УДК 539.3

О. О. Євтушенко[1,2], С. Ю. Пир'єв[1]

РОЗВ'ЯЗОК КВАЗІСТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ ІЗ ЛОКАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИМ НА ПОВЕРХНІ РУХОМИМ МЕХАНІЧНИМ І ТЕПЛОВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

За допомогою подвійного інтегрального перетворення Фур'є побудовано розв'язки просторових задач теорії пружності та термопружності для півпростору, на поверхню якого діє локально розподілене рухоме механічне та теплове навантаження. Отримані формули дозволяють знаходити переміщення та напруження у півпросторі для швидкості руху навантаження, меншої від швидкості руху хвилі Релея. У граничному випадку дії нерухомого навантаження отримані розв'язки співпадають із відомими.

1. Вступ. Граничні задачі лінійної теорії пружності та термопружності для півпростору, на поверхню якого в обмеженій області діє рухоме розподілене механічне та теплове навантаження, є модельними в трибології [3, 15], механіці контактної взаємодії [1, 5, 6], динаміці крихкого руйнування [20, 22] тощо.

Ці задачі можна умовно віднести до однієї із трьох груп. До першої входять задачі, в яких швидкість руху навантаження змінюється із часом. Рівносповільнений рух зосередженої сили, нормальної до поверхні півпростору, розглянуто у праці [24]. Аналіз динамічних ефектів при рівноприскореному русі зосередженої сили наведено в працях [12, 23].

Другу групу становлять нестаціонарні задачі про дію на поверхню півпростору навантаження, яке рухається із постійною швидкістю. У працях [4, 26, 27] показано, що при русі нормальної сили зі швидкістю хвилі Релея не існує усталеного розв'язку, оскільки напруження на границі півпростору збільшуються з часом. Нагрівання поверхні півпростору джерелом тепла, що рухається зі сталою швидкістю, досліджено у працях [11, 17].

До третьої групи відносяться квазістаціонарні задачі, в яких температурне поле та напружено-деформований стан півпростору досліджуються у ейлерівській системі координат, жорстко зв'язаній із геометричним центром рухомої області, в якій діє теплове або механічне навантаження [19]. Однією із перших праць в цій групі стала задача про рух із дозвуковою і надзвуковою швидкістю нормальної лінійної сили по поверхні пружного півпростору [25]. Розв'язок квазістаціонарної зв'язаної задачі термопружності для півпростору, по поверхні якого рухаються зі сталою швидкістю зосереджені нормальна і дотична сили та потік тепла, побудовано у праці [30] за допомогою перетворення Радона. Знайдено переміщення точок поверхні для різних співвідношень між швидкістю руху потоку тепла та швидкістю хвилі Релея, швидкістю поздовжньої і поперечної хвиль. Вплив форми області рухомого фрикційного (механічного і теплового) навантаження на напружений стан півпростору досліджено у праці [28]. Двовимірні температура і напруження у півпросторі, зумовлені дією рухомого лінійного навантаження (теплового і механічного), досліджувались у працях [8, 14, 21, 29]. Нагрівання однорідного та кусково-однорідного півпростору рухомим тепловим потоком, заданим у круговій області на його поверхні, досліджено відповідно у працях [31, 7]. Чисельний аналіз температури та напружень на основі розв'язку просторових задач теорії пружності, квазістаціонарної теплопровідності та статичної термопружності проведено у працях [9, 10]. Методику побудови цього розв'язку пропонуємо у цьому повідомленні.

2. Задача теорії пружності з урахуванням інерційних складових. Розглянемо граничну задачу лінійної теорії пружності для однорідного ізотропного півпростору:

$$\mu\Delta\mathbf{u}^{(e)} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}^{(e)} - \rho_0 V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(e)}}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad z > 0\,, \tag{1}$$

$$\sigma_{zm}(x,y,0) = \begin{cases} -p_m(x,y), & (x,y)\in\Omega, \quad m = x \vee y \vee z, \\ 0, & (x,y)\notin\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

$$\mathbf{u}^{(e)}(x,y,z) \to 0, \qquad -\infty < x,y < \infty, \qquad z\to\infty\,, \tag{3}$$

де $Oxyz$ – прямокутна система координат із початком в геометричному центрі навантаженої області Ω, що рухається зі сталою швидкістю V по поверхні півпростору у від'ємному напрямку осі Ox (рис. 1); λ, μ – коефіцієнти Ляме; ρ_0 – густина матеріалу півпростору; $p_x(x,y)$, $p_y(x,y)$, $p_z(x,y)$, $(x,y)\in\Omega$, – задані функції; Δ – оператор Лапласа. Компоненти тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \left(\sigma_{xx}^{(e)}, \sigma_{yy}^{(e)}, \sigma_{zz}^{(e)}, \sigma_{xy}^{(e)}, \sigma_{zx}^{(e)}, \sigma_{zy}^{(e)}\right)$ пов'язані із складовими вектора переміщень $\mathbf{u}^{(e)} = [u_x^{(e)}, u_y^{(e)}, u_z^{(e)}]$ за допомогою співвідношень закону Гука [19]

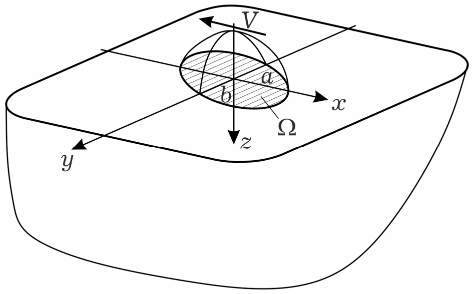

Рис. 1

$$\sigma_{xx}^{(e)} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x^{(e)}}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u_y^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial u_z^{(e)}}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_{yy}^{(e)} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_y^{(e)}}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u_z^{(e)}}{\partial z} + \frac{\partial u_x^{(e)}}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_{zz}^{(e)} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z^{(e)}}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u_x^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(e)}}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_{xy}^{(e)} = \mu\left(\frac{\partial u_x^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(e)}}{\partial x}\right), \qquad \sigma_{yz}^{(e)} = \mu\left(\frac{\partial u_y^{(e)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(e)}}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_{zx}^{(e)} = \mu\left(\frac{\partial u_z^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(e)}}{\partial z}\right). \tag{4}$$

Граничну задачу теорії пружності (1)–(3) сформульовано у квазістаціонарній постановці – вважаємо, що швидкість зміни складових векторного поля навантаження $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]$ є меншою від швидкості хвилі Релея.

