

## ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ДИФРАКЦІЙНОГО ПОЛЯ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ ХВИЛІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ З СИСТЕМОЮ ТРІЩИН

*Розглянуто задачу про визначення дифракційного поля, що утворюється внаслідок взаємодії хвиль поздовжнього зсуву з системою довільно розміщених у необмеженому тілі тріщин. Вихідну задачу зведено до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Запропоновано ітераційний метод розв'язування цієї системи, де нульовим наближенням є розв'язки інтегральних рівнянь для окремих тріщин.*

Сучасні методи механіки деформівного тіла (метод потенціалів, метод розривних розв'язків тощо) дозволяють легко звести задачу про визначення хвильового поля в тілі з довільною системою тріщин до системи інтегральних рівнянь. Власне, за допомогою методу інтегральних рівнянь у роботах [7, 11] досліджено взаємодію хвиль поздовжнього зсуву (SH-хвиль) з довільною системою тріщин у необмеженому пружному тілі. У статті [4] аналогічна задача для радіально розміщених тріщин розв'язана методом розривних розв'язків. Ці дослідження знайшли продовження у [3], де вже розглянуто пружне тіло в умовах плоскої деформації. Особливістю цих робіт є те, що для того щоб уникнути гіперсингулярних інтегралів, пропонується розв'язувати системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриттів тріщин і їх похідних. Для таких систем розроблено ефективну процедуру числового розв'язання.

Останнім часом для визначення хвильових полів у тілах із системами тріщин все частіше застосовують метод граничних елементів. Так, цим методом двовимірні задачі розв'язано у [6, 8], а тривимірні – у [9, 10]. Але з аналізу цих робіт випливає, що при зведенні вихідних крайових задач до граничних інтегральних рівнянь виникає суттєва проблема. Вона полягає у необхідності числового розв'язання систем інтегральних рівнянь великої розмірності. Кількість рівнянь у таких системах пропорційна кількості тріщин, а ядра самих рівнянь мають сингулярності високих порядків.

Саме тому при проведенні числових розрахунків хвильових полів і коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) автори обмежуються випадком декількох, частіше за все, двох тріщин. Тому проблема визначення напруженого стану і дифракційних полів у тілах з системами тріщин не є цілком вирішеною.

У поданій статті запропоновано ітераційний підхід до визначення дифракційного поля і КІН при взаємодії хвилі поздовжнього зсуву з системою  $N$  тріщин. В результаті не виникає потреби розв'язувати систему  $N$  інтегро-диференціальних рівнянь, а на кожній ітерації розв'язують  $N$  окремих рівнянь, що відповідають ізольованим тріщинам.

**Постановка задачі.** Нехай у пружному тілі, що знаходиться у стані антиплоскої деформації, розміщені  $N$  наскрізних тріщин. Ці тріщини у площині  $Oxy$  займають відрізки довжини  $2d_k$  з серединами у точках з координатами  $(a_k, b_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  (рис. 1). З тріщинами взаємодіє плоска хвиля поздовжнього зсуву, яка поширюється у тілі і викликає у ньому вздовж осі  $Oz$

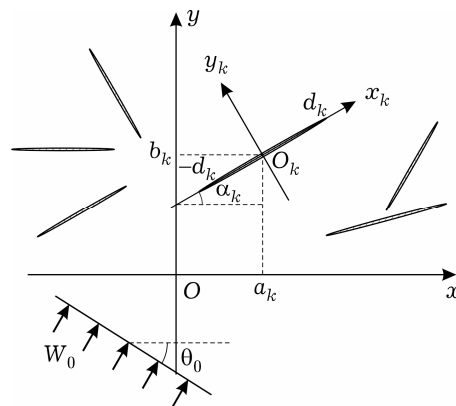


Рис. 1

переміщення

$$w^d(x, y) = Ae^{ix_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \quad x_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad (1)$$

де  $\omega$  – частота коливань;  $\rho, G$  – густина і модуль зсуву тіла;  $\theta_0$  – кут між напрямком розповсюдження хвилі і додатним напрямом осі  $Ox$ . Множник  $e^{-i\omega t}$ , який визначає залежність від часу, тут і надалі відкидаємо.

