УДК 539.3

В. Г. Карнаухов[1], В. І. Козлов[1], Т. В. Карнаухова[2]

ВПЛИВ ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ НА АКТИВНЕ ДЕМПФУВАННЯ ВИМУШЕНИХ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ ГНУЧКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ АКТУАТОРІВ

Розглядається задача про вплив дисипативного розігріву на активне демпфування вимушених резонансних коливань гнучких шарнірно опертих в'язкопружних циліндричних панелей за допомогою п'єзоелектричних актуаторів. Для розв'язування нелінійної задачі використано аналітичний метод Бубнова – Гальоркіна та чисельний метод скінченних елементів у поєднанні з методом гармонічного балансу. В обох випадках задачу зведено до нелінійних алгебраїчних рівнянь, які розв'язуються чисельно. Прирівнюванням максимальної температури дисипативного розігріву до точки Кюрі знайдено критичне значення параметра механічного навантаження, після досягнення якого керувати коливаннями панелі стає неможливим через втрату активним матеріалом п'єзоефекту.

1. Вступ. Тонкі композитні циліндричні панелі широко застосовують у багатьох галузях сучасної техніки [1, 3, 4, 14–16, 20]. У випадку дії на них гармонічних в часі навантажень із частотою, близькою до резонансної, виникають коливання, амплітуди яких можуть бути сумірні з товщиною пластинок. При вивченні процесів у таких тілах слід враховувати геометричну нелінійність. Потреба врахування геометричної нелінійності виникає також при дослідженні досить тонких панелей, а також при дії інтенсивного механічного навантаження, зокрема з частотою, близькою до резонансної.

Якщо матеріал пластини є непружний, то при моногармонічному навантаженні на резонансних частотах внаслідок гістерезисних втрат може істотно підвищитися температура панелі (так званий дисипативний розігрів). Інтенсивні коливання панелі та дисипативний розігрів можуть спричинити втрату її функціональної здатності внаслідок втомного руйнування та високої температури.

У зв'язку з цим виникає необхідність у демпфуванні вимушених резонансних коливань гнучких панелей. Найбільш розповсюдженими є пасивні методи демпфування, коли в структуру панелі вводять включення з високими гістерезисними втратами. Проте в останні роки почали використовувати ефективніші методи активного демпфування вимушених резонансних коливань тонкостінних елементів, коли в їх структуру вводять п'єзоелектричні включення, які виконують функції так званого актуатора [10, 12, 18, 19, 24–27]. Основна задача під час використання цього методу полягає у розрахунку різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації дії механічного навантаження. На цю різницю потенціалів може вплинути як геометрична нелінійність, так і температура дисипативного розігріву [7, 10, 12, 13, 21–23, 28, 29]. Так, наприклад, якщо температура досягає точки Кюрі, то п'єзоелектричний актуатор втрачає своє функціональне призначення через відсутність п'єзоефекту за такої температури. При цьому реалізується специфічний тип теплового руйнування, коли панель не втрачає цілісності, але керувати її коливаннями неможливо.

У цій роботі наведено основні співвідношення, які описують вимушені резонансні коливання та дисипативний розігрів гнучких ортотропних циліндричних панелей при дії на них поверхневого механічного тиску, який змінюється в часі за моногармонічним законом. Для моделювання термомеханічної поведінки таких панелей використовуємо механічні гіпотези Кірхгофа – Лява, доповнені відповідними гіпотезами про розподіл по товщині електричних польових величин і температури. Пасивні матеріали пластини вважаємо в'язкопружними, а активні шари − пружними. Для випадку гармонічного навантаження використовуємо концепцію комплексних характеристик [6, 8, 9, 11, 17]. Наведено загальну нелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь, яка описує коливання і дисипативний розігрів пасивних ортотропних циліндричних панелей із розподіленими актуаторами за дії гармонічного тиску. Обмежуючись одночленним наближенням при дослідженні резонансних коливань гнучкої прямокутної в плані панелі з шарнірно закріпленими торцями, методом Бубнова – Гальоркіна, одержуємо звичайне нелінійне інтегро-диференціальне рівняння за часом, яке описує нестаціонарні коливання панелі в околі резонансної частоти. З цього рівняння одержуємо співвідношення для визначення різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Записано рівняння енергії, розв'язок якого визначає температуру дисипативного розігріву. Для випадку теплоізольованих торців одержано точний розв'язок цього рівняння. Аналіз виразу для компенсуючої різниці потенціалів показує, що геометрична нелінійність не впливає на неї. Таким чином, для розрахунку вказаної різниці потенціалів можна використати значно простішу лінійну теорію, згідно з якою співвідношення, які пов'язують деформації та переміщення, є лінійними. Прирівнюванням максимальної температури дисипативного розігріву до температури Кюрі одержано вираз для критичного значення поверхневого тиску, після досягнення якого керувати коливаннями панелі неможливо внаслідок втрати активним матеріалом п'єзоефекту. При цьому слід пам'ятати, що для визначення цього критичного значення уже необхідно враховувати вплив геометричної нелінійності. Обмежимося випадком, коли властивості матеріалів не залежать від температури. При цьому розв'язок спряженої задачі зводиться до розв'язання таких трьох задач: ***1***) задача про вимушені нелінійні коливання панелі; ***2***) розрахунок дисипативної функції; ***3***) розв'язання рівняння енергії з відомим джерелом тепла.

2. Постановка задачі про активне демпфування вимушених резонансних коливань гнучких ортотропних циліндричних панелей за допомогою п'єзоактуаторів. Для активного демпфування стаціонарних гармонічних коливань гнучких циліндричних панелей з пасивних матеріалів (металів, полімерів, композитів тощо) за допомогою актуаторів у їх структуру вводять п'єзоелектричні включення, які можуть бути розташовані як на її поверхні, так і в будь-якому місці по товщині. Вони можуть покривати всю поверхню панелі або наноситися у вигляді плям. До цих включень потрібно підвести таку різницю потенціалів, яка компенсувала би зовнішнє механічне навантаження, так що при сумісній дії механічного й електричного навантаження амплітуда вимушених коливань дорівнюватиме нулю.

