УДК 539.3

М. О. Шульга

ЗАСТОСУВАННЯ ГАМІЛЬТОНОВОГО ФОРМАЛІЗМУ В ТЕОРІЇ ТИПУ ТИМОШЕНКА КОЛИВАНЬ ПЛАСТИН

Виконано загальний аналіз змішаних систем шести рівнянь теорії типу Тимошенка коливань пластин у прямокутних і полярних координатах. Показано, що ці системи можна подати в операторній канонічній (гамільтоновій) формі за просторовою координатою при відповідному виборі «канонічних» змінних і операторної функції Гамільтона. Побудовано функціонали для канонічних систем. Для змішаної гамільтонової системи за просторовою координатою в прямокутних координатах одержано редукований функціонал Геллінгера – Рейсснера і з його варіації виведено шість канонічних рівнянь.

Вступ. В монографії [6] вперше змішану систему рівнянь коливань плоскої задачі теорії пружності подано в операторній гамільтоновій формі за просторовою координатою. У багатьох наступних роботах, що проаналізовані в оглядових статтях [2, 7–9] та інших публікаціях, гамільтонів формалізм у розвинутій в [6] формі поширено на рівняння і задачі теорії пружності, електропружності, магнітопружності. Завдяки цим досягненням виявлено властивості характеристичних рівнянь і загальна структура розв'язків хвильових задач для періодичних структур. У роботах [10, 11] канонічні рівняння за просторовою координатою одержано в задачах про гармонічні згинальні коливання пластин з періодичними за однією координатою параметрами. Подібні дослідження проводились і в теорії коливань балок з періодичними параметрами [4, 5 та ін.]. У цій роботі гамільтонів формалізм розвивається стосовно рівнянь типу Тимошенка згинання пластин. Показано також, як канонічні операторні рівняння за однією просторовою координатою можна одержати із «ізохронної» варіації функціонала для канонічних систем, а також із редукованого функціонала типу Геллінгера – Рейсснера в теорії типу Тимошенка згинання пластин у прямокутних координатах.

1. Постановка задачі. В теорії типу Тимошенка поперечних коливань тонкої пластини в ортогональних криволінійних координатах α_1, α_2 в її серединній площині згинальні M_{11} і M_{22} та крутильний $M_{12} = M_{21}$ моменти, перерізувальні сили Q_1, Q_2, прогин w і кути повороту нормалі ψ_1, ψ_2 пов'язані рівняннями коливань

$$\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial A_2M_{11}}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{22} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2M_{12}}{\partial\alpha_2}\right\} - Q_1 = -\rho I_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial A_1M_{22}}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{11} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2M_{12}}{\partial\alpha_1}\right\} - Q_2 = -\rho I_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial A_2Q_1}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1Q_2}{\partial\alpha_2}\right\} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1}$$

і матеріальними співвідношеннями

$$M_{11} = -D\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1} + \frac{\psi_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + \nu\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2} + \frac{\psi_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)\right],$$

$$M_{22} = -D\left[\nu\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1} + \frac{\psi_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right) + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2} + \frac{\psi_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right],$$

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{1-\nu}{2}D\left[\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\psi_2}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\psi_1}{A_1}\right)\right],$$

$$Q_1 = B_3\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - \psi_1\right), \qquad Q_2 = B_3\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} - \psi_2\right), \tag{2}$$

в яких враховано формули для деформацій. В залежностях (1), (2) ρ, E, ν, $G_{13} = G_{23} = 2(1-\nu)E$ − густина, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, модулі зсуву матеріалу; $D = I_1 E/(1-\nu^2)$ − згинальна жорсткість; $B_3 = k_G G_{13} h = k_G G_{23} h$ − зсувна жорсткість; k_G − коефіцієнт зсуву; h − товщина пластини; $I_1 = h^3/12$ − момент інерції поперечного перерізу на одиницю довжини; A_1 і A_2 − параметри Ляме.