Нехай  $w(x, y)$  – єдина відмінна від нуля при антиплоскій деформації  $z$ -компонента вектора переміщень, викликаних хвилями відбитими від тріщин. Тоді вона повинна задовольняти рівняння Гельмгольца

$$\Delta w + x_2^2 w = 0,$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа в системі координат  $Oxy$ . Це рівняння необхідно розглядати з граничними умовами на тріщинах, для формулювання яких з кожною тріщиною пов'язується локальна система координат  $O_k x_k y_k$ . Зв'язок між глобальною і локальними системами координат, пов'язаними з різними тріщинами, задається формулами

$$\begin{aligned} x &= a_k + x_k \cos \alpha_k - y_k \sin \alpha_k, \\ y &= b_k + x_k \sin \alpha_k + y_k \cos \alpha_k, \\ x_\ell &= (a_k - a_\ell) \cos \alpha_\ell + (b_k - b_\ell) \sin \alpha_\ell + \\ &\quad + x_\ell \cos(\alpha_k - \alpha_\ell) - y_\ell \sin(\alpha_k - \alpha_\ell), \\ y_\ell &= -(a_k - a_\ell) \sin \alpha_\ell + (b_k - b_\ell) \cos \alpha_\ell + \\ &\quad + x_\ell \sin(\alpha_k - \alpha_\ell) + y_\ell \cos(\alpha_k - \alpha_\ell), \quad \ell, k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Нехай  $W_k^d(x_k, y_k)$ ,  $W_k(x_k, y_k)$  – переміщення, отримані з  $w^d(x, y)$  і  $w(x, y)$  після переходу до нових координат за формулами (2). Тоді, якщо береги тріщин вважаються вільними від напружень, на них повинні виконуватись умови

$$\tau_{zy_k}(x_k, 0) = -\tau_{zy_k}^d(x_k, 0), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} \tau_{zy_k} &= G \frac{\partial W_k}{\partial y_k}, \quad \tau_{zy_k}^d = G \frac{\partial W_k^d}{\partial y_k} = -ix_2 GA \sin(\alpha_k - \theta_0) e^{ix_2 Z_{0k}}, \\ Z_{0k} &= a_k \cos \theta_0 + b_k \sin \theta_0 + x_k \cos(\alpha_k - \theta_0) - y_k \sin(\alpha_k - \theta_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Крім того, на поверхні тріщини переміщення  $W_k(x_k, y_k)$  мають розриви з невідомими стрибками, для яких введемо позначення

$$W_k(x_k, +0) - W_k(x_k, -0) = \chi_k(x_k), \quad \chi_k(\pm d_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

При таких умовах ставиться задача визначити переміщення і напруження дифракційного поля у тілі і КІН для кожної тріщини.

**Розв'язання задачі.** Для розв'язання задачі для кожної тріщини з номером  $\ell$  у системі координат  $O_\ell x_\ell y_\ell$ , пов'язаного з нею, будемо розривний розв'язок рівняння Гельмгольца зі стрибком (5) [5]:

$$W_\ell^d(x_\ell, y_\ell) = \frac{\partial}{\partial y_\ell} \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_\ell(\eta) r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta, \quad \ell = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

де

$$r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(x_2 \sqrt{(\eta - x_\ell)^2 + y_\ell^2}).$$

Відповідні напруження знаходимо за формулами

$$\begin{aligned}\tau_{y_\ell z}^d(x_\ell, y_\ell) &= G \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi'_\ell(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta - \\ &\quad - \alpha_2^2 G \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_\ell(\eta) \tau_2(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta, \\ \tau_{x_\ell z}^d(x_\ell, y_\ell) &= G \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi'_\ell(\eta) \frac{\partial}{\partial y_\ell} r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta.\end{aligned}\quad (7)$$

У формулах (7) для напружень з метою зменшення порядку сингулярності інтегралів, як і в [3, 4], здійснено інтегрування частинами.