У загальному випадку області з включеннями є тонкими шаруватими в'язкопружними п'єзопанелями, які складені з довільної кількості пасивних або п'єзоактивних шарів сталої товщини. Пасивні шари можуть бути металевими, полімерними або композитними. Вважаємо їх ортотропними. П'єзоактивні шари є трасверсально-ізотропними та поляризованими по товщині панелі. Якщо між шарами електроди відсутні, то на їх границі реалізується ідеальний механічний і електричний контакт. Дисипативні властивості матеріалів пасивних і п'єзоактивних шарів враховуються на основі моделей лінійної в'язкопружності, які при гармонічному деформуванні приводять до комплексних характеристик [6, 8, 9, 11, 17]. Деформації вважаємо малими, а кути повороту такими, що необхідно враховувати їх квадрати. Тоді можна використати найпростіший варіант геометрично нелінійної квадратичної теорії [3, 4, 14]. При цьому рівняння руху є також нелінійними. Рівняння руху, кінематичні співвідношення і рівняння енергії є універсальними. Специфічні особливості поведінки панелі описуються рівняннями стану, які пов'язують зусилля, моменти з деформаціями та електричними польовими величинами.

У роботі [12] подана постановка задачі про активне демпфування гнучких тонких пластин з використанням механічних гіпотез Кірхгофа – Лява, доповнених адекватними їм гіпотезами про розподіл електричних польових величин. В зв'язку з тим, що рівняння стану, які пов'язують зусилля, моменти з деформаціями та електричними польовими величинами, є однаковими для пластин та оболонок, використаємо наведені в [12] рівняння стану при дослідженні активного демпфування прямокутних пластин.

Оболонку віднесемо до декартової системи координат x, y, z. Координатна поверхня $z = 0$ може міститися всередині деякого шару, співпадати з поверхнею контакту шарів або з граничною поверхнею пластини. Модель шаруватої панелі будуємо на основі гіпотез Кірхгофа – Лява для всього пакету шарів [1, 3, 4, 14]. Ці гіпотези доповнюємо гіпотезами щодо електричних польових величин [5, 8, 9]: ***1°***) вважаємо, що тангенціальні складові напруженості електричного поля та індукції $E_x = E_1$, $E_y = E_2$, $D_x = D_1$, $D_y = D_2$ є значно меншими від їх нормальних складових $E_z = E_3$, $D_z = D_3$, а тому ними можна знехтувати; ***2°***) тоді з рівняння електростатики для індукції $\partial D_z / \partial z = 0$ маємо, що нормальна складова індукції D_z у кожному діелектричному пасивному або п'єзоактивному шарі є постійною по товщині. Якщо між діелектричними шарами нема електродів, то нормальна складова індукції буде постійною величиною у пакеті цих шарів з огляду на умови ідеального електричного контакту між ними. За наявності електродів між шарами при переході через них індукція змінюється стрибкоподібно. Металеві шари вважаємо ідеальними провідниками, на їхніх поверхнях потенціал постійний, а напруженість електричного поля в них дорівнює нулеві.

Для дослідження впливу температури на активне демпфування коливань за допомогою актуаторів згадані вище рівняння потрібно доповнити універсальним рівнянням енергії, яке описує дисипативний розігрів.

Надалі будемо розглядати гнучкі ортотропні в'язкопружні циліндричні панелі постійної товщини, що складаються з довільної кількості пасивних або п'єзоактивних шарів. Пасивні шари можуть бути металевими, полімерними або композитними. У загальному випадку пасивні шари будемо вважати ортотропними. П'єзоактивні шари приймаємо поляризованими по товщині. Вони можуть бути виготовлені з п'єзокераміки або п'єзополімеру. Якщо між шарами відсутні електроди, то між ними реалізується ідеальний механічний та електричний контакт. Для моделювання нестаціонарних процесів використаємо лінійні моделі в'язкопружності [6, 8, 9], в яких усі електромеханічні характеристики заміняються на оператори Вольтерра. Приймаємо, що при коливаннях кути повороту координатної поверхні є великими, а кінематичні характеристики – нелінійними. При цьому рівняння руху є нелінійними, хоча деформації є малими.

Для оболонки, складеної з пасивного ортотропного матеріалу і трансверсально-ізотропного п'єзоактивного матеріалу, наведені в [12] спрощені відповідно до вказаних гіпотез рівняння стану для циліндричної панелі матимуть вигляд

$$
\begin{aligned}
&T_1 = C_{11} * \varepsilon_1 + C_{12} * \varepsilon_2 + K_{12} * æ_1 + K_{22} * æ_2 + T_0 ,\\
&T_2 = C_{12} * \varepsilon_1 + C_{22} * \varepsilon_2 + K_{12} * æ_1 + K_{22} * æ_2 + T_0 ,\\
&S = C_{66} * \varepsilon_{12} + K_{66} * æ_{12} ,\\
&M_1 = K_{11} * \varepsilon_1 + K_{12} * \varepsilon_2 + D_{11} * æ_1 + D_{12} * æ_2 + M_0 ,\\
&M_2 = K_{12} * \varepsilon_1 + K_{22} * \varepsilon_2 + D_{12} * æ_1 + D_{22} * æ_2 + M_0 ,\\
&H = K_{66} * \varepsilon_{12} + D_{66} * æ_{12} ,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де вирази для $C_{k\ell}, K_{k\ell}, D_{k\ell}$ наведено в [12].

Як частковий випадок цих загальних співвідношень розглянемо тришарові циліндричні панелі з різним розміщенням електродів. У першому випадку приймаємо, що між пасивним і п'єзоактивним шарами нанесено нескінченно тонкі електроди, до яких підведено різницю потенціалів, що змінюється з часом за гармонічним законом. Такі ж електроди нанесено і на зовнішні поверхні. Будемо також вважати, що середній шар є діелектричним і різниця потенціалів на ньому дорівнює нулеві. Індукція в такому шарі постійна по товщині кожного шару, зокрема,

$$\overset{k}{D}_3 = \overset{k}{C}(\alpha, \beta) . \tag{2}$$

Використовуючи вказані вище гіпотези відносно механічних та електричних польових величин, одержимо [12], що у визначальних рівняннях (1) слід покласти

$$C_{ij} = \int\limits_{(h)} B_{ij}(\gamma)\, d\gamma + \overset{1}{\nu}_3 + \overset{2}{\nu}_3 - \frac{\left(\overset{1}{v}_1\right)^2}{\overset{1}{v}_0} - \frac{\left(\overset{2}{v}_2\right)^2}{\overset{2}{v}_0},$$

