

## ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ ДИНАМІЧНИХ ІМПУЛЬСНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

*Розглянуто задачу про побудову фундаментальних розв'язків рівнянь динаміки тонкої пологої ортотропної оболонки довільної гауссової кривини. Отримано асимптотичні формули динамічного прогину оболонки при дії імпульсного навантаження. Знайдено фізичні співвідношення пружності динамічної теорії тонких оболонок. Досліджено коректність використання у розрахунках моделі спеціальної ортотропії.*

**Вступ.** Рівняння динамічної теорії пластин і оболонок широко застосовують при дослідженні багатьох сучасних інженерних та технічних проблем в машинобудуванні, проектуванні авіаційної техніки [5], обслуговуванні гідротехнічних споруд [6] тощо.

Для розв'язування початково-крайових задач теорії пластин і оболонок ефективними є методи, що зводять такі задачі до систем інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь [11, 13]. Змістовне дослідження такої задачі для ортотропної пластини у статичному та динамічному випадках проведено у [12].

Проблема побудови фундаментальних розв'язків динамічних рівнянь теорії пружності є достатньо актуальною, оскільки вони є основою розв'язування багатьох крайових задач теорії тонких пластин і оболонок [1]. Фундаментальні розв'язки динаміки ізотропних пластин та оболонок добре відомі [4, 7]. Випадок ортотропії матеріалу розглянутий авторами у [9].

Дослідження напружено-деформованого стану оболонок у динамічному випадку є складною задачею. Фундаментальні розв'язки динаміки ізотропних оболонок побудовано в [7]. У складніших випадках загальної ортотропії матеріалу отримані результати стосуються лише конкретних випадків сферичної [3] або циліндричної [10] оболонок. Це пов'язано головним чином з відсутністю загальних аналітичних методів розв'язування задач динаміки оболонок.

У зв'язку з цим розглянемо задачу про побудову фундаментальних розв'язків динамічних рівнянь в узагальненому випадку тонкої ортотропної оболонки довільної гауссової кривини.

**Постановка задачі.** Розглянемо тонку пологу ортотропну оболонку довільної кривини сталої товщини  $h$ . Середина поверхні оболонки віднесена до криволінійної ортогональної системи координат  $\alpha$  і  $\beta$  так, що координатні лінії співпадають з лініями головних кривин середньої поверхні оболонки (рис. 1).

Згідно з [8] будемо розглядати лише той клас задач, коли зона збурення напруженого стану є незначною в порівнянні з тією областю, що займає оболонка. Тому можна вважати, що криволінійна система координат співпадає з декартовою системою  $(x, y)$ . Тоді відповідно коефіцієнти першої квадратичної форми (коефіцієнти Ляме) будуть  $A = B = 1$ , а головні радіуси кривин  $R_1$  і  $R_2$  вважатимемо незмінними. Ці припущення дозволяють значно спростити вихідні рівняння.

Далі будемо вивчати початкову реакцію оболонок на зосереджений динамічний вплив, коли збурення, викликане цим впливом, ще не досягає меж зони пологості.

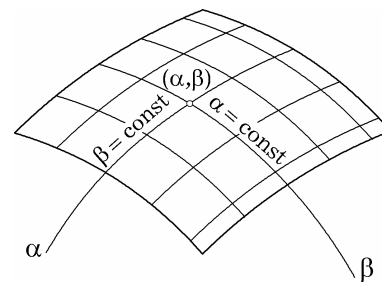


Рис. 1

**Розв'язок задачі.** Як показано у [8], система трьох рівнянь рівноваги у переміщеннях зводиться до наступної системи:

$$\begin{aligned} \alpha^4 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{1 + \nu\mu}{1 - \mu} \alpha^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \frac{Eh\alpha^2}{R_2} \nabla_\lambda^2 w &= 0, \\ \alpha^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(1 - \mu + \nu\mu)\alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\alpha^2}{DR_2} \nabla_\lambda^2 F &= \\ &= \frac{\alpha^2}{D} \left[ Z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{де } \alpha^4 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}, \quad E = \sqrt{E_1 E_2}, \quad \lambda = \frac{R_1}{R_2},$$

$$\nabla_\lambda^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \mu = \frac{E - 2G_{12}(1 + \nu)}{E},$$

$w$  – прогин оболонки;  $F$  – функція напружень;  $E_1$ ,  $E_2$  і  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  – відповідно модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона у головних напрямках ортотропії;  $G_{12}$  – модуль зсуву для площин, паралельних до серединної поверхні оболонки;  $\rho h$  – маса одиниці поверхні;  $Z(x, y, t)$  – динамічне навантаження;  $t$  – часова координата. Перехід до динамічної задачі теорії оболонок виконано квазістатичним способом.