Сукупність восьми рівнянь (1), (2) відносно восьми невідомих функцій M_{11}, M_{22}, $M_{12} = M_{21}$, Q_1, Q_2, w, ψ_1, ψ_2 від координат α_1, α_2 і часу t подають в різних формах, найпоширенішою з яких є система типу Ляме трьох рівнянь гіперболічного типу відносно трьох невідомих функцій $w(\alpha_1,\alpha_2,t)$, $\psi_1(\alpha_1,\alpha_2,t)$, $\psi_2(\alpha_1,\alpha_2,t)$.

При застосуванні чисельних методів є також доцільним використання змішаної системи шести рівнянь в операторній нормальній формі Коші. Загальному аналізу рівнянь такого типу присвячена ця робота, в якій розглядаються рівняння (1), (2) в прямокутних x_1, x_2 і полярних r, θ координатах.

2. Прямокутні координати. У прямокутних координатах $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$ при $A_1 = A_2 = 1$ система рівнянь (1) спрощується до вигляду

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3}$$

а матеріальні співвідношення (2) запишуться таким чином:

$$M_{11} = -D\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right), \qquad M_{22} = -D\left(\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right),$$

$$M_{12} = -\frac{1-\nu}{2} D\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right),$$

$$Q_1 = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1\right), \qquad Q_2 = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right). \tag{4}$$

Виходячи із закладеної в монографії [6] ідеї, систему рівнянь (3), (4) запишемо у змішаному вигляді:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + Q_1, \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{2}{(1-\nu)D} M_{12},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \psi_1 + \frac{Q_1}{B_3}, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = -\frac{M_{11}}{D} - \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = -\nu \frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} + (1-\nu^2) D \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - B_3 \psi_2 + B_3 \frac{\partial w}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = B_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{5}$$

З двох інших рівнянь систем (3), (4) визначаються згинальний момент M_{22} і перерізувальна сила Q_2, що не ввійшли в систему (5), через основні розв'язувальні функції:

$$M_{22} = \nu M_{11} - (1-\nu^2) D \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \qquad Q_2 = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right). \tag{6}$$

Система (5) записана у вигляді операторної нормальної форми Коші за просторовою координатою x_1, коли за розв'язувальні функції вибрано M_{11},

ψ_2, w, ψ_1, M_{12}, Q_1, які при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на прямих $x_1 = \text{const}$.

Коефіцієнти системи (5), а значить, і рівнянь (3), (4), можуть бути довільними функціями від координати x_1 з розривами першого роду.

Аналогічно можна одержати операторну нормальну систему в формі Коші за просторовою координатою x_2, якщо вибрати за розв'язувальні функції M_{22}, ψ_1, w, ψ_2, M_{21}, Q_2.

Покажемо, що система (5) є операторною гамільтоновою системою [1] за просторовою координатою x_1, тобто

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i}, \qquad i = 1,2,3. \tag{7}$$

Із цією метою операторну функцію Гамільтона виберемо у вигляді

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^*\hat{\mathbf{P}}\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^*\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{p}, \tag{8}$$

де елементи симетричних операторних матриць $\hat{\mathbf{P}}$ та $\hat{\mathbf{Q}}$ визначаються так:

$$-\hat{P}_{11} = -\frac{1}{D}, \qquad -\hat{P}_{12} = -\hat{P}_{21} = -\nu\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad -\hat{P}_{13} = -\hat{P}_{31} = 0,$$

$$-\hat{P}_{22} = (1-\nu^2)D\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - B_3 - \rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad -\hat{P}_{23} = -\hat{P}_{32} = B_3\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$-\hat{P}_{33} = -B_3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad \hat{Q}_{11} = -\rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad \hat{Q}_{12} = \hat{Q}_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\hat{Q}_{13} = \hat{Q}_{31} = 1, \qquad \hat{Q}_{22} = -\frac{2}{(1-\nu)D}, \qquad \hat{Q}_{23} = \hat{Q}_{32} = 0, \qquad \hat{Q}_{33} = \frac{1}{B_3}. \tag{9}$$

Канонічні змінні означимо так:

$$[\,q_1 \;\; q_2 \;\; q_3\,]^\top = [\,M_{11} \;\; \psi_2 \;\; w\,]^\top, \qquad [\,p_1 \;\; p_2 \;\; p_3\,]^\top = [\,\psi_1 \;\; M_{12} \;\; Q_1\,]^\top.$$

В операторному виразі (8) і при виконанні диференціювання (7) оператори $\hat{P}_{ij}$ та $\hat{Q}_{ij}$ приймаємо сталими величинами.