$$K_{ij} = \int\limits_{(h)} B_{ij}(\gamma)\gamma\, d\gamma + \overset{1}{v}_4 + \overset{2}{\nu}_4 - \frac{\overset{1}{v}_1\, \overset{1}{v}_2}{\overset{1}{v}_0} - \frac{\overset{2}{v}_1\, \overset{2}{v}_2}{\overset{2}{v}_0},$$

$$D_{ij} = \int\limits_{(h)} B_{ij}(\gamma)\gamma^2\, d\gamma + \overset{1}{\nu}_5 + \overset{2}{\nu}_5 - \frac{\left(\overset{1}{v}_2\right)^2}{\overset{1}{v}_0} - \frac{\left(\overset{2}{v}_2\right)^2}{\overset{2}{v}_0}, \qquad i, j = 1, 2,$$

$$(C_{66}, K_{66}, D_{66}) = \int\limits_{(h)} B_{66}(1, \gamma, \gamma^2)\, d\gamma ,$$

$$\overset{0}{T} = \frac{\overset{1}{v}_1}{\overset{1}{v}_0}\overset{1}{V}_0 + \frac{\overset{2}{v}_1}{\overset{2}{v}_0}\overset{2}{V}_0, \qquad \overset{0}{M} = \frac{\overset{1}{v}_2}{\overset{1}{v}_0}\overset{1}{V}_0 + \frac{\overset{2}{v}_2}{\overset{2}{v}_0}\overset{2}{V}_0 , \tag{3}$$

де

$$\overset{i}{v}_0 = \int\limits_{(h_i)} \frac{1}{\overset{i}{\gamma}_{33}}\, d\gamma, \qquad \overset{i}{v}_{(1,2)} = \int\limits_{(h_i)} \frac{\overset{i}{\gamma}_{31}}{\overset{i}{\gamma}_{33}} (1, \gamma)\, d\gamma ,$$

$$\overset{i}{v}_{(3,4,5)} = \int\limits_{(h_i)} \frac{\left(\overset{i}{\gamma}_{31}\right)^2}{\overset{i}{\gamma}_{33}} (1, \gamma, \gamma^2)\, d\gamma . \tag{4}$$

Тут слід пам'ятати, що для пасивного діелектрика $\overset{0}{v}_i = 0,\ i = 1, \ldots, 5$. Якщо ж середній пасивний шар є металевим, то додатково покладаємо також, що $\overset{0}{\gamma}_{33} \to 0$.

Аналіз співвідношень (3) показує, що тип симетрії пластини повністю визначається характером симетрії пасивного шару, оскільки поляризований по товщині п'єзоактивний шар формально є ізотропним.

Розглянемо другий випадок, коли середній шар − діелектричний, внутрішні електроди відсутні, а до зовнішніх електродів підведена різниця потенціалів V_0. На відміну від співвідношення (2), у цьому випадку індукція постійна по товщині всієї панелі:

$$\overset{k}{D}_3 = C(\alpha, \beta) . \tag{5}$$

При цьому напруженість електричного поля визначається формулою

$$\overset{k}{E}_3 = \frac{C(\alpha,\beta)}{\overset{k}{\gamma}_{33}(\gamma)} - \frac{\overset{k}{\gamma}_{31}(\gamma)}{\overset{k}{\gamma}_{33}(\gamma)}[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\text{æ}_1 + \text{æ}_2)]. \tag{6}$$

Тоді у визначальних рівняннях (1) слід покласти

$$C_{ij} = \int_{(h)} B_{ij}(\gamma)\,d\gamma - \frac{v_1^2}{v_0}, \qquad K_{ij} = \int_{(h)} B_{ij}(\gamma)\gamma\,d\gamma + v_4 - \frac{v_1 v_2}{v_0},$$

$$D_{ij} = \int_{(h)} B_{ij}(\gamma)\gamma^2\,d\gamma + v_5 - \frac{v_2^2}{v_0}, \qquad \overset{0}{T} = V_0\frac{v_1}{v_0}, \qquad \overset{0}{M} = V_0\frac{v_2}{v_0}, \tag{7}$$

де

$$v_0 = \int_{(h)} \frac{1}{\gamma_{33}(\gamma)}\,d\gamma, \qquad v_{(1,2)} = \int_{(h)} \frac{\gamma_{31}(\gamma)}{\gamma_{33}(\gamma)}(1,\gamma)\,d\gamma,$$

$$v_{(3,4,5)} = \int_{(h)} \frac{[\gamma_{31}(\gamma)]^2}{\gamma_{33}(\gamma)}(1,\gamma,\gamma^2)\,d\gamma. \tag{8}$$

Надалі обмежимося розглядом п'єзоактивних шарів, які мають однакову товщину й однакові властивості, за винятком того, що поляризація їх протилежна, тобто $\overset{2}{\gamma}_{31} = -\overset{1}{\gamma}_{31}$. Тоді у рівняннях стану (1) для визначення електромеханічних характеристик матимемо такі вирази

– за наявності внутрішніх електродів, до яких підведені різниці потенціалів $\overset{0}{V}_1 = \overset{0}{V}_2$, $\overset{0}{V} = 0$:

$$C_{ij} = h_0\overset{0}{B}_{ij} + 2h_1\overset{1}{B}_{ij}, \quad K_{ij} = 0, \quad T_0 = 0, \quad M_0 = \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}_{31}(h_1 + h_0)\overset{0}{V}_1,$$

$$D_{ij} = \frac{h_0^3}{12}\overset{0}{B}_{ij} + \frac{2}{3}\left\{\overset{1}{B}_{ij} + \overset{1}{B}_{11}\frac{1+\overset{1}{v}}{2}\cdot\frac{k_p^2}{1-k_p^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[1 - \frac{3}{4h_1}\frac{((h_0/2+h_1)^2 - (h_0/2)^2)^2}{(h_0/2+h_1)^3 - (h_0/2)^3}\right]\right\}\times$$
$$\times\left[(h_0/2+h_1)^3 - (h_0/2)^3\right]; \tag{9}$$