У системі  $Oxy$  переміщення розсіяного хвильового поля подаємо у вигляді

$$W(x, y) = \sum_{\ell=1}^N W_\ell^d(x, y), \quad (8)$$

де  $W_\ell^d(x, y)$  отримано з формули (6) шляхом перетворення координат (2). Щоб застосувати формули (8), необхідно визначити невідомі стрибки переміщень на тріщинах. Для цього використаємо умови (3). Попередньо запишемо

$$\tau_{zy_k}^\ell = \sum_{\ell=1}^N \tau_{zy_k}^\ell, \quad \tau_{zy_k}^\ell = -\tau_{zx_\ell}^d \sin(\alpha_k - \alpha_\ell) + \tau_{zy_\ell}^d \cos(\alpha_k - \alpha_\ell), \quad (9)$$

і здійснимо перетворення координат за другою групою формул (2). Тоді кожний доданок у (9) буде визначатись за формулами

$$\begin{aligned}\tau_{zy_k}^\ell &= G \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi'_\ell(\eta) \frac{i\alpha_2}{4} \frac{H_1^{(1)}(\alpha_2 R_{k\ell})}{R_{k\ell}} \times \\ &\quad \times (\eta \cos(\alpha_k - \alpha_\ell) - x_k - (a_k - a_\ell) \cos \alpha_k - (b_k - b_\ell) \sin \alpha_k) d\eta + \\ &\quad + \alpha_2^2 G \cos(\alpha_k - \alpha_\ell) \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_\ell(\eta) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\alpha_2 R_{k\ell}) d\eta,\end{aligned}\quad (10)$$

де

$$\begin{aligned}R_{k\ell}^2 &= (\eta - (a_k - a_\ell) \cos \alpha_\ell - (b_k - b_\ell) \sin \alpha_\ell - x_k \cos(\alpha_k - \alpha_\ell) + \\ &\quad + y_k \sin(\alpha_k - \alpha_\ell))^2 + (-(a_k - a_\ell) \sin \alpha_\ell + (b_k - b_\ell) \cos \alpha_\ell + \\ &\quad + x_k \sin(\alpha_k - \alpha_\ell) + y_k \cos(\alpha_k - \alpha_\ell))^2.\end{aligned}$$

Підставивши тепер (9), (10) в умову (3), отримаємо систему інтегро-диференціальних рівнянь, яка після вилучення сингулярних складових ядер набуде наступного вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_k(\tau) \left[ \frac{1}{\tau - \zeta} + \mathcal{R}_k^{(\ell)}(\tau - \zeta) \right] d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k(\tau) \left[ -\gamma_k^2 \alpha_0^2 \ln |\tau - \zeta| + \mathcal{R}_k^{(0)}(\tau - \zeta) \right] d\tau + \\ + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_\ell(\tau) F_{k\ell}^{(\ell)}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_\ell(\tau) F_{k\ell}^{(0)}(\tau, \zeta) d\tau \right] = \\ = -i\alpha_0 A_0 \sin(\alpha_k - \theta_0) e^{i\alpha_0 r_{0k}(\zeta)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (11)$$

Ядра інтегральних операторів визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k^{(\ell)}(z) &= O(z \ln|z|), \quad \mathcal{R}_k^{(0)}(z) = O(z^2 \ln|z|), \quad z \rightarrow 0, \\ F_{k\ell}^{(\ell)}(\tau, \zeta) &= \frac{i\pi H_1^{(\ell)}(\mathbf{x}_0 q_{k\ell}^0) \mathbf{x}_0 \gamma_\ell}{q_{k\ell}^0} (\gamma_\ell \tau \cos \alpha_{k\ell} - \gamma_k \zeta - \\ &\quad - (\varepsilon_k - \varepsilon_\ell) \cos \alpha_k - (\delta_k - \delta_\ell) \sin \alpha_k), \\ F_{k\ell}^{(0)}(\tau, \zeta) &= \frac{i\pi}{2} \mathbf{x}_0^2 \gamma_\ell^2 \cos \alpha_{k\ell} H_0^{(\ell)}(\mathbf{x}_0 q_{k\ell}^0), \\ q_{k\ell}^0 &= \gamma_\ell^2 \tau^2 + \gamma_k^2 \zeta^2 + (\varepsilon_k - \varepsilon_\ell)^2 + (\delta_k - \delta_\ell)^2 - 2\gamma_\ell \gamma_k \tau \zeta \cos \alpha_{k\ell} - \\ &\quad - 2\gamma_\ell \tau ((\varepsilon_k - \varepsilon_\ell) \cos \alpha_\ell + (\delta_k - \delta_\ell) \cos \alpha_\ell) + \\ &\quad + 2\gamma_k \zeta ((\varepsilon_k - \varepsilon_\ell) \cos \alpha_k + (\delta_k - \delta_\ell) \sin \alpha_k), \\ r_{0k} &= \varepsilon_k \cos \theta_0 + \delta_k \sin \theta_0 + \gamma_k \zeta \cos(\alpha_k - \theta_0). \end{aligned}$$