Застосувавши до рівнянь рівноваги в переміщеннях (1) подвійне інтегральне перетворення Фур'є за змінними x і y [2]

$$\overline{\mathbf{u}}(\xi,\eta,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(x,y,z)e^{i(\xi x+\eta y)}\,dx\,dy\,, \tag{5}$$

отримуємо

$$\left[(M_2^2 - M_{21})\xi^2 - \eta^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right]\overline{u}_x^{(e)} + (1-M_{21})\xi\eta\overline{u}_y^{(e)} - i\xi(M_{21}-1)\frac{d\overline{u}_z^{(e)}}{dz} = 0\,,$$

$$(1-M_{21})\xi\eta\overline{u}_x^{(e)} + \left[(M_2^2 - 1)\xi^2 - M_{21}\eta^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right]\overline{u}_y^{(e)} - i\eta(M_{21}-1)\frac{d\overline{u}_z^{(e)}}{dz} = 0\,,$$

$$i(1-M_{21})\frac{d}{dz}(\xi\bar{u}_x^{(e)}+\eta\bar{u}_y^{(e)})+\left[(M_2^2-1)\xi^2-\eta^2+M_{21}\frac{d^2}{dz^2}\right]\bar{u}_z^{(e)}=0\,. \qquad (6)$$

Загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (6), що задовольняє умову згасання на нескінченості (3), має вигляд

$$\bar{u}_x^{(e)}(\xi,\eta,z)=\left[i\xi C_1^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_1z}+n_2C_2^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_2z}\right]\left[2F^{(e)}(\xi,\eta)\right]^{-1},$$

$$\bar{u}_y^{(e)}(\xi,\eta,z)=\left[i\eta C_1^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_1z}+n_2C_3^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_2z}\right]\left[2F^{(e)}(\xi,\eta)\right]^{-1},$$

$$\bar{u}_z^{(e)}(\xi,\eta,z)=\{n_1C_1^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_1z}-i[\xi C_2^{(e)}(\xi,\eta)+$$
$$+\eta C_3^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_2z}]\}\left[2F^{(e)}(\xi,\eta)\right]^{-1}, \qquad (7)$$

де

$$n_k\equiv n_k(\xi,\eta)=\sqrt{\rho^2-(M_k\xi)^2},\qquad k=1,2,\qquad \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,, \qquad (8)$$

$$M_1=\frac{V}{c_1},\;\; M_2=\frac{V}{c_2},\;\; M_{21}=\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2=2+\frac{\lambda}{\mu},\;\; c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}},\;\; c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}\,, \qquad (9)$$

$$F^{(e)}(\xi,\eta)=[I(\xi,\eta)]^2-n_1n_2\rho^2,\qquad I(\xi,\eta)=\rho^2-0.5(M_2\xi)^2. \qquad (10)$$

Зазначимо, що кожна із функцій $n_k\equiv n_k(\xi,\eta)$, $k=1,2$, (8) має на уявній осі площини комплексної змінної ξ по дві точки галуження $\xi_k^{\pm}=\dfrac{\pm i|\eta|}{1-M_k^2}$, $k=1,2$. Підставивши співвідношення (7)–(10) у залежності (4), знаходимо трансформанти Фур'є напружень:

$$\bar{\sigma}_{xx}^{(e)}(\xi,\eta,z)=\mu[\xi^2(M_2^2-2M_1^2+2)C_1^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_1z}-$$
$$-2in_2\xi C_2^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_2z}]\left[2F^{(e)}(\xi,\eta)\right]^{-1},$$

$$\bar{\sigma}_{yy}^{(e)}(\xi,\eta,z)=\mu\{[(M_2^2-2M_1^2)\xi^2+2\eta^2]C_1^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_1z}-$$
$$-2in_2\eta C_3^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_2z}\}\left[2F^{(e)}(\xi,\eta)\right]^{-1},$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(e)}(\xi,\eta,z)=-\mu\{2I(\xi,\eta)C_1^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_1z}-2in_2[\xi C_2^{(e)}(\xi,\eta)+$$
$$+\eta C_3^{(e)}(\xi,\eta)]e^{-n_2z}\}\left[2F^{(e)}(\xi,\eta)\right]^{-1},$$

$$\bar{\sigma}_{xy}^{(e)}(\xi,\eta,z)=\mu\{2\xi\eta C_1^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_1z}-in_2[\eta C_2^{(e)}(\xi,\eta)+$$
$$+\xi C_3^{(e)}(\xi,\eta)]e^{-n_2z}\}\left[2F^{(e)}(\xi,\eta)\right]^{-1},$$

$$\bar{\sigma}_{zx}^{(e)}(\xi,\eta,z)=-\mu\{2in_1\xi C_1^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_1z}+[(2I(\xi,\eta)-\eta^2)C_2^{(e)}(\xi,\eta)+$$
$$+\xi\eta C_3^{(e)}(\xi,\eta)]e^{-n_2z}\}\left[2F^{(e)}(\xi,\eta)\right]^{-1},$$

$$\bar{\sigma}_{zy}^{(e)}(\xi,\eta,z)=-\mu\{2in_1\eta C_1^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_1z}+[\xi\eta C_2^{(e)}(\xi,\eta)+$$
$$+(2I(\xi,\eta)-\xi^2)C_3^{(e)}(\xi,\eta)]e^{-n_2z}\}\left[2F^{(e)}(\xi,\eta)\right]^{-1}, \qquad (11)$$