– за відсутності внутрішніх електродів:

$$C_{ij} = h_0\overset{0}{B}_{ij} + 2h_1\left(\overset{1}{B}_{ij} + \overset{1}{B}_{11}\frac{1+\overset{1}{v}}{2}\cdot\frac{\left(\overset{1}{k}_p\right)^2}{1-\left(\overset{1}{k}_p\right)^2}\right), \qquad K_{ij} = 0,$$

$$D_{ij} = \frac{h_0^3}{12}\overset{0}{B}_{ij} + \frac{2}{3}\left(\overset{1}{B}_{ij} + \overset{1}{B}_{11}\frac{1+\overset{1}{v}}{2}\cdot\frac{\left(\overset{1}{k}_p\right)^2}{1-\left(\overset{1}{k}_p\right)^2}\times\right.$$
$$\times\left[1 - \frac{3}{4h_1}\frac{((h_0/2+h_1)^2 - (h_0/2)^2)^2}{(h_0/2+h_1)^3 - (h_0/2)^3}\right]\times$$
$$\left.\times\frac{2h_1\overset{0}{\gamma}_{33}}{h_0\overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1\overset{0}{\gamma}_{33}}\right)\left[(h_0/2+h_1)^3 - (h_0/2)^3\right], \qquad T_0 = 0,$$

$$M_0 = \frac{\overset{0}{\gamma}_{31} h_1 (h_0 + h_1) \overset{0}{\gamma}_{33}}{h_0 \overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1 \overset{0}{\gamma}_{33}} V_0 . \tag{10}$$

До наведених вище визначальних рівнянь потрібно додати рівняння руху гнучкої циліндричної панелі [1, 3, 4, 14]

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{1}{R} T_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(S \frac{\partial w}{\partial x} + T_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \bar{q} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 . \tag{11}$$

У декартовій системі координат $Oxyz$, осі Ox, Oy якої співпадають із лініями кривизн серединної поверхні, а вісь Oz направлена вздовж нормалі до оболонки, кінематичні співвідношення мають вигляд

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 , \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 ,$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} ,$$

$$æ_x = æ_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad æ_y = æ_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad æ_{xy} = æ_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} . \tag{12}$$

Рівняння сумісності деформацій має вигляд

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} . \tag{13}$$

Тут використано позначення, прийняті у монографіях [3, 4, 14].

Вводячи функцію зусиль за формулами

$$T_x = h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \qquad T_y = h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \qquad S = -h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \tag{14}$$

одержимо нелінійні рівняння відносно прогину w і функції зусиль Φ :

$$D_{11} * \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) * \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} * \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} -$$

$$- L(\Phi, w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \tilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \bar{q}(x, y, t) = 0 ,$$

$$A_{11} * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (-2A_{12} + A_{66}) * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22} * \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} +$$

$$+ \frac{1}{2} L(w, w) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varepsilon_0 = 0 , \tag{15}$$

де

$$L(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} ,$$

$$A_{11} = \frac{C_{22}}{\Delta}, \qquad A_{22} = \frac{C_{11}}{\Delta}, \qquad A_{66} = \frac{1}{C_{66}}, \qquad A_{12} = \frac{C_{12}}{\Delta} ,$$

$$\varepsilon_0 = \frac{C_{22} - C_{12}}{\Delta}\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{C_{11} - C_{12}}{\Delta}\frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}, \qquad \Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 . \tag{16}$$

3. Рівняння енергії. Вважаємо, що в'язкість і геометрична нелінійність мають однаковий кількісний вплив. Приймаючи температуру постійною по товщині панелі, матимемо таке рівняння енергії [9, 10]:

$$\bar{\lambda}_{11}\theta_{,xx} + \bar{\lambda}_{22}\theta_{,yy} - \frac{2\delta}{h}\theta + \frac{W}{h} = 0\,, \tag{17}$$

де $\bar{\lambda}_{11,22} = \sum_k \lambda_{11,22}^{(k)} \frac{h_k}{h}$ – усереднені по всіх шарах панелі коефіцієнти теплопровідності; h – сумарна товщина панелі; $\theta = T - T_0$, $\delta = (\alpha_3 + \alpha_4)/2$, $T_0 = (\alpha_3\theta_3 + \alpha_4\theta_4)/(\alpha_3 + \alpha_4)$; α_3, α_4 – коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm h/2$ контакту з зовнішнім середовищем із температурами θ_3, θ_4; $\lambda_{ij}^{(k)}$ – коефіцієнти теплопровідності шарів. У рівнянні (17) дисипативна функція W визначається за формулою [9, 10]

$$W = \frac{\omega}{2}\Big[\left(T_1''\varepsilon_1' - T_1'\varepsilon_1''\right) + \left(T_2''\varepsilon_2' - T_2'\varepsilon_2''\right) + 2\left(S''\varepsilon_{12}'' - S'\varepsilon_{12}''\right) +$$

$$+ \left(M_1''æ_1' - M_1'æ_1'\right) + \left(M_2''æ_2' - M_2'æ_2''\right) + 2\left(H_1''æ_{12}' - H_1'æ_{12}''\right)\Big]. \tag{18}$$

4. Аналітичний розв'язок задачі механіки для тришарової панелі з ізотропного пасивного матеріалу. Для прикладу розглянемо тришарову панель, яка складається з середнього ізотропного пасивного шару та двох активних протилежно поляризованих шарів. Ці активні шари можуть бути розміщені плямами на поверхнях пластини або покривати їх повністю. На панель діє рівномірний поверхневий тиск, який змінюється за гармонічним у часі законом. Торці пластини шарнірно оперті. Тоді задача електромеханіки зводиться до розв'язування такої системи інтегро-диференціальних рівнянь:

$$D * \Delta\Delta w - L(\Phi, w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \tilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \bar{q}(x, y, t) - \Delta M_0 = 0\,,$$

$$\Delta\Delta\Phi + \frac{1}{2}L(w, w) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,. \tag{19}$$

Тут

$$M_0 = \frac{1}{2}\gamma_{31}(h_0 + h_1)V_A\,, \qquad \gamma_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}(1-\nu)}\,, \qquad \nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}\,,$$

де V_A – підведена до актуатора різниця потенціалів, а позначення електромеханічних характеристик такі, як у монографіях [5, 8, 9].