Очевидно, що система (7) з урахуванням (8) і (9) збігається із системою (5), тобто система (5) є операторною гамільтоновою системою.

Система рівнянь (3), (4) і відповідні граничні умови можна одержати з умов стаціонарності за динамічними M_{11}, M_{22}, M_{12}, Q_1, Q_2 і кінематичними ψ_1, ψ_2, w змінними функціоналів типу Геллінгера – Рейсснера в теорії типу Тимошенка згинання пластин:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{H-R}} = \iint \Bigg\{ &-M_{11}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - M_{22}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} - M_{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right) + \\ &+ Q_1\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1\right) + Q_2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right) - qw - m_1\psi_1 - m_2\psi_2 - \\ &- \frac{1}{(1-\nu^2)D}\bigg[\frac{1}{2}M_{11}^2 + \frac{1}{2}M_{22}^2 - \nu M_{11}M_{22} + \\ &+ (1+\nu)M_{12}^2 - \frac{1}{2B_3}(Q_1^2 + Q_2^2)\bigg]\Bigg\}\,dx_1\,dx_2.\end{aligned} \tag{10}$$

Тут не враховано інерційних доданків, тобто розглядається статичний згин під дією навантажень m_1, m_2, q. Сили інерції можна ввести в остаточні рівняння за принципом Даламбера.

З функціонала $\Phi_{\text{H-R}}$ одержимо функціонал $\Phi_{\text{H-R}}^{\text{bm}}$, якому будуть відповідати змішані рівняння (5), якщо з (10) виключити згинальний момент M_{22}

і перерізувальну силу Q_2, користуючись формулами (6):

$$\Phi_{\text{H-R}}^{\text{bm}} = \iint \left\{ - M_{11} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{(1-\nu^2)D} \left[\frac{1}{2} \left(\nu M_{11} - (1-\nu^2) D \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right)^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} M_{11}^2 + (1+\nu) M_{12}^2 \right) \right] - M_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) +$$

$$+ Q_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 \right) - \frac{1}{2B_3} Q_1^2 + \frac{1}{2} B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right)^2 -$$

$$\left. - qw - m_1 \psi_1 - m_2 \psi_2 \right\} dx_1 \, dx_2 \,. \tag{11}$$

З умов стаціонарності за M_{11}, ψ_2, w, ψ_1, M_{12}, Q_1 функціонала (11) одержимо рівняння

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = m_1 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + Q_1, \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{2}{(1-\nu)D} M_{12} \,,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \psi_1 + \frac{Q_1}{B_3}, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = - \frac{M_{11}}{D} - \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \,,$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = - \nu \frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} + (1-\nu^2) D \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} + m_2 - B_3 \psi_2 + B_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \,,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = B_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - q \,. \tag{12}$$

Якщо в (12) згідно із принципом Даламбера покласти

$$m_1 = - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \quad m_2 = - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}, \quad q = - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \,,$$

то система (12) співпаде із системою (5). Цей результат можна безпосередньо одержати варіаційним шляхом, якщо відповідним чином узагальнити варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського.

Операторну гамільтонову систему (5) можна одержати з «ізохронної» варіації функціонала

$$I(M_{11}, \psi_2, w, \psi_1, M_{12}, Q_1) = \int_a^b \left\{ \psi_1 \partial_1 M_{11} + M_{12} \partial_1 \psi_2 + Q_1 \partial_1 w - \right.$$

$$- \left[\frac{1}{2} \frac{1}{D} M_{11}^2 + \nu \partial_2 M_{11} \psi_2 + \frac{1}{2} (\rho I_1 \partial_t^2 + B_3 - (1-\nu^2) D \partial_2^2) \psi_2^2 - \right.$$

$$- B_3 \partial_2 \psi_2 w + \frac{1}{2} (- \rho h \partial_t^2 + B_3 \partial_2^2) w^2 - \frac{1}{2} \rho I_1 \partial_t^2 \psi_1^2 -$$

$$\left.\left. - \partial_2 \psi_1 M_{12} + \psi_1 Q_1 - \frac{1}{2} \frac{2}{(1-\nu)D} M_{12}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{B_3} Q_1^2 \right] \right\} dx_1 \,. \tag{13}$$