При виведенні системи (11) було введено такі позначення:

$$\eta = d_\ell \tau, \quad x_k = d_k \zeta, \quad \gamma_k = \frac{d_k}{d}, \quad \delta_k = \frac{b_k}{d}, \quad \varepsilon_k = \frac{a_k}{d}, \quad d = \max\{d_1, d_2, \dots, d_N\},$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_2 d, \quad \chi_\ell(d_\ell \tau) = d_\ell \varphi_\ell(\tau), \quad \chi'_\ell(d_\ell \tau) = \varphi'_\ell(\tau), \quad \alpha_{k\ell} = \alpha_k - \alpha_\ell, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, N.$$

**Ітераційний метод розв'язування.** Систему інтегро-диференціальних рівнянь можна розв'язати наближено методом механічних квадратур аналогічно, як у [3, 4]. Однак безпосереднє застосування цього методу вимагатиме розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розмір якої пропорційний до кількості тріщин  $N$ . Тому для усунення цієї проблеми пропонуємо ітераційний метод розв'язання системи (11). При цьому за нульове наближення приймаємо розв'язок  $N$  окремих рівнянь для ізольованих тріщин:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^{(0)'}(\tau) \left[ \frac{1}{\tau - \zeta} + \mathcal{R}_k^{(0)}(\tau - \zeta) \right] d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^{(0)}(\tau) \left[ -\gamma_k^2 \mathbf{x}_0^2 \ln(\tau - \zeta) + \mathcal{R}_k^{(0)}(\tau - \zeta) \right] d\tau = \\ &\quad = -i\mathbf{x}_0 A_0 \sin(\alpha_k - \theta_0) e^{-i\mathbf{x}_0 r_{0k}(\zeta)}, \\ &\int_{-1}^1 \varphi_k^{(0)'}(\tau) d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (12)$$

Далі ітераційний процес здійснюємо шляхом розв'язання на кожному кроці рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^{(i)'}(\tau) \left[ \frac{1}{\tau - \zeta} + \mathcal{R}_k^{(i)}(\tau - \zeta) \right] d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^{(i)}(\tau) \left[ -\gamma_k^2 \mathbf{x}_0^2 \ln|\tau - \zeta| + \mathcal{R}_k^{(i)}(\tau - \zeta) \right] d\tau = \\ &\quad = -i\mathbf{x}_0 A_0 \sin(\alpha_k - \theta_0) e^{-i\mathbf{x}_0 r_{0k}(\zeta)} - \\ &\quad - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_\ell^{(i-1)'}(\tau) F_{k\ell}^{(i)}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_\ell^{(i-1)}(\tau) F_{k\ell}^{(0)}(\tau, \zeta) d\tau \right], \\ &\int_{-1}^1 \varphi_k^{(i)'}(\tau) d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Розв'язання інтегральних рівнянь (12), (13) ґрунтується на поданні похідних від невідомих функцій у вигляді

$$\varphi_k^{(i)'}(\tau) = \frac{\Psi_k^{(i)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

і наближенні функцій  $\Psi_k^{(i)}(\tau)$  інтерполяційним многочленом

$$\Psi_k^{(i)}(\tau) \approx \sum_{m=1}^N \Psi_{km}^{(i)} \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)}, \quad (15)$$

де  $T_n(\tau)$  – многочлен Чебишева;  $\tau_m$  – корені цього многочлена;  $\Psi_{km}^{(i)} = \Psi_k^{(i)}(\tau_m)$ . З формул (14), (15), як показано у [3, 4], випливає таке наближення для невідомих функцій:

$$\varphi_k^{(i)}(\tau) \approx \sqrt{1-\tau^2} S_{kn}^{(i)}(\tau), \quad S_{kn}^{(i)} = -\frac{2}{n} \sum_{m=1}^n \Psi_{km}^{(i)} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{T_p(\tau_m) U_{p+1}(\tau)}{p}. \quad (16)$$

