранту Estonian Science Foundation за програмою ERMOS, що фінансується за допомогою фонду Марії Кюрі «People» (ґрант ERMOS36).

1. *Гутік О. В.* Про напівгрупу Гауі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 4. – С. 127–132.
2. *Гутік О. В., Павлик К. П.* H-замкнені топологічні напівгрупи та λ-розширення Брандта // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 3. – С. 20–28.
3. *Павлик К. П.* Абсолютно H-замкнені топологічні напівгрупи та λ-розширення Брандта // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2004. – Вип. 2. – С. 61–68.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752 с.

5. *Alas O. T., Sanchis M.* Countably compact paratopological groups // Semigroup Forum. – 2007. – **74**, No. 3. – P. 423–438.
6. *Arhangel'skii A., Tkachenko M.* Topological groups and related structures. – Amsterdam–Paris: World Sci. / Atlantis Press, 2008. – 795 p.
7. *Banakh T., Dimitrova S.* Openly factorizable spaces and compact extensions of topological semigroups // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2010. – **51**, No. 1 – P. 113–131.
8. *Berezovski T., Gutik O., Pavlyk K.* Brandt extensions and primitive topological inverse semigroups // Int. J. Mathematics and Mathematical Sci. – 2010. – Article ID 671401, 13 pages, doi:10.1155/2010/671401.
9. *Carruth J. H., Hildebrant J. A., Koch R. J.* The Theory of Topological Semigroups. – New York: Marcell Dekker Inc., 1983. – Vol. 1. – 244 p.; 1986. – Vol. 2. – 196 p.
10. *Clifford A. H., Preston G. B.* The algebraic theory of semigroups. – Providence: Amer. Math. Soc., 1961. – Vol. 1. – 288 p.; 1972. – Vol. 2. – 424 p.
11. *Colmex J.* Sur les espaces précompacts // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1951. – **233**. – P. 1552–1553.
12. *Comfort W. W., Ross R. A.* Pseudocompactness and uniform continuity of topological groups // Pacific J. Math. – 1966. – **16**. – P. 483–496.
13. *Eberhart C., Selden J.* On the closure of the bicyclic semigroup // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **144**. – P. 115–126.
14. *Glicksberg I.* Stone–Čech compactifications of products // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – **90**. – P. 369–382.
15. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* Absolutely H-closed and topological Brandt λ-extensions of topological inverse semigroups // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – **61**. – С. 98–105.
16. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* On Brandt λ^0-extensions of semigroups with zero // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 3. – С. 26–40.
17. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* On topological semigroups of matrix units // Semigroup Forum. – 2005. – **71,** No. 3. – P. 389–400.
18. *Gutik O., Pavlyk K., Reiter A.* Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions // Мат. студії. – 2009. – **32**, № 2. – С. 115–131.
19. *Gutik O., Repovš D.* On Brandt λ^0-extensions of monoids with zero // Semigroup Forum. – 2010. – **80,** No. 1. – P. 8–32.
20. *Gutik O., Repovš D.* On countably compact 0-simple topological inverse semigroups // Semigroup Forum. – 2007. – **75,** No. 2. – P. 464–469.
21. *Petrich M.* Inverse semigroups. – New York: John Wiley & Sons, 1984. – 674 p.
22. *Romaguera S., Sanchis M.* Continuity of the inverse in pseudocompact paratopological groups // Algebra Colloquium. – 2007. – **14**, No. 1. – P. 167–175.
23. *Stepp J. W.* A note on maximal locally compact semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **20**. – P. 251–253.
24. *Stepp J. W.* Algebraic maximal semilattices // Pacific J. Math. – 1975. – **58**. – P. 243–248.

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ БРАНДТА

Описана структура псевдокомпактных вполне 0-простых топологических инверсных полугрупп и найдены достаточные условия, при выполнении которых топологические λ^0-расширения Брандта (абсолютно) H-замкнутой полугруппы являются (абсолютно) H-замкнутыми полугруппами.

ON TOPOLOGICAL BRANDT SEMIGROUPS

In the paper we describe the structure of pseudocompact completely 0-simple topological inverse semigroups. Also we find the sufficient conditions on topological Brandt λ^0-extensions for preserving the (absolute) H-closedness.

[1] Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів,
[2] Inst. of Mathematics, University of Tartu, Estonia,
[3] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.12.10