Введемо безрозмірні величини з рискою

$$x = a\bar{x}, \qquad y = a\bar{y}, \qquad p = E_0\bar{p}\,h^7\frac{1}{a^7}\,, \qquad M_0 = E_0 h^7 \bar{M}_0\frac{1}{a^5}\,,$$

$$\Phi = E_0 h^5\bar{\Phi}\frac{1}{a^2}\,, \qquad w = h^2\bar{w}\frac{1}{a}\,, \qquad t = \bar{t}a^2\sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{D}}\,. \tag{20}$$

При цьому оператор E запишеться у вигляді

$$E* = E_0\bar{E}*\,, \qquad \bar{E}*f = f - \int_{-\infty}^{t} E_1(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\,. \tag{21}$$

Тоді система інтегро-диференціальних рівнянь у безрозмірній формі прийме вигляд (риску над безрозмірними величинами опускаємо):

$$D * \Delta\Delta w - \varepsilon L(\Phi, w) - 12(1-\nu^2)\frac{a}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varepsilon\left(\bar{q}(x, y, t) + \Delta M_0\right),$$

$$\Delta\Delta\Phi + \frac{1}{2}E * L(w, w) + \left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{a}{R}E * \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,. \tag{22}$$

Розв'язок задачі для панелі з шарнірно опертими торцями будемо шукати у загальноприйнятому для такого типу граничних умов вигляді:

$$w = w_{mns}(t)\sin k_m x \sin p_n y, \qquad \Phi = \Phi_{mns}(t)\sin k_m x \sin p_n y\,,$$

$$q = q_{mns}(t)\sin k_m x \sin p_n y, \qquad M_0 = M_{mns}(t)\sin k_m x \sin p_n y\,. \tag{23}$$

Для знаходження коефіцієнтів $w_{mn}(t)$, $\Phi_{mn}(t)$ використаємо метод Бубнова – Гальоркіна [3, 14]. Після громіздких викладок одержимо таке інтегро-диференціальне рівняння для $w_{mn}(t)$:

$$\ddot{w}_{mn} + a_{mn}E * w_{mn} + b_{mn}E * w_{mn} + c_{mn}(E * w_{mn}^2)w_{mn} +$$

$$+ d_{mn}E * w_{mn}^2 + e_{mn}w_{mn}E * w_{mn} = \varepsilon q_{mn}\,, \tag{24}$$

де

$$a_{mn} = (k_m^2 + p_n^2)^2, \qquad b_{mn} = 12(1-\nu^2)\left(\frac{a}{R}\right)^2\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{k_m^4}{(k_m^2 + p_n^2)^2}\,,$$

$$\varepsilon = \frac{12(1-\nu^2)h^2}{a^2}, \qquad c_{mn} = \frac{521\varepsilon}{9\bar{b}^2}\frac{k_m^2 p_n^2}{(k_m^2 + p_n^2)^2}\,,$$

$$d_{mn} = -\frac{64(1-\nu^2)}{\bar{b}}\left(\frac{a}{R}\right)\frac{k_m^3 p_n}{(k_m^2 + p_n^2)^2}\,,$$

$$e_{mn} = -\frac{32\varepsilon}{3\bar{b}}\left(\frac{a}{R}\right)\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{k_m^3 p_n}{(k_m^2 + p_n^2)^2}\,.$$

При цьому функція зусиль $\Phi_{mn}(t)$ визначається за формулою

$$\Phi_{mn} = \left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{a}{R}\right)\frac{k_m^2}{(k_m^2 + p_n^2)^2}(E * w_{mn}) - \frac{16k_m p_n}{3\bar{b}(k_m^2 + p_n^2)^2}(E * w_{mn}^2)\,.$$

Враховуючи припущення про однаковий порядок впливу геометричної нелінійності та в'язкості, можемо замінити величину $(E * w_{mn}^2)$ на (Ew_{mn}^2).

Для розв'язування нелінійного інтегро-диференціального рівняння (24) застосуємо метод гармонічного балансу [2]. Відповідно до цього методу вираз $E * w_{mn} = w_{mn} - \int\limits_{-\infty}^{t} E_1(t-\tau)w_{mn}(\tau)\,d\tau$ замінимо виразом $Aw_{mn} + B\dot{w}_{mn}$. При цьому величини A і B виражаються через складові комплексного модуля $E = E' + iE''$ за формулами

$$A = E' = 1 - E_{1C}, \qquad B = \frac{E''}{\omega_{mn}} = \frac{E_{1S}}{\omega_{mn}}\,.$$

Тут E_{1C}, E_{1S} – $\cos$ - і $\sin$ -перетворення Фур'є ядра $E_1(t)$, тобто

$$E_{1C} = \int\limits_0^{\infty} E_1(t)\cos\omega t\,dt, \qquad E_{1S} = \int\limits_0^{\infty} E_1(t)\sin\omega t\,dt\,.$$

Тоді інтегро-диференціальне рівняння (24) стає нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку:

$$\ddot{w} + \delta\dot{w} + \omega_0^2 w + \beta_1 w^2 + \beta_2 w^3 = \varepsilon q(t) = F_0\cos\omega t\,. \tag{25}$$

Тут пропущено індекси біля букв, а безрозмірні коефіцієнти знаходимо за формулами

$$\delta = (a_{mn} + b_{mn})B, \qquad \omega_0^2 = (a_{mn} + b_{mn})A,$$

$$\beta_1 = d_{mn} + e_{mn}, \qquad \beta_2 = c_{mn}. \tag{26}$$

У розмірній формі ці коефіцієнти мають такий вигляд:

$$\delta = \left[\frac{(k_m^2 + p_n^2)^2 h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{1}{a}\left(\frac{h}{a}\right)\left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{k_{mn}^4}{(k_m^2 + p_n^2)^2}\right]\frac{B}{\tilde{\rho}},$$

$$\omega_0^2 = \left[\frac{(k_m^2 + p_n^2)^2 h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{1}{a}\left(\frac{h}{a}\right)\left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{k_{mn}^4}{(k_m^2 + p_n^2)^2}\right]\frac{A}{\tilde{\rho}},$$

$$\beta_1 = -\frac{32}{9}\frac{k_m^3 p_n a h E}{\tilde{\rho}(k_m^2 + p_n^2)^2 R b}, \qquad \beta_2 = \frac{512}{9}\frac{k_m^2 p_n^2 h E}{\tilde{\rho}(k_m^2 + p_n^2)^2 a^2 b^2},$$

$$\varepsilon q(t) = \frac{q_{mn} - (k_m^2 + p_n^2)M_{mn}}{\tilde{\rho}}. \tag{27}$$