Формули (14)–(16) дають можливість застосувати до розв'язання рівнянь (12), (13) метод механічних квадратур з використанням як точок колокації коренів многочлена Чебишева  $U_{n-1}(\zeta)$ :

$$\zeta_j = \cos \frac{\pi j}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

При застосуванні цього методу для інтегралів Коші використовуємо відому квадратурну формулу [1], для інтегралів з регулярними ядрами – відповідні формули Гаусса – Чебишева [2]. Що стосується інтеграла з логарифмічною особливістю, то його обчислення здійснюємо за наступною формулою, отриманою за допомогою подань (16):

$$\int_{-1}^1 \varphi_k^{(i)}(\tau) \ln |\tau - \zeta_j| d\tau = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} S_{kn}^{(i)}(\tau) \ln |\tau - \zeta_j| d\tau = \sum_{m=1}^n a_m C_{jm} \Psi_{km}^{(i)},$$

$$C_{jm} = \tau_m \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \cos 2\sigma_j \right) + \sum_{p=2}^{n-1} \frac{\cos(p\beta_m)}{p} \cdot \left( \cos(p-1)\sigma_j - \frac{\cos(p+1)\sigma_j}{p+1} \right),$$

$$a_m = \frac{\pi}{n}, \quad \sigma_j = \frac{j\pi}{n}, \quad \beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2n}.$$

В результаті вихідну задачу зводимо до розв'язання послідовності таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які відрізняються тільки правими частинами:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m B_{jm}^{(k)} \Psi_{km}^0 = -i\alpha_0 A_0 \sin(\alpha_k - \theta_0) e^{i\alpha_0 r_{0k}(\zeta_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\sum_{m=1}^n a_m \Psi_{km}^0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m B_{jm}^{(k)} \Psi_{km}^{(i)} = -i\alpha_0 A_0 \sin(\alpha_k - \theta_0) e^{i\alpha_0 r_{0k}(\zeta_j)} -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \sum_{m=1}^n a_m B_{jm}^{(\ell)} \Psi_{km}^{(i-1)} (F_{jm}^{k\ell} + E_{jm}^{k\ell}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\sum_{m=1}^n a_m \Psi_{km}^{(i)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

У системі (17) введено такі позначення:

$$B_{jm}^{(k)} = \frac{1}{\tau_m - \zeta_j} - \gamma_k^2 \alpha_0^2 C_{jm} + \mathcal{R}_{jm}^k + D_{jm}^k, \quad \mathcal{R}_{jm}^k = \mathcal{R}_k^{(i)}(\tau_m - \zeta_j),$$

$$F_{jm}^{k\ell} = F_{k\ell}^{(i)}(\tau_m - \zeta_j), \quad E_{jm}^{k\ell} = \sum_{s=1}^n B_{sm} F_{k\ell}^0(z_s - \zeta_j),$$

$$D_{jm}^{(k)} = \sum_{s=1}^n B_{sm} \mathcal{R}_k^0(z_s - \zeta_j),$$

$$B_{sm} = -\frac{2}{n+1} \sin \frac{s\pi}{n+1} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos(p\beta_m) \sin(p\rho_s)}{p},$$

$$z_s = \cos \frac{s\pi}{n+1}, \quad \rho_s = \sin \frac{s\pi}{n+1}.$$

Після розв'язання (17) наближене значення КІН за результатами  $i$ -ї ітерації для кожної тріщини знаходимо за формулами

$$K_\ell^\pm = G \sqrt{2d_\ell} k_\ell^\pm,$$

$$k_\ell^+ = \frac{1}{n\sqrt{2\gamma_\ell}} \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{\ell m}^{(i)} \operatorname{ctg} \frac{\beta_m}{2},$$

$$k_\ell^- = \frac{1}{n\sqrt{2\gamma_\ell}} \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{\ell m}^{(i)} \operatorname{tg} \frac{\beta_m}{2}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

**Результати числового аналізу і висновки.** Одним з головних завдань проведених числових розрахунків було дослідження практичної збіжності запропонованого ітераційного методу. Для цього було розглянуто систему трьох тріщин однакової довжини  $2d$ , розташованих на сторонах правильного трикутника зі сторонами довжини  $4d$  (див. рис. 2).