При варіюванні функціонала оператори $\hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ji}$, $\hat{Q}_{ij} = \hat{Q}_{ji}$ треба вважати замороженими (сталими) і переставними з варіаціями

$$\delta(\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}) a_m b_n = (\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij})(a_m \delta b_n + b_n \delta a_m) =$$

$$= \delta b_n (\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}) a_m + \delta a_m (\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}) b_n \,.$$

3. Полярні координати. У полярних координатах $r = \alpha_1$, $\theta = \alpha_2$ при $A_1 = 1$, $A_2 = r$ система рівнянь (1) спрощується до вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r M_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{M_{\theta\theta}}{r} - Q_r = - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} \,,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_\theta = - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \,, \tag{14}$$

а матеріальні співвідношення (2) запишуться наступним чином:

$$M_{rr} = -D\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\psi_r}{r}\right)\right), \quad M_{\theta\theta} = -D\left(\nu\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\psi_r}{r}\right),$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = -\frac{1}{2}(1-\nu)D\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}\right),$$

$$Q_r = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \psi_r\right), \qquad Q_\theta = B_3\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} - \psi_\theta\right). \tag{15}$$

Дотримуючись закладеної в монографії [6] ідеї і статті [3], запишемо систему (14), (15) в операторній нормальній формі Коші за радіальною координатою r:

$$\frac{\partial rM_{rr}}{\partial r} = M_{\theta\theta} - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta} + rQ_r - \rho I_1\frac{\partial^2\psi_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} = -\frac{2}{(1-\nu)D}M_{r\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} + \frac{\psi_\theta}{r},$$

$$\frac{\partial\psi_r}{\partial r} = -\frac{M_{rr}}{D} - \nu\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} - \nu\frac{\psi_r}{r}, \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{Q_r}{B_3} + \psi_r,$$

$$\frac{\partial rM_{r\theta}}{\partial r} = -M_{r\theta} - \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta} + rQ_\theta - r\rho I_1\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial rQ_r}{\partial r} = -\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta} + r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{16}$$

Згинальний M_{rr} і крутильний $M_{r\theta}$ моменти, перерізувальна сила Q_r, прогин w і кути повороту нормалі ψ_r і ψ_θ при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на перерізах $r = \text{const}$ розриву механічних характеристик пластини. Функції rM_{rr}, ψ_θ, w, ψ_r, $rM_{r\theta}$, rQ_r вибираємо за основні розв'язувальні функції і відповідним чином перетворимо одержану систему (16). З цією метою з системи (16), користуючись двома невикористаними з рівнянь (14) і (15), виключаємо $M_{\theta\theta}$, Q_θ. Виразимо згинальний момент $M_{\theta\theta}$ і перерізувальну силу Q_θ через основні розв'язувальні функції rM_{rr}, ψ_θ, w, ψ_r:

$$M_{\theta\theta} = \nu M_{rr} - (1-\nu^2)D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\psi_r}{r}\right), \quad Q_\theta = B_3\left(-\psi_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right). \tag{17}$$

Після відповідних перетворень рівнянь (16) одержимо наступну систему змішаних рівнянь теорії типу Тимошенка коливань пластини в полярних координатах в операторній нормальній формі Коші:

$$\frac{\partial rM_{rr}}{\partial r} = \frac{\nu}{r}rM_{rr} - (1-\nu^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} - (1-\nu^2)D\frac{\psi_r}{r} - \rho I_1\frac{\partial^2\psi_r}{\partial t^2} -$$
$$- \frac{1}{r}\frac{\partial rM_{r\theta}}{\partial\theta} + rQ_r,$$

$$\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} = \frac{\psi_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} - \frac{2}{(1-\nu)D}\frac{1}{r}rM_{r\theta}, \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = \psi_r + \frac{1}{rB_3}rQ_r,$$

$$\frac{\partial\psi_r}{\partial r} = -\frac{1}{rD}rM_{rr} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} - \frac{\nu}{r}\psi_r,$$

$$\frac{\partial rM_{r\theta}}{\partial r} = -\frac{\nu}{r}\frac{\partial rM_{r\theta}}{\partial\theta} + (1-\nu^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2} - B_3 r\psi_\theta - r\rho I_1\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial t^2} + B_3\frac{\partial w}{\partial\theta} +$$
$$+ (1-\nu^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}rM_{r\theta},$$

$$\frac{\partial rQ_r}{\partial r} = B_3 \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - B_3 \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \tag{18}$$