Силу інерції враховуємо лише у напрямку, нормальному до серединної поверхні оболонки. Динамічні навантаження, що виникають у серединній поверхні, враховувати не будемо. Оболонку вважатимемо нескінченною, а початкові умови – нульовими.

Фізичні співвідношення пружності будуть мати відповідно наступний вигляд:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left[ \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_2 = -D \left[ \alpha^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ H &= -D(1 - \nu)(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad T_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H$  – згинальні та крутильні моменти;  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $S$  – мембранні зусилля, записані за допомогою функції напружень.

Далі будемо розглядати випадок, коли до поверхні оболонки прикладено миттєвий імпульс одиничної інтенсивності. Для його означення використовуємо узагальнену дельта-функцію Дірака, тобто динамічне навантаження моделюємо як  $Z(x, y, t) = \delta(x, y)\delta(t)$ .

Зазначимо, що на практиці зовнішнє навантаження можна вважати імпульсним, якщо його вплив обмежений чвертю найбільшого з періодів власних коливань оболонки [2].

Таким чином, розглянемо задачу про побудову фундаментальних розв'язків системи рівнянь (1) динамічної рівноваги тонкої пологої ортотропної оболонки.

Одним із ефективних методів побудови фундаментальних розв'язків у динамічній теорії пластин і оболонок є метод інтегральних перетворень [7]. Як відомо, найскладнішим етапом при використанні методу інтегральних перетворень є перехід до оригіналів.

Для побудови фундаментальних розв'язків для випадку динамічного зосередженого навантаження тонкої ізотропної оболонки у [7] була побудована оригінальна методика обернення трансформант Фур'є і Лапласа, що базується на введенні у розгляд нової спеціальної функції гіпергеометричного типу. Удосконалимо цю методику у випадку ортотропної пологої оболонки.

Перейдемо у системі (1) до безрозмірної системи координат  $(x_1, y_1, t_1)$ :

$$x = \frac{ax_1}{c}, \quad y = \frac{y_1}{c}, \quad t = \frac{xt_1\sqrt{\rho h}}{\sqrt{aDc^4}},$$

де  $2a = 2 - \mu + \mu\nu$ ,  $c^4 = 12(1 - \nu^2)/(R_2h)^2$ .

Застосувавши до записаної у безрозмірних координатах системи диференціальних рівнянь (1) спочатку інтегральне перетворення Фур'є за геометричними координатами, а потім перетворення Лапласа за часом, отримаємо алгебраїчну систему

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-\mu} \Delta'' \bar{F} + \frac{Eh}{R_2c^2} (\xi^2 + \lambda x^2 \eta^2) \bar{w} &= 0, \\ -\frac{1}{Dc^2 R_2} (\xi^2 + \lambda x^2 \eta^2) \bar{F} + a(\Delta' + s^2) \bar{w} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a\rho h D c^4}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Розв'яжемо систему (3) відносно трансформант  $\bar{w}$  та  $\bar{F}$  у просторі Фур'є і Лапласа:

$$\begin{aligned} \bar{w}(\xi, \eta, s) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a\rho h D c^4}} \frac{\Delta''}{\Delta}, \\ \bar{F}(\xi, \eta, s) &= -\frac{R_2(1-\mu)}{a^{3/2}c^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\xi^2 + \lambda x^2 \eta^2}{\Delta}. \end{aligned}$$

Тут  $\Delta = \Delta' \Delta'' + \frac{1-\mu}{a^2} (\xi^2 + \lambda x^2 \eta^2)^2 + s^2 \Delta''$ ,  $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{2a}$ ,

$$\Delta' = (\xi^2 + \eta^2)^2 + \tilde{\mu}(1-\nu)(\xi^2 - \eta^2)^2, \quad \Delta'' = (\xi^2 + \eta^2)^2 - \tilde{\mu}(1+\nu)(\xi^2 - \eta^2)^2.$$

Методику обернення трансформант традиційно продемонструємо на прикладі обернення функції  $\bar{w}$ , що відповідає динамічному прогину тонкої ортотропної оболонки під дією зосередженого джерела навантаження.