З тріщинами взаємодіє плоска хвиля поздовжнього зсуву, що поширюється уздовж додатного напрямку осі  $Oy$ ,  $\theta_0 = 90^\circ$ .

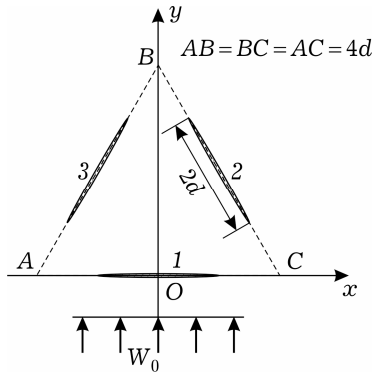


Рис. 2

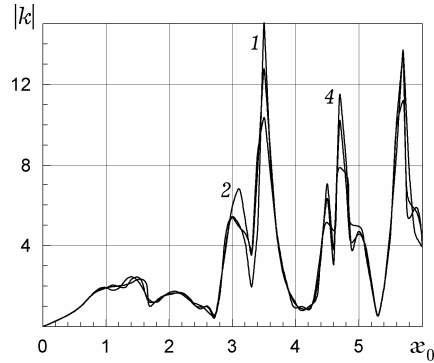


Рис. 3

На рис. 3 наведено графіки залежності абсолютного значення КІН для першої тріщини  $|k_1| = |k_1^-| = |k_1^+|$ . Крива 1 відповідає значенням КІН для цієї тріщини, отриманим внаслідок безпосереднього розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь (13). Криві 2, 4 показують значення КІН, отримані за формулою (18) внаслідок здійснення відповідної кількості ітерацій. Можна бачити, що в області низьких частот  $\alpha_0 \leq 3$  збіжність результатів, отриманих різними методами, досягається вже при другій ітерації. В області високих частот, де спостерігаються резонансні піки, повне збігання з кривою 1 спостерігається після 6÷8 ітерацій.

Далі розглянемо взаємодію такої самої хвилі з системою семи тріщин (рис. 4). Ця система складається з тріщини довжини  $d_1$ , біля кожного кінця якої на віддалі  $r_0$  знаходяться по три радіально розміщені тріщини, що мають втричі меншу довжину ( $d_i = d_1/3$ ,  $i = 2, \dots, 7$ ).

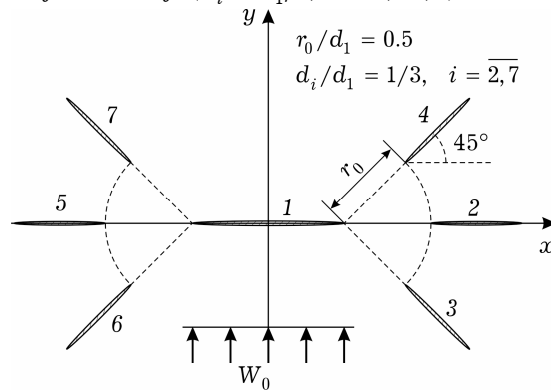


Рис. 4

Результати розрахунку КІН показані у вигляді графіків на рис. 5 і рис. 6. Криві 1–4 на рис. 5 показують зміну абсолютних значень КІН навколо зближених вершин тріщин:  $|k_1^+|$ ,  $|k_2^-|$ ,  $|k_3^-|$ ,  $|k_4^-|$ . Можна бачити, що зі зростанням частоти, частотна залежність КІН ускладнюється появою резонансних піків. Цікавим є те, що найменші значення КІН спостерігаються для четвертої тріщини, що свідчить про екранний ефект тріщин.

На рис. 6 показано графіки залежності від частоти абсолютних значень КІН для віддалених вершин тріщин. Криві з номерами 2–4 відповідають  $|k_2^+|$ ,  $|k_3^+|$ ,  $|k_4^+|$ . Для цих КІН спостерігається приблизно однакова поведінка і їхні максимальні значення майже збігаються. У розрахунках для системи з семи тріщин використано до 8 ітерацій.