відносно основних функцій rM_{rr}, ψ_θ, w, ψ_r, $rM_{r\theta}$, rQ_r.

Покажемо, що система (17) є операторною гамільтоновою системою [1] за просторовою координатою r, тобто

$$\frac{\partial q_i}{\partial r} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial r} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i}, \qquad i = 1,2,3. \tag{19}$$

З цією метою «канонічні» змінні q_i, p_i і операторну функцію Гамільтона виберемо у вигляді

$$[\,q_1 \;\; q_2 \;\; q_3\,]^\top = [\,rM_{rr} \;\; \psi_\theta \;\; w\,]^\top, \qquad [\,p_1 \;\; p_2 \;\; p_3\,]^\top = [\,\psi_r \;\; rM_{r\theta} \;\; rQ_r\,]^\top,$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{P}_{ij}q_iq_j + \hat{R}_{ij}q_ip_j + \frac{1}{2}\hat{Q}_{ij}p_ip_j, \tag{20}$$

де елементи операторних симетричних матриць $\hat{P}_{ij}$, $\hat{Q}_{ij}$ і ненульові елементи операторної матриці $\hat{R}_{ij}$ мають наступні значення:

$$-\hat{P}_{11} = -\frac{1}{rD}, \qquad -\hat{P}_{12} = -\hat{P}_{21} = -\frac{\nu}{r}, \qquad -\hat{P}_{13} = -\hat{P}_{31} = 0,$$

$$-\hat{P}_{22} = (1-\nu^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - B_3 r - r\rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad -\hat{P}_{23} = -\hat{P}_{32} = B_3\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$-\hat{P}_{33} = -B_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + r\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad \hat{Q}_{11} = -(1-\nu^2)D\frac{1}{r} - \rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\hat{Q}_{12} = \hat{Q}_{21} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \hat{Q}_{13} = \hat{Q}_{31} = 1, \qquad \hat{Q}_{22} = -\frac{2}{(1-\nu)Dr}, \qquad \hat{Q}_{23} = \hat{Q}_{32} = 0,$$

$$\hat{Q}_{33} = \frac{1}{rB_3}, \qquad \hat{R}_{11} = \frac{\nu}{r}, \qquad \hat{R}_{12} = -(1-\nu^2)D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \hat{R}_{22} = \frac{1}{r}. \tag{21}$$

В операторному виразі (20) і при виконанні диференціювання в (19) оператори (21) $\hat{P}_{ij}$, $\hat{Q}_{ij}$, $\hat{R}_{ij}$ вважаються сталими величинами. В результаті такої процедури з (19) одержимо рівняння (18). Це і доводить, що система (18) є операторною гамільтоновою системою за просторовою координатою r. Коефіцієнти системи (18), а значить, і рівнянь (14), (15), можуть бути довільними функціями координати r з розривами першого роду.

Функції $M_{\theta\theta}$ і Q_θ, які не ввійшли в систему (18), визначаються через основні розв'язувальні функції за формулами (17).