де функція $F^{(e)}(\xi,\eta)$ має вигляд (10). На основі співвідношень (11) із граничних умов (2) отримуємо

$$2i\xi n_1C_1^{(e)}(\xi,\eta)+(n_2^2+\xi^2)C_2^{(e)}(\xi,\eta)+\xi\eta C_3^{(e)}(\xi,\eta)=\frac{2}{\mu}F^{(e)}(\xi,\eta)\bar{p}_x(\xi,\eta)\,,$$

$$2i\eta n_1 C_1^{(e)}(\xi,\eta) + \xi\eta C_2^{(e)}(\xi,\eta) - (n_2^2 + \eta^2)C_3^{(e)}(\xi,\eta) = \frac{2}{\mu}F^{(e)}(\xi,\eta)\overline{p}_y(\xi,\eta)\,,$$

$$(n_2^2 + \xi^2 + \eta^2)C_1^{(e)}(\xi,\eta) - 2in_2[\xi C_2^{(e)}(\xi,\eta) + \eta C_3^{(e)}(\xi,\eta)] = \frac{2}{\mu}F^{(e)}(\xi,\eta)\overline{p}_z(\xi,\eta)\,, \tag{12}$$

де

$$\overline{p}_m(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} p_m(x,y)e^{i(\xi x+\eta y)}\,dx\,dy, \quad m = x \vee y \vee z, \quad (x,y)\in\Omega\,. \tag{13}$$

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (12) має вигляд

$$\mu C_1^{(e)}(\xi,\eta) = in_2[\xi\overline{p}_x(\xi,\eta) + \eta\overline{p}_y(\xi,\eta)] + I(\xi,\eta)\overline{p}_z(\xi,\eta)\,,$$

$$\mu C_2^{(e)}(\xi,\eta) = [I(\xi,\eta) + \eta^2 J(\xi,\eta)]\overline{p}_x(\xi,\eta) - \xi\eta J(\xi,\eta)\overline{p}_y(\xi,\eta) - in_1\xi\overline{p}_z(\xi,\eta)\,,$$

$$\mu C_3^{(e)}(\xi,\eta) = -\xi\eta J(\xi,\eta)\overline{p}_x(\xi,\eta) + [I(\xi,\eta) + \xi^2 J(\xi,\eta)]\,\overline{p}_y(\xi,\eta) - in_1\eta\overline{p}_z(\xi,\eta)\,, \tag{14}$$

де $J(\xi,\eta) = [I(\xi,\eta) - 2n_1 n_2]\dfrac{1}{n_2^2}$, а функцію $I(\xi,\eta)$ обчислюємо за формулою (10). Підставивши функції $C_k^{(e)}(\xi,\eta)$, $k = 1,2,3$, (14) у співвідношення (7), (11), отримаємо трансформанти Фур'є переміщень і напружень у півпросторі.

3. Квазістаціонарна задача теплопровідності. Нехай поверхня півпростору в області Ω (рис. 1), що рухається зі сталою швидкістю V у від'ємному напрямку осі Ox (рис. 1), нагрівається тепловим потоком інтенсивності q. Якщо рух відбувається достатньо довго для того, щоб температура T у півпросторі досягла усталеного стану, то для знаходження температурного поля маємо квазістаціонарну граничну задачу теплопровідності

$$\Delta T = \frac{V}{k}\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad -\infty < x,y < \infty, \quad z > 0\,, \tag{15}$$

$$K\left.\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -q(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega\,, \tag{16}$$

$$T(x,y,z)\big|_{z\to\infty} \to 0, \qquad -\infty < x,y < \infty\,, \tag{17}$$

де K, k – коефіцієнти тепло- і температуропровідності відповідно. Розв'язок задачі (15)–(17) має вигляд

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{T}(\xi,\eta,z)e^{-i(\xi x+\eta y)}\,d\xi\,d\eta, \quad -\infty < x,y < \infty, \quad z > 0\,, \tag{18}$$

$$\overline{T}(\xi,\eta,z) = \frac{\overline{q}(\xi,\eta)}{K}\frac{e^{-n_3 z}}{n_3}\,, \tag{19}$$

$$\overline{q}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} q(x,y)e^{i(\xi x+\eta y)}\,dx\,dy, \qquad (x,y)\in\Omega\,, \tag{20}$$

де функція $n_3 \equiv n_3(\xi,\eta) = \sqrt{\rho^2 - in}$, $n = V\xi/k$, має на уявній осі площини комплексної змінної ξ дві точки галуження

$$\xi^{\pm} = i\left(\frac{V}{2k} \pm \sqrt{\frac{V^2}{4k^2} + \eta^2}\right),$$

причому точка ξ^+ завжди лежить у верхній, а ξ^- – у нижній півплощині і при $\eta = 0$ виходить у точку $\xi = 0$. Інтегрування в оберненому інтегральному перетворенні Фур'є за ξ у співвідношенні (18) виконуємо вздовж дійсної осі, обходячи при $\eta = 0$ точку $\xi = 0$ зверху.