Для спрощення запису надалі будемо розглядати величини  $w^{(0)}$  та  $F^{(0)}$ , трансформанти яких будемо визначати зі співвідношень

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi\sqrt{a\rho h D c^4}} \bar{w}^{(0)}, \quad \bar{F} = -\frac{R_2(1-\mu)}{a^{3/2}c^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \bar{F}^{(0)}.$$

Застосуємо до  $\bar{w}^{(0)}$  послідовно відомі формули обернення інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа. Враховуючи парність  $\bar{w}^{(0)}$ , отримаємо наступний вираз для оригіналу:

$$w^{(0)}(r, \varphi, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{w}^{(0)}(\xi, \eta, s) \cos(\xi x_1) \cos(\eta y_1) d\xi d\eta \right] e^{-st_1} ds. \quad (4)$$

У підінтегральному виразі (4) перейдемо до полярних координат

$$\xi = R \cos \theta, \quad \eta = R \sin \theta,$$

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad y_1 = r \sin \varphi.$$

Розкладемо в ряд Бесселя

$$\begin{aligned} \cos(Rr \cos \theta \cos \varphi) \cos(Rr \sin \theta \sin \varphi) &= \\ &= J_0(rR) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n J_{2n}(rR) \cos 2n\theta \cos 2n\varphi, \end{aligned}$$

де  $J_{2n}(\cdot)$  – функція Бесселя першого роду  $2n$ -го порядку. Співвідношення (4) у нових координатах матиме вигляд

$$w^{(0)}(r, \varphi, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \times \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{J_{2n}(Rr) \cos 2n\theta R d\theta dR}{R^4 K_1^2(\theta) + K_2^2(\theta) + s^2} \right] e^{-st_1} ds, \quad (5)$$

$$K_1^2(\theta) = 1 + \tilde{\mu}(1-\nu) \cos^2 2\theta, \quad K_2^2(\theta) = \frac{1-\mu}{a^2} \frac{(\cos^2 \theta + \lambda x^2 \sin^2 \theta)^2}{1 - \tilde{\mu}(1+\nu) \cos^2 2\theta},$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Обернення перетворення Лапласа знайдемо за допомогою теореми Ефросса. Далі, згідно з [7], отримаємо

$$w^{(0)}(r, \varphi, t_1) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2 2^{2m}} \int_0^{\pi/2} K_2^{2m}(\theta) \cos 2n\theta \int_0^{\infty} J_{2n}(Rr) R \times \int_0^{t_1} (t_1^2 - u^2)^m \cos(R^2 K_1(\theta) u) d\theta dR dt_1.$$

Аналітично обчислимо останній внутрішній інтеграл. З метою відокремлення змінних скористаємось формулою множення функцій Бесселя першого роду. У результаті матимемо

$$w^{(0)}(r, \varphi, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{k! m!} \frac{\mu^k (1-\nu)^k (1-\mu)^m 2^{m-3k-1}}{a^{2m+k}} t_1^{2m} \left( \frac{r^2}{4t_1} \right)^{m-k-1/2} \times W_{mk}^n \int_0^{\infty} R^{k-m-1/2} J_{m+k+1/2} \left( \frac{Rt_1}{r^2} \right) J_{2n}(\sqrt{R}) dR, \quad (6)$$

$$W_{mk}^n = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2 \theta + \lambda x^2 \sin^2 \theta)^{2m}}{(1 - \tilde{\mu}(1+\nu) \cos^2 2\theta)^m} \cos^{2k} 2\theta \cos 2n\theta d\theta. \quad (7)$$

Інтеграл, що входить до виразу (6), знайдемо за допомогою нової спеціальної функції  $G_{\alpha, \beta}^{\gamma}(z)$ , що була застосована у задачі побудови фундаментальних розв'язків динамічних рівнянь теорії тонких ізотропних оболонок [7].