Операторну гамільтонову систему (18) можна одержати з «ізохронної» варіації функціонала

$$\begin{aligned} I(rM_{rr}, \psi_\theta, w, \psi_r, rM, rQ_r) = \int_a^b \Bigg\{ & \psi_r\partial_r(rM_{rr}) + rM_{r\theta}\partial_r\psi_\theta + rQ_r\partial_r w - \\ & - \Bigg[\frac{1}{2}\frac{1}{rD}(rM_{rr})^2 + \frac{\nu}{r}\partial_\theta(rM_{rr})\psi_\theta + \frac{1}{2}\Big(r\rho I_1\partial_t^2 + B_3 r - \\ & - (1-\nu^2)D\frac{1}{r}\partial_\theta^2\Big)\psi_\theta^2 - B_3\partial_\theta\psi_\theta w + \frac{1}{2}\Big(-r\rho h\partial_t^2 + \frac{B_3}{r}\partial_\theta^2\Big)w^2 - \\ & - \frac{1}{2}\Big(\rho I_1\partial_t^2 + (1-\nu^2)D\frac{1}{r}\Big)\psi_r^2 - \frac{1}{r}\partial_\theta\psi_r(rM_{r\theta}) + \psi_r(rQ_r) - \\ & - \frac{1}{2}\frac{2}{(1-\nu)D}\frac{1}{r}(rM_{r\theta})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{rB_3}(rQ_r)^2 + \frac{\nu}{r}(rM_{rr})\psi_r - \\ & - (1-\nu^2)D\frac{1}{r}\partial_\theta\psi_\theta\psi_r + \frac{1}{r}\psi_\theta(rM_{r\theta})\Bigg]\Bigg\}\,dr. \end{aligned} \tag{22}$$

При варіюванні функціонала оператори $\hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ji}$, $\hat{Q}_{ij} = \hat{Q}_{ji}$, $\hat{R}_{ij}$ треба вважати замороженими (сталими) і переставними з варіаціями

$$\delta(\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}, \hat{R}_{ij}) a_m b_n = (\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}, \hat{R}_{ij})(a_m \delta b_n + b_n \delta a_m) =$$
$$= \delta b_n (\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}, \hat{R}_{ij}) a_m + \delta a_m (\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}, \hat{R}_{ij}) b_n .$$

1. *Павловський М. А.* Теоретична механіка. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.
2. *Успехи* механики: В 6 т. / Под ред. *А. Н. Гузя.* – Киев: Літера ЛТД, 2008. – Т. 4. – 720 с.
3. *Шульга В. М.* До розв'язку рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 80–82.
4. *Шульга В. М., Шульга О. М.* До теорії Тимошенка поперечних коливань стержня з періодичними параметрами // Доп. НАН України. – 1997. – № 3. – С. 73–76.
5. *Шульга Н. А.* Об одной смешанной системе уравнений теории упругости // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 3. – С. 25–29.
6. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
7. *Шульга Н. А.* Распространение связанных волн в периодически-неоднородных средах при взаимодействии с электромагнитным полем // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 10. – С. 38–68.
8. *Шульга Н. А.* Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 7. – С. 15–56.
9. *Шульга Н. А.* Теория динамических процессов в механических системах и материалах регулярной структуры // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 12. – С. 43–80.
10. *Шульга О. М.* Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластины с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикл. механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 105–111.
11. *Шульга О. М.* Построение решений уравнений колебаний классической теории пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 109–113.

ПРИМЕНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВОГО ФОРМАЛИЗМА В ТЕОРИИ ТИПА ТИМОШЕНКО КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

Выполнен общий анализ смешанных систем шести уравнений теории типа Тимошенко колебаний пластин в прямоугольных и полярных координатах. Показано, что эти системы можно представить в операторной канонической (гамильтоновой) форме по пространственной координате при соответствующем выборе «канонических» переменных и операторной функции Гамильтона. Построены функционалы для канонических систем. Для смешанной гамильтоновой системы по пространственной координате в прямоугольных координатах получен редуцированный функционал Хеллингера – Рейсснера и из его вариации выведены шесть канонических уравнений.

APPLICATION OF HAMILTONIAN FORMALISM IN THE TIMOSHENKO-TYPE THEORY OF PLATE VIBRATIONS

General analysis of the mixed systems of six equations of the Timoshenko-type theory vibrations of plates in rectangular and polar coordinates is made. It is shown that these systems can be represented in the operator canonical (Hamiltonian) form of the spatial coordinate with an appropriate choice of «canonical» variables and the operator Hamilton function. Functional for canonical systems is constructed. For the mixed Hamiltonian system in the spatial coordinate in the rectangular coordinates a reduced Hellinger – Reissner functional is obtained and its variations are derived from six canonical equations.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
12.08.10