4. Задача термопружності із урахуванням інерційних складових. Напруження у півпросторі, зумовлені температурним полем (18)–(20), знайдемо із розв'язку граничної задачі лінійної незв'язної термопружності [13]

$$\mu\Delta\mathbf{u}^{(\text{th})} + (\lambda + \mu)\,\text{grad}\,\text{div}\,\mathbf{u}^{(\text{th})} - \rho_0 V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(\text{th})}}{\partial x^2} = \gamma\,\text{grad}\,T\,,$$
$$-\infty < x, y < \infty, \quad z > 0\,, \tag{21}$$

$$\sigma_{zx}^{(\text{th})}(x,y,0) = \sigma_{zy}^{(\text{th})}(x,y,0) = \sigma_{zz}^{(\text{th})}(x,y,0) = 0, \quad -\infty < x,y < \infty\,, \tag{22}$$

де $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$, α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення, а температурні переміщення $\mathbf{u}^{(\text{th})} = \left[u_x^{(\text{th})}, u_y^{(\text{th})}, u_z^{(\text{th})}\right]$ зв'язані із термічними напруженнями $\boldsymbol{\sigma}^{(\text{th})} = \left(\sigma_{xx}^{(\text{th})}, \sigma_{yy}^{(\text{th})}, \sigma_{zz}^{(\text{th})}, \sigma_{xy}^{(\text{th})}, \sigma_{zx}^{(\text{th})}, \sigma_{zy}^{(\text{th})}\right)$ за допомогою співвідношень Дюамеля – Неймана, які відрізняються від фізичних співвідношень (4) наявністю у правих частинах перших трьох із них додаткових величин $(-\gamma T)$.

Система диференціальних рівнянь в частинних похідних (21) у просторі подвійного інтегрального перетворення Фур'є (5) має вигляд

$$\left[(M_2^2 - M_{21})\xi^2 - \eta^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right]\bar{u}_x^{(\text{th})} + (1 - M_{21})\xi\eta\bar{u}_y^{(\text{th})} -$$
$$- i\xi(M_{21} - 1)\frac{d\bar{u}_z^{(\text{th})}}{dz} = -i\xi\alpha\bar{T}\,,$$
$$(1 - M_{21})\xi\eta\bar{u}_x^{(\text{th})} + \left[(M_2^2 - 1)\xi^2 - M_{21}\eta^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right]\bar{u}_y^{(\text{th})} -$$
$$- i\eta(M_{21} - 1)\frac{d\bar{u}_z^{(\text{th})}}{dz} = -i\eta\alpha\bar{T}\,,$$
$$i(1 - M_{21})\frac{d}{dz}\left(\xi\bar{u}_x^{(\text{th})} + \eta\bar{u}_y^{(\text{th})}\right) + \left[(M_2^2 - 1)\xi^2 - \eta^2 + M_{21}\frac{d^2}{dz^2}\right]\bar{u}_z^{(\text{th})} = \alpha\frac{d\bar{T}}{dz}\,, \tag{23}$$

де $\alpha = \gamma/\mu$. Розв'язок неоднорідної системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь (23), що задовольняє однорідні граничні умови (22), має вигляд

$$\bar{u}_x^{(\text{th})}(\xi,\eta,z) = iF^{(\text{th})}(\xi,\eta)\left[\xi C_1^{(\text{th})}(\xi,\eta)e^{-n_1 z} + \right.$$
$$\left. + n_2 C_2^{(\text{th})}(\xi,\eta)e^{-n_2 z} - \xi F^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_3 z}\right],$$
$$\bar{u}_y^{(\text{th})}(\xi,\eta) = iF^{(\text{th})}(\xi,\eta)\left[\eta C_1^{(\text{th})}(\xi,\eta)e^{-n_1 z} + \right.$$
$$\left. + n_2 C_3^{(\text{th})}(\xi,\eta)e^{-n_2 z} - \eta F^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_3 z}\right],$$
$$\bar{u}_z^{(\text{th})}(\xi,\eta) = F^{(\text{th})}(\xi,\eta)\left\{n_1 C_1^{(\text{th})}(\xi,\eta)e^{-n_1 z} + \left[\xi C_2^{(\text{th})}(\xi,\eta) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \eta C_3^{(\text{th})}(\xi,\eta)\right]e^{-n_2 z} - n_3 F^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_3 z}\right\}, \tag{24}$$

де

$$F^{(\text{th})}(\xi,\eta) = \frac{\alpha\bar{q}(\xi,\eta)}{KM_{21}n_3(\xi^2 M_1^2 - in)F^{(e)}(\xi,\eta)}\,, \tag{25}$$

$$C_1^{(\text{th})}(\xi,\eta) = [I(\xi,\eta)]^2 - n_2 n_3\rho^2, \qquad C_2^{(\text{th})}(\xi,\eta) = (n_3 - n_1)\xi I(\xi,\eta)\,,$$

$$C_3^{(\text{th})}(\xi,\eta) = (n_3 - n_1)\eta I(\xi,\eta)\,. \tag{26}$$

За відомими переміщеннями (24)–(26) із співвідношень Дюамеля – Неймана знаходимо трансформанти Фур'є термічних напружень:

$$\bar{\sigma}_{xx}^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z) = F^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)\{[2+(M_{21}-2)M_1^2]\xi^2 C_1^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)e^{-n_1 z} +$$

$$+ 2n_2\xi C_2^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)e^{-n_2 z} - [M_2^2\xi^2 + 2(\xi^2 - in)]F^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_3 z}\},$$

$$\bar{\sigma}_{yy}^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z) = F^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)\{[2\eta^2 + \xi^2(M_{21}-2)M_1^2]C_1^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)e^{-n_1 z} +$$

$$+ 2n_2\eta C_3^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)e^{-n_2 z} - [M_2^2\xi^2 + 2(\eta^2 - in)]F^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_3 z}\},$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z) = -F^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)\{(\rho^2 + n_2^2)C_1^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)e^{-n_1 z} + 2n_2[\xi C_2^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta) +$$

$$+ \eta C_3^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)]e^{-n_2 z} - (\rho^2 + n_2^2)F^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_3 z}\},$$