Надалі для спрощення запису будемо використовувати нову змінну  $z = \frac{r^2}{4t_1}$ , а також нові коефіцієнти фізичних величин  $\chi_1 = \frac{\mu(1-\nu)}{2a}$  та  $\chi_2 = \frac{1-\mu}{a^2}$ . Враховуючи означене, функцію динамічного прогину запишемо так:

$$w^{(0)}(r, \varphi, t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{k! m!} \frac{\chi_1^k \chi_2^m}{2^{2m}} W_{mk}^n \times t_1^{2m} \left( \frac{z}{2} \right)^{m-k-1/2} G_{m+k+1/2, 2n}^{-2k-1} \left( \frac{z^2}{4} \right), \quad (8)$$

$$G_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x) = \frac{2^{\beta}(\sqrt{x})^{-\alpha+2\vartheta}}{\Gamma(\beta+1)} \left\{ \Gamma\left[\alpha - \vartheta + 1\right] \times \right. \\ \times {}_2F_3\left[(-\alpha + \vartheta, \vartheta); \left(\frac{1}{2}, \omega - \frac{1}{2}, \omega\right); -x\right] - \frac{4\sqrt{x}}{\beta+1} \Gamma\left[\frac{\vartheta-1/2}{\alpha - \vartheta + 3/2}\right] \times \\ \left. \times {}_2F_3\left[\left(-\alpha + \vartheta + \frac{1}{2}, \vartheta + \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2}, \omega, \omega + \frac{1}{2}\right); -x\right] \right\}, \\ \Gamma\left[\frac{a}{b}\right] = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}, \quad \vartheta = -\frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{4}, \quad \omega = \frac{\beta}{2} + 1,$$

де  $\Gamma$  – гамма-функція;  ${}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; x)$  – узагальнена функція гіпергеометричного типу.

Аналогічно отримаємо вирази для функції напружень:

$$F^{(0)}(r, \varphi, t_1) = \frac{r^2}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{k! m!} \frac{\chi_1^k \chi_2^m}{2^{2m+4}} F_{mk}^n \times \\ \times t_1^{2m} \left(\frac{z}{2}\right)^{m-k-1/2} G_{m+k+1/2, 2n}^{-2k} \left(\frac{z^2}{4}\right), \quad (9)$$

$$F_{mk}^n = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2 \theta + \lambda x^2 \sin^2 \theta)^{2m+1}}{(1 - \tilde{\mu}(1 + \nu) \cos^2 2\theta)^{m+1}} \cos^{2k} 2\theta \cos 2n\theta d\theta. \quad (10)$$

Таким чином, за допомогою (7), (8) та (9), (10) остаточно виражаються аналітичні формули для розшукуваних функцій динамічного прогину оболонки та напружень.

Базуючись на асимптотичному розкладі введеної нової функції у початку координат

$$G_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2^{\beta}(\sqrt{x})^{-\alpha+2\vartheta}}{\Gamma(\beta+1)} \left[ \frac{\Gamma(\vartheta)}{\Gamma(\alpha - \vartheta + 1)} - 4\sqrt{x} \frac{\Gamma(\vartheta + 1/2)}{\Gamma(\alpha - \vartheta + 1/2)(\beta + 1)} \right],$$

матимемо асимптотичний вираз функції динамічного прогину

$$w^{(0)}(r, \varphi, t_1) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{k! m!} \chi_1^k \chi_2^m \left(\frac{t_1}{2}\right)^{2m} \left[ \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(m+1)} W_{mk}^0 - \right. \\ \left. - \frac{r^2}{2t_1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(m+1/2)} (W_{mk}^0 + W_{mk}^1 \cos 2\varphi) \right] \{1 + O(r^4)\}. \quad (11)$$