У рівнянні (25) зробимо заміну змінних

$$\tau = \omega_0 t, \qquad D = \frac{\delta}{\omega_0}, \qquad \mu_1 = \beta_1 \frac{x_0}{\omega_0^2}, \qquad \mu_2 = \beta_2 \frac{x_0^2}{\omega_0^2},$$

$$x_0 = \frac{F_0}{\omega_0^2}, \qquad \eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \qquad y = \frac{w}{x_0}.$$

Тоді рівняння (25) набуде вигляду

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + D\frac{dy}{d\tau} + y + \mu_1 y^2 + \mu_2 y^3 = \cos\eta\tau. \tag{28}$$

Відповідно до методу гармонічного балансу [2] розв'язок рівняння (28) подамо як

$$y = a\cos\eta\tau + b\sin\eta\tau + Z. \tag{29}$$

Для визначення параметрів a, b, Z до рівняння (28) застосуємо метод Бубнова – Гальоркіна. В результаті прийдемо до системи трьох нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$a(1-\eta^2) + Db\eta + \mu_1(2aZ) + \mu_2\left(\frac{3}{4}a^3 + \frac{3}{4}ab^2 + 3aZ^2\right) = 1,$$

$$b(1-\eta^2) - Db\eta + \mu_1(2bZ) + \mu_2\left(\frac{3}{4}b^3 + \frac{3}{4}a^2 b + 3bZ^2\right) = 0, \tag{30}$$

$$Z + \mu_1\left(\frac{1}{2}r^2 + Z^2\right) + \mu_2\left(\frac{3}{2}r^2 Z + Z^3\right) = 0, \tag{31}$$

де $r^2 = X = a^2 + b^2$ – квадрат амплітуди поперечних коливань.

З рівняння (31) матимемо

$$X = -2\frac{\mu_2 Z^3 + \mu_1 Z^2 + Z}{3\mu_2 Z + \mu_1}. \tag{32}$$

З рівнянь (30) одержуємо рівняння для амплітуди коливань

$$\frac{8}{6}\mu_2^2 X^3 + \left[\frac{9}{2}\mu_2^2 Z^2 + 3\mu_1\mu_2 Z + \frac{3}{2}\mu_2(1-\eta^2)\right]X^2 + \{9\mu_2^2 Z^4 + 12\mu_1\mu_2 Z^3 +$$

$$+ [4\mu_1^2 + 6\mu_2(1-\eta^2)]Z^2 + 4\mu_{12}(1-\eta^2)Z +$$

$$+ (1-\eta^2)^2 + (D\eta)^2\}X - 1 = 0. \tag{33}$$

Підставляючи (32) в (33), приходимо до одного нелінійного алгебраїчного рівняння відносно Z:

$$\sum_{i=0}^{9} a_i Z^i = 0. \tag{34}$$

Тут введено такі позначення:

$$a_0 = 2\mu_1^3, \qquad a_1 = 18\mu_1^2\mu_2 + 4\mu_1^2\Delta,$$

$$a_2 = 54\mu_1^2\mu_2 + (16\mu_1^3 - 12\mu_1\mu_2)(1-\eta^2) + 4\Delta(\mu_1^3 + 6\mu_1\mu_2),$$

$$a_3 = 9\mu_2^2 - 24\mu_1^2\mu_2 + 4\Delta(9\mu_2^2 + 7\mu_1^2\mu_2) +$$

$$+ (-36\mu_2^2 + 16\mu_1^4 + 72\mu_1^2\mu_2)(1-\eta^2) + 54\mu_2^3 + 16\mu_1^4,$$

$$a_4 = -81\mu_1\mu_2^2 + 60\mu_1\mu_2^2\Delta + (124\mu_1^3\mu_2 + 192\mu_1\mu_2^2)(1-\eta^2) + 96\mu_1^3\mu_2 + 16\mu_2^5,$$

$$a_6 = 270\mu_1\mu_2^3 + 420\mu_1\mu_2^3(1-\eta^2) + 465\mu_1^3\mu_2,$$

$$a_7 = 135\mu_2^4 + 795\mu_1^2\mu_2^3 + 180\mu_2^4(1-\eta^2),$$

$$a_8 = 675\mu_1\mu_2^4, \qquad a_9 = 225\mu_2^5.$$

Розв'язок рівняння (34) дає величину асиметрії поперечних коливань панелі.

Підставляючи знайдені корені рівняння (34) у рівняння (33), знайдемо шляхом розв'язування кубічного рівняння амплітуду коливань.

Рівняння (31) можна подати у вигляді

$$Z = -\mu_1 \frac{Z^2 + \frac{1}{2}X}{\mu_2 Z^2 + \left(1 + \frac{3}{2}\mu_2 X\right)}.$$

Звідси випливає, що при $\mu_1 > 0$ дійсні корені рівняння (34) повинні бути від'ємними, а при $\mu_1 < 0$ – додатними, оскільки завжди $\mu_2 > 0$. З цього ж рівняння видно, що при $\mu_1 = 0$ маємо $Z = 0$.

Таким чином, при відсутності асиметрії задача зводиться до розв'язання кубічного рівняння (33), в якому слід покласти $Z = 0$.

При $\mu_2 = 0$ з рівняння (34) матимемо квадратне рівняння

$$X^2 - \frac{1-\eta^2}{\mu_1^2}X + \frac{\Delta^2 + 4\eta^2\Delta}{4\mu_1^4} = 0.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X = \frac{1}{2\mu_1^2}(1-\eta^2)(1\pm\eta)^2.$$

Звідси видно, що амплітудно-частотна характеристика буде м'якою незалежно від знаку μ_1.

Для розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (30), (31) можна також застосувати таку ітераційну процедуру: ***1***) в рівнянні (30) покладаємо $Z = Z_0 = 0$ і розв'язуємо кубічне рівняння, в результаті чого знаходимо корені X_0; ***2***) підставляємо знайдені X_0 в рівняння (31) і після розв'язання кубічного рівняння знаходимо перше наближення Z_1; підставляємо Z_1 в рівняння (30) і знаходимо перше наближення X_1 для амплітуди коливань. Потім процес повторюється до визначення амплітуди коливань і величини асиметрії з необхідною точністю. Результати розрахунків свідчать, що процес ітерацій збігається дуже швидко.