$$\bar{\sigma}_{xy}^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z) = F^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)\{2\xi\eta C_1^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)e^{-n_1 z} + n_2[\eta C_2^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta) +$$

$$+ \xi C_3^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)]e^{-n_2 z} - 2\xi\eta F^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_3 z}\},$$

$$\bar{\sigma}_{zx}^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z) = -iF^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)\{2n_1\xi C_1^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)e^{-n_1 z} + [(\xi^2 + n_2^2)C_2^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta) +$$

$$+ \xi\eta C_3^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)]e^{-n_2 z} - 2n_3\xi F^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_3 z}\},$$

$$\bar{\sigma}_{zy}^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z) = -iF^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)\{2n_1\eta C_1^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)e^{-n_1 z} + [\xi\eta C_2^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta) +$$

$$+ (\eta^2 + n_2^2)C_3^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta)]e^{-n_2 z} - 2n_3\eta F^{(e)}(\xi,\eta)e^{-n_3 z}\}. \qquad (27)$$

Знаючи трансформанти $\bar{\mathbf{u}}^{(\mathrm{e})} = [\bar{u}_x^{(\mathrm{e})}, \bar{u}_y^{(\mathrm{e})}, \bar{u}_z^{(\mathrm{e})}]$ (7), $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{e})} = (\bar{\sigma}_{xx}^{(\mathrm{e})}, \bar{\sigma}_{yy}^{(\mathrm{e})}, \bar{\sigma}_{zz}^{(\mathrm{e})}, \bar{\sigma}_{xy}^{(\mathrm{e})}, \bar{\sigma}_{zx}^{(\mathrm{e})}, \bar{\sigma}_{zy}^{(\mathrm{e})})$ (11), $\bar{\mathbf{u}}^{(\mathrm{th})} = [\bar{u}_x^{(\mathrm{th})}, \bar{u}_y^{(\mathrm{th})}, \bar{u}_z^{(\mathrm{th})}]$ (24) та $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{th})} = (\bar{\sigma}_{xx}^{(\mathrm{th})}, \bar{\sigma}_{yy}^{(\mathrm{th})}, \bar{\sigma}_{zz}^{(\mathrm{th})}, \bar{\sigma}_{xy}^{(\mathrm{th})}, \bar{\sigma}_{zx}^{(\mathrm{th})}, \bar{\sigma}_{zy}^{(\mathrm{th})})$ (27), за допомогою оберненого подвійного перетворення Фур'є знаходимо інтегральні зображення компонент вектора переміщень $\mathbf{u}$ і тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$ [2]:

$$\{\mathbf{u}^{(\mathrm{e,th})}(x,y,z),\ \boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{e,th})}(x,y,z)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\bar{\mathbf{u}}^{(\mathrm{e,th})}(\xi,\eta,z), \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{e,th})}(\xi,\eta,z)\}e^{-i(\xi x + \eta y)}\,d\xi\,d\eta,$$

$$-\infty < x, y < \infty, \quad z > 0. \qquad (28)$$

5. Розв'язки без урахування інерційних складових. Якщо швидкість V руху навантаженої області Ω є значно меншою від швидкості поширення повздовжніх c_1 та поперечних c_2 (9) хвиль у півпросторі, то з урахуванням малості чисел Маха $M_k \ll 1$, $k = 1,2$, (9) трансформанти пружних переміщень $\bar{\mathbf{u}}^{(\mathrm{e})}$ (7) та напружень $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{e})}$ (11) подамо у вигляді

$$\{\bar{\mathbf{u}}^{(\mathrm{e})}(\xi,\eta,z), \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{e})}(\xi,\eta,z)\} = A^{(\mathrm{e})}(\xi,\eta,z)\{\mathbf{U}^{(\mathrm{e})}, \mathbf{S}^{(\mathrm{e})}\}\bar{\mathbf{p}}, \qquad (29)$$

де

$$A^{(\mathrm{e})}(\xi,\eta,z) = \frac{e^{-\rho z}}{(M_{21}-1)\mu\rho^3}. \qquad (30)$$

Елементи $u_{mk}^{(e)}$, $m = x \vee y \vee z$, $k = 1,2,3$, матриці $\{\mathbf{U}^{(e)}\}_{3\times 3}$ та $s_{mnk}^{(e)}$, $m,n = x \vee y \vee z$, $k = 1,2,3$, матриці $\{\mathbf{S}^{(e)}\}_{6\times 3}$ знаходимо за формулами

$$u_{x1}^{(e)} = (M_{21}-1)\eta^2 + 0.5[M_{21} - (M_{21}-1)\rho z]\xi^2 ,$$

$$u_{y1}^{(e)} = -0.5\xi\eta[M_{21} - 2 + (M_{21}-1)\rho z] ,$$

$$u_{z1}^{(e)} = 0.5i\xi\rho[1 + (M_{21}-1)\rho z], \qquad u_{x2}^{(e)} = u_{y1}^{(e)} ,$$

$$u_{y2}^{(e)} = (M_{21}-1)\xi^2 + 0.5[M_{21} - (M_{21}-1)\rho z]\eta^2 ,$$

$$u_{z2}^{(e)} = 0.5i\eta\rho[1 + (M_{21}-1)\rho z] ,$$

$$u_{x3}^{(e)} = -0.5i\xi\rho[1 - (M_{21}-1)z\rho], \qquad u_{y3}^{(e)} = -0.5i\eta\rho[1 - (M_{21}-1)\rho z] ,$$