Коректність отриманих результатів можна перевірити, порівнявши вирази (7), (8) з відомим випадком тонкої ізотропної оболонки. У цьому випадку маємо  $\mu = 0$ ,  $a = 1$ ,  $x = 1$ , тоді  $\chi_1 = 0$ ,  $\chi_2 = 1$ . Формула динамічного прогину запишеться як

$$w^{(0)}(r, \varphi, t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! 2^{2m}} W_{m0}^n(\lambda) \left(\frac{z}{2}\right)^{m-1/2} G_{m+1/2, 2n}^{-1} \left(\frac{z^2}{4}\right), \\ W_{m0}^n(\lambda) = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta)^{2m} \cos 2n\theta d\theta,$$

що повністю співпадає з ізотропним випадком, докладно розглянутим у [7].

Використовуючи отримані формули динамічного прогину та функції напружень, можна визначити відповідні фізичні співвідношення теорії пружності для випадку тонкої ортотропної оболонки.

Підставимо формули (7) та (8) у (2). Вирази згинальних і крутильних моментів матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4\pi^{3/2}c^2r^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \times \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{k!m!} \frac{\chi_1^k \chi_2^m}{2^{2m-4}} \begin{Bmatrix} M_{1mk}^n \\ M_{2mk}^n \end{Bmatrix} \times \\ &\quad \times t_1^{2m} \left(\frac{z}{2}\right)^{m-k-1/2} G_{m+k+1/2,2n} \left(\frac{z^2}{4}\right), \\ \begin{Bmatrix} M_{1mk}^n \\ M_{2mk}^n \end{Bmatrix} &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2 \theta + \lambda x^2 \sin^2 \theta)^{2m}}{(1 - \tilde{\mu}(1 + \nu) \cos^2 2\theta)^m} \cos^{2k} 2\theta \cos 2n\theta \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta \\ x^{-2}(\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) \end{Bmatrix} d\theta, \\ H &= \frac{(1-\nu)(1-\mu)}{4\pi^{3/2}x r^2 c^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \sin 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{k!m!} \frac{\chi_1^k \chi_2^m}{2^{2m-4}} H_{mk}^n \times \\ &\quad \times t_1^{2m} \left(\frac{z}{2}\right)^{m-k-1/2} G_{m+k+1/2,2n} \left(\frac{z^2}{4}\right), \\ H_{mk}^n &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2 \theta + \lambda x^2 \sin^2 \theta)^{2m}}{(1 - \tilde{\mu}(1 + \nu) \cos^2 2\theta)^m} \cos^{2k} 2\theta \sin 2n\theta \sin 2\theta d\theta. \end{aligned}$$

Відповідно, використавши (9) та (10), знайдемо мембранні зусилля:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} &= \frac{R_2(1-\mu)}{2\sqrt{\pi}a^{3/2}c^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{k!m!} \frac{\chi_1^k \chi_2^m}{2^{2m}} \begin{Bmatrix} T_{1mk}^n \\ T_{2mk}^n \end{Bmatrix} \times \\ &\quad \times t_1^{2m} \left(\frac{z}{2}\right)^{m-k-1/2} G_{m+k+1/2,2n} \left(\frac{z^2}{4}\right), \\ \begin{Bmatrix} T_{1mk}^n \\ T_{2mk}^n \end{Bmatrix} &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2 \theta + \lambda x^2 \sin^2 \theta)^{2m+1}}{(1 - \tilde{\mu}(1 + \nu) \cos^2 2\theta)^{m+1}} \cos^{2k} 2\theta \cos 2n\theta \begin{Bmatrix} \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta / x^2 \end{Bmatrix} d\theta, \\ S &= -\frac{R_2(1-\mu)}{2\sqrt{\pi}a^{3/2}c^2x} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \sin 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{k!m!} \frac{\chi_1^k \chi_2^m}{2^{2m}} S_{mk}^n \times \\ &\quad \times t_1^{2m} \left(\frac{z}{2}\right)^{m-k-1/2} G_{m+k+1/2,2n} \left(\frac{z^2}{4}\right), \\ S_{mk}^n &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2 \theta + \lambda x^2 \sin^2 \theta)^{2m+1}}{(1 - \tilde{\mu}(1 + \nu) \cos^2 2\theta)^{m+1}} \cos^{2k} 2\theta \sin 2n\theta \sin 2\theta d\theta. \end{aligned}$$

Таким чином, отримано основні фізичні співвідношення теорії тонких ортотропних оболонок, що виражаються через функцію напружень і динамічний прогин оболонки.