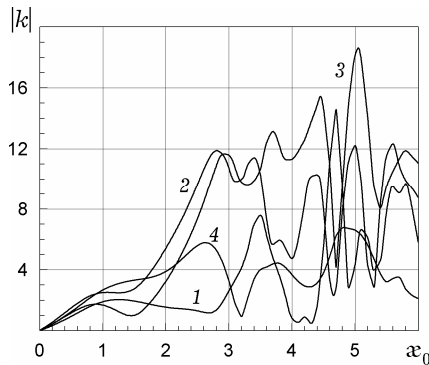


Рис. 5

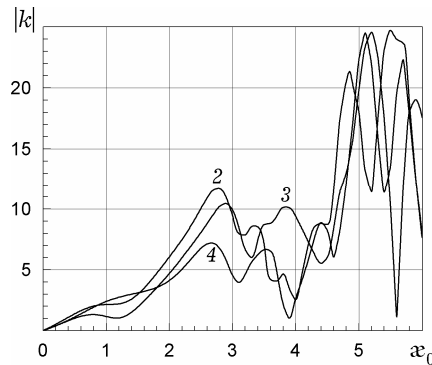


Рис. 6

Викладені вище результати дозволяють зробити наступні загальні висновки.

- Розроблено ефективний ітераційний метод розв'язання задачі про визначення напруженого стану в тілі з довільною системою тріщин в умовах взаємодії з хвилями поздовжнього зсуву. Цей метод залишається досить ефективним у випадку систем досить щільно розташованих систем тріщин складної геометрії.
- Встановлено суттєвий вплив на значення КІН конфігурації системи тріщин, який проявляється в появі резонансних максимумів або у вигляді екрануючого ефекту.

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – Москва: Наука, 1985. – 253 с.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
3. Попов В. Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 118–129.
4. Попов В. Г. Взаимодействие упругих волн продольного сдвига с радиально расположенными трещинами // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 2. – С. 60–66.
5. Попов В. Г. Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139–146.
6. Dineva P., Gross D., Rangelov Ts. Dynamic interaction of cracks in piezoelectric and anisotropic solids: a non-hyper singular BIEM approach // Theoret. Appl. Mech. (Belgrade). – 2008. – **35**, No. 1-3. – P. 73–91.
7. Gross D., Zhang Ch. Diffraction of SH waves by a system of cracks: Solution by integral equation method // Int. J. Solids and Struct. – 1988. – **24**, No. 1. – P. 41–49.
8. Jun Lei, Qingheng Yang, Yue-Sheng Wang, Chuangzeng Thung. An investigation of dynamic interaction between multiple cracks and inclusions by TDBEM // Compos. Sci. and Technol. – 2009. – **69**, No. 7-8. – P. 1279–1285.
9. Khaj M. V., Mikhas'kiv V. V. Dynamic interaction of parallel cracks in elastic bodies // Strength of Mater. – 1998. – **30**, No. 3. – P. 311–317.  
Хай М. В., Михаськів В. В. Динамічна взаємодія паралельних тріщин у пружному тілі // Проблеми міцності. – 1998. – **30**, № 3. – С. 94–102.
10. Mykhaskiv V. V., Zhang Ch., J. Sladek, V. Sladek. A frequency-domain BEM for 3D non-synchronous crack interaction analyses in elastic solids // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2006. – **30**, No. 3. – P. 167–175.
11. Takahuda Kuzuo, Tukizava Yasushi, Koizumi Tukashi, Shibuya Toshikazu. Dynamic interactions between cracks. Diffraction of SH waves being incident of Griffith cracks in an infinite body // Transactions Jpn Soc. Mech. Eng. A. – 1984. – **50** (452). – P. 799–804.

#### ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФРАКЦИОННОГО ПОЛЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА С СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

Рассмотрена задача об определении дифракционного поля, возникающего в результате взаимодействия волн продольного сдвига с системой произвольно расположенных в неограниченном теле трещин. Исходная задача сведена к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Предложен итерационный метод решения этой системы, где нулевым приближением являются решения интегральных уравнений для отдельных трещин.

#### ITERATIVE METHOD OF DIFFRACTION FIELD DETERMINATION AT INTERACTION OF LONGITUDINAL SHEAR WAVE WITH A CRACK SYSTEM

The problem on diffraction field determination is arising as a result of the longitudinal shear wave interaction with the cracks' system arbitrarily located in an infinite body is solved. The original problem is reduced to a system of singular integro-differential equations. The iterative method of this system solving, where the zero approximation are the solutions of the integral equations for separate cracks, is proposed.

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано  
25.10.10