$$u_{z3}^{(e)} = 0.5\rho^2[M_{21} + (M_{21}-1)\rho z] , \tag{31}$$

$$s_{xx1}^{(e)} = -i\mu\xi[(3M_{21}-4)\eta^2 - (M_{21}-1)(\rho z - 2)\xi^2] ,$$

$$s_{xx2}^{(e)} = -i\mu\eta[(M_{21}-2)\eta^2 - (M_{21}-1)\rho z\xi^2] ,$$

$$s_{xx3}^{(e)} = \mu\rho[(M_{21}-1)(\rho z - 1)\xi^2 - (M_{21}-2)\eta^2] ,$$

$$s_{yy1}^{(e)} = -i\mu\xi[(M_{21}-2)\xi^2 - (M_{21}-1)\rho z\eta^2] ,$$

$$s_{yy2}^{(e)} = -i\mu\eta[(3M_{21}-4)\xi^2 - (M_{21}-1)(\rho z - 2)\eta^2] ,$$

$$s_{yy3}^{(e)} = \mu\rho[(M_{21}-1)(\rho z - 1)\eta^2 - (M_{21}-2)\xi^2], \qquad s_{zz1}^{(e)} = -i\mu(M_{21}-1)\rho^3 z\xi ,$$

$$s_{zz2}^{(e)} = -i\mu(M_{21}-1)\rho^3 z\eta, \qquad s_{zz3}^{(e)} = -\mu(M_{21}-1)\rho^3(1+\rho z) ,$$

$$s_{xy1}^{(e)} = -i\mu\eta[(M_{21}-1)(\eta^2 - \rho z\xi^2) + \xi^2] ,$$

$$s_{xy2}^{(e)} = -i\mu\xi[(M_{21}-1)(\xi^2 - \rho z\eta^2) + \eta^2], \qquad s_{xy3}^{(e)} = -\mu\xi\eta\rho[1 - (M_{21}-1)\rho z] ,$$

$$s_{zx1}^{(e)} = \mu(M_{21}-1)\rho^2(z\xi^2 - \rho), \qquad s_{zx2}^{(e)} = \mu(M_{21}-1)\rho^2 z\xi\eta ,$$

$$s_{zx3}^{(e)} = -i\mu(M_{21}-1)\rho^3 z\xi, \qquad s_{zy1}^{(e)} = s_{zx2}^{(e)} ,$$

$$s_{zy2}^{(e)} = \mu(M_{21}-1)\rho^2(z\eta^2 - \rho), \qquad s_{zy3}^{(e)} = -i\mu(M_{21}-1)\rho^3 z\eta , \tag{32}$$

а трансформанти складових вектора механічного навантаження $\overline{\mathbf{p}} = [\overline{p}_x, \overline{p}_y, \overline{p}_z]$ обчислюємо за формулою (13).

Трансформанти температурних переміщень $\overline{\mathbf{u}}^{(\text{th})}$ (24) і термічних напружень $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(\text{th})}$ (27) можна подати у вигляді

$$\{\overline{\mathbf{u}}^{(\text{th})}(\xi,\eta,z), \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(\text{th})}(\xi,\eta,z)\} = \overline{q}(\xi,\eta)\sum_{i=1}^{2} A_i^{(\text{th})}(\xi,\eta,z)\{\mathbf{U}_i^{(\text{th})}, \mathbf{S}_i^{(\text{th})}\} , \tag{33}$$

де

$$A_1^{(\text{th})}(\xi,\eta,z) = A(\xi,\eta)e^{-n_3 z}, \qquad A_2^{(\text{th})}(\xi,\eta,z) = A(\xi,\eta)e^{-\rho z} ,$$

$$A(\xi,\eta) = \alpha\frac{1}{M_{21}Kn_3 n\rho} . \tag{34}$$

Складові $u_{mi}^{(\mathrm{th})}$ та $s_{mni}^{(\mathrm{th})}$, $m,n = x \vee y \vee z$, векторів $\mathbf{U}_i^{(\mathrm{th})}$ і $\mathbf{S}_i^{(\mathrm{th})}$, $i = 1,2$, відповідно обчислюємо за формулами

$$u_{x1}^{(\mathrm{th})} = \rho\xi, \qquad u_{y1}^{(\mathrm{th})} = \rho\eta, \qquad u_{z1}^{(\mathrm{th})} = -in_3\rho\,,$$

$$u_{x2}^{(\mathrm{th})} = \xi\big[(\rho - M_{21}n_3)(M_{21}-1)^{-1} - (\rho - n_3)\rho z\big]\,,$$

$$u_{y2}^{(\mathrm{th})} = \eta\big[(\rho - M_{21}n_3)(M_{21}-1)^{-1} - (\rho - n_3)\rho z\big]\,,$$

$$u_{z2}^{(\mathrm{th})} = i\rho\big[(M_{21}\rho - n_3)(M_{21}-1)^{-1} + (\rho - n_3)\rho z\big]\,, \tag{35}$$

$$s_{xx1}^{(\mathrm{th})} = -2i\rho(\xi^2 - in), \qquad s_{yy1}^{(\mathrm{th})} = -2i\rho(\eta^2 - in), \qquad s_{zz1}^{(\mathrm{th})} = 2i\rho^3\,,$$

$$s_{xy1}^{(\mathrm{th})} = -2i\rho\xi\eta, \qquad s_{zx1}^{(\mathrm{th})} = -2n_3\rho\xi, \qquad s_{zy1}^{(\mathrm{th})} = -2n_3\rho\eta\,,$$

$$s_{xx2}^{(\mathrm{th})} = -2i\{[\rho - 2n_3 - (\rho - n_3)\rho z]\xi^2 + (M_{21}-2)(M_{21}-1)^{-1}(\rho - n_3)\eta^2\}\,,$$

$$s_{yy2}^{(\mathrm{th})} = -2i\{[\rho - 2n_3 - (\rho - n_3)\rho z]\eta^2 + (M_{21}-2)(M_{21}-1)^{-1}(\rho - n_3)\xi^2\}\,,$$

$$s_{zz2}^{(\mathrm{th})} = 2i\rho^3[(n_3 - \rho)z - 1]\,,$$

$$s_{xy2}^{(\mathrm{th})} = -2i\xi\eta\big[(\rho - M_{21}n_3)(M_{21}-1)^{-1} - (\rho - n_3)\rho z\big]\,,$$

$$s_{zx2}^{(\mathrm{th})} = 2\rho\xi[n_3 + (\rho - n_3)\rho z], \qquad s_{zy2}^{(\mathrm{th})} = 2\rho\eta[n_3 + (\rho - n_3)\rho z]\,, \tag{36}$$

а трансформанта інтенсивності теплового потоку $\bar{q}(\xi,\eta)$ має вигляд (20).