5. Скінченно-елементний розв'язок. Для розв'язування поставленої задачі було використано також метод скінченних елементів. Для цього спочатку розв'язували лінійні задачі на власні числа і власні форми коливань. Знайшовши відповідні власні частоти і форми коливань, розв'язували нелінійну варіаційну задачу. Нелінійний функціонал формально співпадає з функціоналом лінійної задачі [13], в якому деформації визначаються з урахуванням квадратичних членів. В результаті отримуємо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння типу (24), яке розв'язуємо вказаним вище методом гармонічного балансу. Результати аналітичного і чисельного методу достатньо добре узгоджуються між собою.

6. Розв'язок рівняння енергії. Розглянемо тепер рівняння енергії (17). При вказаному вище припущенні про однаковий порядок малості геометричної нелінійності і в'зкості у випадку шарнірно опертих торців циліндричної панелі дисипативна функція визначається формулою

$$W = \left[W_0 + W_1(\cos 2k_1x + \cos 2p_1y) + W_1(\cos 2k_1x \cos 2p_1y)\right]\left|w_{mn}\right|^2, \quad (35)$$

де

$$W_0 = W_{12} = \frac{\omega}{8}D''\left(k_{mn}^4 + p_{mn}^4 + 2\nu k_{mn}^2p_{mn}^2 + \frac{1-\nu}{2}k_{mn}^2p_{mn}^2\right) +$$
$$+ \frac{\omega hG''}{16(1+\nu)}f_0^2(k_{mn}^2 + p_{mn}^2)^2,$$

$$f_0^2 = \frac{2(1+\nu)k_{mn}^2}{R(k_{mn}^2 + p_{mn}^2)^2},$$

$$W_1 = W_{12} = \frac{\omega}{8}D''\left(k_{mn}^4 + p_{mn}^4 + 2\nu k_{mn}^2p_{mn}^2 - \frac{1-\nu}{2}k_{mn}^2p_{mn}^2\right) +$$
$$+ \frac{\omega hG''}{16(1+\nu)}f_0^2(k_{mn}^2 + p_{mn}^2)^2. \quad (36)$$

Розглянемо випадок теплоізольованих торців панелі, коли

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \qquad x = 0, \qquad x = a,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \qquad y = 0, \qquad y = b. \quad (37)$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$\theta = \left[\theta_0 - \theta_1\cos(2k_1x) - \theta_2\cos(2p_1y) +\right.$$
$$\left. + \theta_3\cos(2k_1x)\cos(2p_1y)\right]\left|w_{mn}\right|^2. \quad (38)$$

Цей вираз автоматично задовольняє граничні умови (37) при довільних θ_k, $k = 0,\ldots,3$.

Підставляючи (38) у рівняння енергії (17) з дисипативною функцією (35), одержимо такі вирази для коефіцієнтів:

$$\theta_0 = \frac{W_0}{\alpha}, \qquad \theta_1 = \frac{W_1}{\alpha + 4h\bar{\lambda}_{11}k_{mn}^2},$$

$$\theta_2 = \frac{W_1}{2\alpha + 4h\bar{\lambda}_{11}p_{mn}^2}, \qquad \theta_3 = \frac{W_2}{\alpha + 4h\bar{\lambda}_{11}(k_{mn}^2 + p_{mn}^2)}. \quad (39)$$

Одержаний вираз (38) дає можливість дослідити вплив дисипативного розігріву на активне демпфування коливань циліндричної панелі.

7. Аналіз розв'язку. З виразу для електромеханічного навантаження (27) і співвідношень (9), (10) для M_0 випливає, що для компенсації механічного зовнішнього навантаження до актуатора необхідно підвести різницю потенціалів

$$V_A = \frac{ab}{16f_1}\frac{k_m p_n p_{mn}}{(k_m^2 + p_n^2)}\frac{1}{\varphi(\xi,\eta,c,d)}, \tag{40}$$

де

$$\varphi(\xi,\eta,c,d) = (k_m^2 + p_n^2)\sin k_m\xi \sin p_n\eta \sin(k_m c/2)\sin(p_n d/2),$$

$$f_1 = \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}_{31}(h_1 + h_0)$$

або

$$f_1 = \frac{\overset{0}{\gamma}_{31}\, h_1(h_0 + h_1)\,\overset{0}{\gamma}_{33}}{h_0\,\overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1\,\overset{0}{\gamma}_{33}}$$

в залежності від наявності чи відсутності внутрішніх електродів, (ξ,η) – координати центра п'єзовключень, а c і d – їх розміри [11].

Якщо співвідношення (40) задовольняється, амплітуда вимушених резонансних коливань циліндричної панелі на відповідній моді стає рівною нулеві. Слід відмітити, що на співвідношення (40) геометрична нелінійність не впливає. Цей факт дозволяє досліджувати ефективність роботи актуаторів у рамках геометрично лінійної теорії.

Ефективність активного демпфування коливань панелі залежить від ефективності роботи актуатора. Якщо навантаження задано, то той актуатор працює ефективніше, до якого потрібно підвести меншу різницю потенціалів. Як видно зі співвідношення (40), ефективність роботи актуатора залежить від його розміщення та розмірів, які, в свою чергу, залежать від моди коливань. Аналіз впливу цих факторів зводиться до аналізу функції $\varphi(\xi,\eta,c,d)$ на екстремум. Такий аналіз для прямокутної пластини наведено в [10, 11]. Так, наприклад, для моди $m = 1$, $n = 1$ ефективність актуатора буде максимальною при повному покритті панелі п'єзошарами. Як видно з виразу (38), максимальна температура для цієї моди досягається в центрі панелі і дорівнює

$$\theta_{\max} = (\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3)|w_{11}|^2.$$

Як тільки температура дисипативного розігріву $\theta_{\max}$ досягає точки Кюрі θ_K, ефективність роботи п'єзоматеріалу різко падає, оскільки матеріал втрачає п'єзоефект і стає пасивним. При цьому має місце специфічний тип теплового руйнування, коли панель не розділяється на частини, але електромеханічна система перестає виконувати своє функціональне призначення і втрачається можливість керувати процесом коливань. Прирівнюючи $\theta_{\max}$ до температури Кюрі, одержимо критичне значення амплітуди коливань

$$|w_{\text{cr}}|^2 = \theta_K/\tilde\theta, \qquad \tilde\theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3.$$

Підставивши $X_{\text{cr}} = |w_{\text{cr}}|^2$ в рівняння (31), знаходимо Z_{cr}. Після підстановки X_{cr} і Z_{cr} в (33) знайдемо критичне значення механічного навантаження.