**Числові дослідження.** При дослідженні напружено-деформованого стану тонких пологих оболонок при зосередженій дії миттєвого імпульсу найбільш цікавим є значення величини динамічного прогину, зусиль та моментів у центрі області навантаження. Для цього треба докладніше розглянути формулу асимптотичного виразу функції динамічного прогину (11).

Асимптотичний вираз (11) наведено у вигляді подвійних рядів, що значно ускладнює числові розрахунки. Тому є сенс розглянути випадок «спеціальної» ортотропії, коли між пружними сталими припускаємо залежність  $E_1 \neq E_2$ ,  $2G_{12} = \sqrt{E_1 E_2} / (1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})$ , тобто  $\mu = 0$ . Зазначену модель часто використовують у прикладних інженерних задачах, оскільки вона дозво-

ляє значно спростити як вигляд отриманих формул, так і подальші розрахунки. У цьому випадку асимптотичний вираз (11) набуде вигляду

$$w^{(0)} \sim \left[ \frac{\pi - z}{4} - \frac{z}{2} \right] \{1 + O(r^4)\} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{t_1}{2} \right)^{2m} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1)} W_{m0}^0 - \frac{2z}{\Gamma(m+1/2)} (W_{m0}^0 + W_{m0}^1 \cos 2\varphi) \right] \{1 + O(r^4)\}, \quad (12)$$

що співпадає з прогином для ізотропного матеріалу. Перший доданок правої частини (12) складається з суми двох початкових наближень для пластинки, а другий характеризує елемент як оболонку.

Числові розрахунки виконано для дослідження допустимості використання запропонованої методики у різних випадках ортотропії. Для обчислень вибрано такі матеріали: *I* –  $E_1 = 2.0$ ,  $E_2 = 1.42$ ,  $\nu = 0.15$ ,  $\mu = 0.05$  (рис. 2); *II* –  $E_1 = 1.4$ ,  $E_2 = 1.1$ ,  $\nu = 0.23$ ,  $\mu = 0.11$  (рис. 3). Криві 1 на рисунках відповідають матеріалу, що розглядаємо (*I* або *II*), а криві 2 – випадку «спеціальної» ортотропії матеріалу. Приймаємо, що  $\lambda = 0.5$ .

Як бачимо на рис. 2, при  $\mu = 0.05$  наближені формули дають достатньо точний результат. При цьому використання моделі «спеціальної» ортотропії значно скорочує час, необхідний для числових розрахунків, що є достатньо істотним при розв'язуванні прикладних задач.

Однак при  $\mu = 0.11$  (рис. 3) похибка є вже достатньо значною, і коректність використання спрощеної формули у загальному випадку є досить сумнівною.

Зазначимо, що при збільшенні значень часової координати похибка при використанні моделі «спеціальної» ортотропії значно зменшується, і різниця між точним значенням прогину та приблизним становить  $10^{-2}$ .

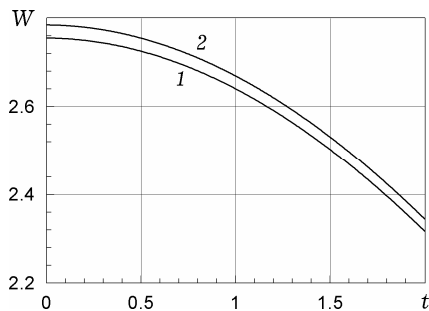


Рис. 2

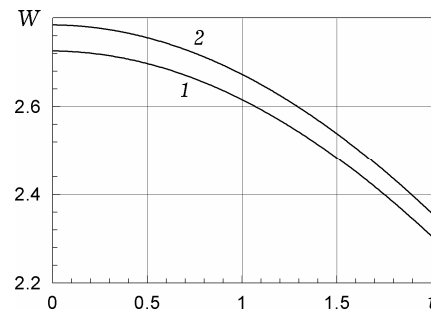


Рис. 3

**Висновки.** Побудовано фундаментальні розв'язки динамічних рівнянь тонкої пологої ортотропної оболонки довільної гауссової кривини. Вони є основою багатьох ефективних методів дослідження напружено-деформованого стану тонких оболонок. Фундаментальні розв'язки також є ефективним математичним апаратом для побудови систем граничних інтегральних рівнянь, до яких зводиться розв'язування крайових задач теорії оболонок.