Якщо область Ω нерухома ($V \to 0$), то трансформований розв'язок задачі термопружності (33)–(36) набуває вигляду

$$\{\bar{\mathbf{u}}^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z),\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z)\} = A^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z)\{\mathbf{U}^{(\mathrm{th})},\ \mathbf{S}^{(\mathrm{th})}\}\bar{q}(\xi,\eta)\,,$$

де

$$A^{(\mathrm{th})}(\xi,\eta,z) = \frac{\alpha e^{-\rho z}}{(M_{21}-1)K\rho^3}\,,$$

а складові $u_m^{(\mathrm{th})}$ та $s_{mn}^{(\mathrm{th})}$, $m,n = x \vee y \vee z$, векторів $\mathbf{U}^{(\mathrm{th})}$ і $\mathbf{S}^{(\mathrm{th})}$ обчислюємо за формулами

$$u_x^{(\mathrm{th})} = 0.5i\xi, \qquad u_y^{(\mathrm{th})} = 0.5i\eta, \qquad u_z^{(\mathrm{th})} = -0.5\rho\,,$$

$$s_{xx}^{(\mathrm{th})} = -\eta^2, \qquad s_{yy}^{(\mathrm{th})} = -\xi^2, \qquad s_{xy}^{(\mathrm{th})} = \xi\eta\,,$$

$$s_{zz}^{(\mathrm{th})} = s_{zx}^{(\mathrm{th})} = s_{zy}^{(\mathrm{th})} = 0\,.$$

6. Деякі види зовнішнього навантаження. Нехай функції $p_m(x,y)$, $m = x \vee y \vee z$, $(x,y) \in \Omega$, що задають розподіл напружень у граничній умові (2), мають вигляд

$$p_x(x,y) = 0, \qquad p_y(x,y) = 0, \qquad p_z(x,y) = p_0 p^*(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega\,,$$

де p_0 – характерне значення тиску, а $p^*(x,y)$ – безрозмірна функція координат, трансформанти Фур'є (13) якої для деяких форм навантаженої області Ω мають вигляд

1) постійний тиск у прямокутнику:

$$p^*(x,y) = 1, \qquad -a < x < a, \qquad -b < y < b\,,$$

$$\bar{p}^*(\xi,\eta) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(\xi a)}{\xi}\frac{\sin(\eta b)}{\eta}, \qquad -\infty < \xi,\eta < \infty\,;$$

2) сталий тиск у крузі радіуса a:

$$p^*(x,y) = 1, \qquad x^2 + y^2 \le a^2,$$

$$\bar{p}^*(\xi,\eta) = \frac{aJ_1\left(a\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \qquad -\infty < \xi,\eta < \infty;$$

3) параболічний розподіл тиску у крузі:

$$p^*(x,y) = 2\left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right), \qquad x^2 + y^2 \le a^2,$$

$$\bar{p}^*(\xi,\eta) = \frac{4J_2\left(a\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)}{\xi^2+\eta^2}, \qquad -\infty < \xi,\eta < \infty;$$

4) герцівський розподіл безрозмірного тиску у еліпсі із півосями a і b:

$$p^*(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,$$

$$\bar{p}^*(\xi,\eta) = \frac{ab}{(\xi a)^2 + (\eta b)^2}\left[\frac{\sin\sqrt{(\xi a)^2 + (\eta b)^2}}{\sqrt{(\xi a)^2 + (\eta b)^2}} - \cos\sqrt{(\xi a)^2 + (\eta b)^2}\right],$$

$$-\infty < \xi,\eta < \infty,$$

де $J_k(\cdot)$, $k = 1,2$, – функції Бесселя першого роду порядку k.

Нехай в центрі області Ω прикладено зосереджену силу

$$\mathbf{p} = [p_x\delta(x)\delta(y), p_y\delta(x)\delta(y), p_z\delta(x)\delta(y)],$$

трансформанта Фур'є якої є $\bar{\mathbf{p}} = [p_x, p_y, p_z]$. Врахувавши залежності

$$\frac{1}{M_{21}-1} = 1 - 2\nu, \quad \frac{M_{21}-2}{M_{21}-1} = 2\nu, \quad \frac{M_{21}}{M_{21}-1} = 2(1-\nu),$$

та застосувавши до трансформованого розв'язку (29)–(31) формулу обернення подвійного інтегрального перетворення Фур'є (28), запишемо пружні переміщення $\mathbf{u}^{(e)} = \left[u_x^{(e)}, u_y^{(e)}, u_z^{(e)}\right]$ у півпросторі

$$4\pi\mu\,\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{U}^{(e)}\,\mathbf{p}, \tag{37}$$