Оскільки температура пропорційна $|w|^2$, залежність $\theta_{\max}$ від частоти носить типовий для нелінійних систем характер з неоднозначностями в деякому діапазоні частот і зривами з однієї стійкої вітки на іншу. Коли в'язкість пасивного матеріалу збільшується, амплітудно- та температурночастотні характеристики наближаються до лінійних.

8. Висновки. Розв'язано задачу про активне демпфування вимушених резонансних коливань гнучкої шарнірно опертої циліндричної панелі з в'язкопружного пасивного матеріалу за допомогою п'єзоелектричних актуаторів. Панель навантажена гармонічним за часом рівномірним тиском. Враховується вплив дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування коливань панелі. Задача електромеханіки розв'язана за допомогою аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна та чисельного методу скінченних елементів. Для розв'язання одержаного цими методами інтегро-диференціального рівняння за часом застосовано метод гармонічного балансу. Задачу зведено до розв'язання алгебраїчного рівняння 9-го порядку. Показано, що результати аналітичного розв'язку добре узгоджуються з скінченно-елементним розв'язком. Досліджено вплив геометричних параметрів п'єзовключення, дисипації та температури на ефективність активного демпфування резонансних коливань циліндричної панелі.

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974. – 504 с.
3. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
4. *Григоренко Я. М., Крюков Н. Н.* Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.
5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.)
6. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – Москва: Наука, 1970. – 280 с.
7. *Карнаухов В. Г.* Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 6. – С. 30–70.
8. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
9. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 328 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 4.)
10. *Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В.* Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин при помощи распределенных пьезоэлектрических включений // Акуст. вісн. – 2002. – **5**, № 4. – С. 15–32.
11. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Житомир. інж.-технолог. ін-т, 2005. – 426 с.
12. *Карнаухов В., Козлов В., Карнаухова Т.* Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 48–68.
13. *Козлов В. І., Карнаухова Т. В., Пересунько М. В.* Чисельне моделювання активного демпфування вимушених термомеханічних резонансних коливань в'язкопружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних включень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 3. – С. 116–126.
14. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Вища шк., 1989. – 208 с.
15. *Методы расчета* оболочек: В 5 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1980–1982.
16. *Механика композитных* материалов и элементов конструкций: В 3 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1982–1983.
17. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – Москва: Наука, 1977. – 384 с.
18. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 2001. – 384 p.

19. *Gopinathan S., Varadan V. V., Varadan V. K.* A review and critique of theories for piezoelectric laminates // Smart Mater. Struct. – 2000. – **9**. – P. 24–48.
20. *Hamidzaden Hamid R., Jazar Reza N.* Vibrations of thick cylindrical structures. – New York: Springer, 2010. – 201 p.
21. *Karnaukhov V. G.* Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // J. Therm. Stresses. – 2005. – **28**, No. 6-7. – P. 783–815.
22. *Lazan B.* Damping of materials and members in structural mechanics. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1968. – 318 p.
23. *Lu X., Hanagud S. V.* Extended irreversible thermodynamics modeling for self-heating and dissipation in piezoelectric ceramics // IEEE Trans. on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. – 2004. – **31**, No. 12. – P. 1582–1592.
24. *Mauk L. D., Lynch C. S.* Thermo-electro-mechanical behavior of ferroelectric materials. Part I: Computational micromechanical model versus experimental results // J. Intelligent Mater. Systems and Struct. – 2003. – **14**. – P. 587–602.
25. *Rao S. S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Appl. Mech. Rev. – 1994. – **47**, No. 44. – P. 113–123.
26. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Appl. Mech Rev. – 1998. – **51**, No. 8. – P. 505–521.
27. *Tzou H. S.* Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 1993. – 400 p.
28. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 400 p.
29. *Weiland L. M., Lynch C. S.* Thermo-electro-mechanical behavior of ferroelectric materials. Part II: Introduction of rate and self-heating effects // J. Intelligent Mater. Systems and Struct. – 2003. – **14**. – P. 602–621.

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА НА АКТИВНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ПОМОЩИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АКТУАТОРОВ

Рассматривается задача о влиянии температуры диссипативного разогрева на активное демпфирование вынужденных резонансных колебаний гибких шарнирно опертых вязкоупругих цилиндрических панелей при помощи пьезоэлектрических актуаторов. Для решения нелинейной задачи использованы аналитический метод Бубнова – Галеркина и численный метод конечных элементов совместно с методом гармонического баланса. В обоих случаях задача сведена к нелинейным алгебраическим уравнениям, которые решаются численно. Приравнивая максимальную температуру диссипативного разогрева точке Кюри, найдено критическое значение параметра механического нагружения, после достижения которого управлять колебаниями панели становится невозможным из-за потери активным материалом пьезоэффекта.

INFLUENCE OF DISSIPATIVE HEATING ON ACTIVE DAMPING OF FORCED RESONANCE VIBRATIONS OF FLEXIBLE VISCOELASTIC CYLINDRICAL PANEL BY PIEZOELECTRIC ACTUATORS

The problem on influence of dissipative heating on active damping of the forced resonance vibrations of flexible simply supported viscoelastic cylindrical panels by piezoelectric actuators is considered. For solution of the non-linear problem the analytical Bubnov – Galerkin method and finite element method coupled with harmonic balance method are used. In both cases the problem is reduced to nonlinear algebraic equations which are solved by numerical method. By equating the maximum temperature of dissipative heating to Curie temperature the critical parameter of mechanical loading is obtained, after achievement of which the control of panel vibrations is unrealizable due to loss of piezoeffect by active material.

[1] Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,
[2] Нац. техн. ун-т України «КПІ», Київ

Одержано
06.01.11