Асимптотична формула динамічного прогину використана для дослідження коректності використання моделі «спеціальної» ортотропії для різних випадків анізотропії матеріалу. Встановлено приблизні межі зміни пружного параметра  $\mu$ , коли запропонована модель може бути застосована у розрахунках.

У подальшому планується використати отримані фундаментальні розв'язки для побудови у замкнутому вигляді компонент тензора Гріна для тонких ортотропних оболонок, дослідити асимптотику отриманих формул. Особливо це важливо при розв'язанні змішаних задач теорії оболонок з розрізами, стрижневими впайками, отворами тощо.

1. Блинов И. Н. Интегральные уравнения в задачах динамики оболочек // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2000. – 6. – С. 34–37.
2. Горшков А. Г., Старовойтов А. Г., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
3. Дмитриева Л. М., Гурьянов Н. Г., Артюхин Ю. П. Реакция замкнутой сферической оболочки на движущуюся сосредоточенную загрузку // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1975. – № 11. – С. 288–291.
4. Жигалко Ю. П., Садыкова М. М. Динамика тонкой круглой пластинки при нестационарном локальном нагружении // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1990. – № 20. – С. 184–191.
5. Карачун В. В., Мельник В. Н. Уравнения динамики оболочки с ненулевой гауссовой кривизной и произвольным очертанием линии меридиана // Вестн. двигателестроения. – 2009. – № 3. – С. 29–36.
6. Козин В. М., Жесткая В. Д., Погорелова А. В., Чижиков С. Д. и др. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. – Москва: Акад. Естествознания, 2007. – 335 с.
7. Назорная Р. М., Цванг В. А., Шевченко В. П. Фундаментальные решения динамических уравнений теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1994. – № 3. – С. 173–180.
8. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: А.С.К., 1998. – Т. 7. – С. 159–196. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7).
9. Шевченко В. П., Ветров О. С. Динамика тонкой ортотропной пластинки при импульсном нагружении // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Материалы VI междунар. науч. конф. – Донецк: Юго-Восток, 2010. – С. 215–219.
10. Якушев Н. Э., Гайдина С. Б. Динамика пологой сферической оболочки под действием переменной подвижной инерционной нагрузки // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1980. – № 15. – С. 182–193.
11. Chudinovich I., Constanda C. boundary integral equations in dynamic problems for elastic plates // J. Elasticity. – 2002. – 68, No. 1-3. – P. 73–94.
12. Khov H., Li W. L., Gibson R. F. An accurate solution method for the static and dynamic deflections of orthotropic plates with general boundary conditions // Compos. Struct. – 2009. – 90, No. 4. – P. 474–481.
13. Sladek J., Sladek V., Krivacek J., Aliabadi M. H. Local boundary integral equations for orthotropic shallow shells // Int. J. Solids and Struct. – 2007. – 44, No. 7-8. – P. 2285–2303.

#### **ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ**

*Рассмотрена задача построения фундаментальных решений уравнений динамики тонких пологих ортотропных оболочек произвольной гауссовой кривизны. Получены асимптотические формулы динамического прогиба оболочки при действии импульсного нагружения. Найдены физические соотношения упругости теории тонких оболочек. Исследована корректность использования в расчетах модели специальной ортотропии.*

#### **INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF ORTHOTROPIC SHELLS UNDER THE ACTION OF DYNAMIC IMPULSE LOAD**

*The problem on construction of fundamental solutions of equations of thin shallow orthotropic shell dynamics is investigated. Asymptotic formulas for dynamic deflection of a shell under the action of impulse loading are obtained. The physical elasticity relations of the thin shells theory are obtained. The validity of using the model of special orthotropics in calculations is investigated.*

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано  
07.10.10