де елементи $u_{mk}^{(e)}$, $m = x \vee y \vee z$, $k = 1,2,3$, матриці $\{\mathbf{U}^{(e)}\}_{3\times3}$ обчислюємо за формулами

$$u_{x1}^{(e)}(x,y,z) = -2f_{0,2,-2}(x,y,z) - 2(1-\nu)f_{2,0,-2}(x,y,z) - zf_{2,0,-1}(x,y,z),$$

$$u_{x2}^{(e)}(x,y,z) = u_{y1}^{(e)}(x,y,z) = 2\nu f_{1,1,-2}(x,y,z) - zf_{1,1,-1}(x,y,z),$$

$$u_{x3}^{(e)}(x,y,z) = -(1-2\nu)f_{1,0,-1}(x,y,z) - zf_{1,0,0}(x,y,z),$$

$$u_{y2}^{(e)}(x,y,z) = -2f_{2,0,-2}(x,y,z) - 2(1-\nu)f_{0,2,-2}(x,y,z) - zf_{0,2,-1}(x,y,z),$$

$$u_{y3}^{(e)}(x,y,z) = -(1-2\nu)f_{0,1,-1}(x,y,z) - zf_{0,1,0}(x,y,z),$$

$$u_{z1}^{(e)}(x,y,z) = (1-2\nu)f_{1,0,-1}(x,y,z) - zf_{1,0,0}(x,y,z),$$

$$u_{z2}^{(e)}(x,y,z) = (1-2\nu)f_{0,1,-1}(x,y,z) - zf_{0,1,0}(x,y,z),$$

$$u_{z3}^{(e)}(x,y,z) = 2(1-\nu)f_{0,0,0}(x,y,z) - zf_{0,0,1}(x,y,z), \tag{38}$$

$$f_{0,0,0}(x,y,z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\xi^2+\eta^2}z}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{R},$$

$$f_{0,0,1}(x,y,z) = \frac{\partial f_{0,0,0}(x,y,z)}{\partial z} = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho z} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = -\frac{z}{R^3},$$

$$f_{1,0,0}(x,y,z) = \frac{\partial f_{0,0,0}(x,y,z)}{\partial x} = -i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{-\rho z}}{\rho} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = -\frac{x}{R^3},$$

$$f_{0,1,0}(x,y,z) = \frac{\partial f_{0,0,0}(x,y,z)}{\partial y} = -i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta e^{-\rho z}}{\rho} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = -\frac{y}{R^3},$$

$$f_{0,0,-1}(x,y,z) = \int f_{0,0,0}(x,y,z)\, dz = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\rho z}}{\rho^2} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = \ln(z+R),$$

$$f_{1,0,-1}(x,y,z) = \frac{\partial f_{0,0,-1}}{\partial x} = i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{-\rho z}}{\rho^2} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = \frac{x}{R(z+R)},$$

$$f_{1,1,-1}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f_{0,0,-1}}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{R^3(z+R)} - \frac{xy}{R^2(z+R)^2},$$

$$f_{2,0,-1}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f_{0,0,-1}}{\partial x^2} = \frac{1}{R(z+R)} - \frac{2x^2}{R^2(z+R)^2} - \frac{zx^2}{R^3(z+R)^2},$$

$$f_{0,2,-1}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f_{0,0,-1}}{\partial y^2} = \frac{1}{R(z+R)} - \frac{2y^2}{R^2(z+R)^2} - \frac{zy^2}{R^3(z+R)^2},$$

$$f_{0,1,-1}(x,y,z) = \frac{\partial f_{0,0,-1}}{\partial y} = i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta e^{-\rho z}}{\rho^2} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = \frac{y}{R(z+R)},$$

$$f_{0,0,-2}(x,y,z) = \int f_{0,0,-1}(x,y,z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\rho z}}{\rho^3} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta =$$
$$= z\ln(z+R) - R,$$

$$f_{1,0,-2}(x,y,z) = \frac{\partial f_{0,0,-2}}{\partial x} = -i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{-\rho z}}{\rho^3} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = -\frac{x}{z+R},$$

$$f_{0,1,-2}(x,y,z) = \frac{\partial f_{0,0,-2}}{\partial y} = -i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta e^{-\rho z}}{\rho^3} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = -\frac{y}{z+R},$$

$$f_{2,0,-2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f_{0,0,-2}}{\partial x^2} = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 e^{-\rho z}}{\rho^3} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta =$$
$$= \frac{x^2}{R(z+R)^2} - \frac{1}{z+R},$$

$$f_{0,2,-2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f_{0,0,-2}}{\partial y^2} = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^2 e^{-\rho z}}{\rho^3} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta =$$
$$= \frac{y^2}{R(z+R)^2} - \frac{1}{z+R},$$

$$f_{1,1,-2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f_{0,0,-2}}{\partial x \partial y} = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\eta e^{-\rho z}}{\rho^3} e^{-i(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta = \frac{xy}{R(z+R)^2},$$

$$R = \sqrt{r^2+z^2}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{39}$$

Розв’язок (37)–(39) співпадає із формулами, наведеними у монографії [16].

У випадку дії в центрі області Ω на поверхні півпростору зосередженого теплового струменя інтенсивності $q_0\delta(x)\delta(y)$ оберненням трансформант (32)–(34) отримуємо такі відомі формули для температурних переміщень [18]:

$$2\pi\left[u_x^{(\mathrm{th})}, u_y^{(\mathrm{th})}, u_z^{(\mathrm{th})}\right] = \frac{(1+\nu)\alpha_T q_0}{K}\left[-f_{1,0,-2}, -f_{0,1,-2},\ f_{0,0,-1}\right],$$

де функції $f_{1,0,-2}$, $f_{0,1,-2}$ і $f_{0,0,-1}$ знаходимо зі співвідношень (39).

1. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Введение в механику контактных взаимодействий. – Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. – 108 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. – Т. 1. – Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, 1969. – 343 с.
3. *Богданович П. Н., Прушак В. Я.* Трение и износ в машинах. – Минск: Выш. шк., 1999. – 374 с.
4. *Гольштейн Р. В.* Волны Релея и резонансные явления в упругих телах // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, № 3. – С. 516–525.
5. *Гриліцький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології: Навч. посібник. – Київ: Ін-т змісту і методів навчання Мін-ва освіти України, 1996. – 204 с.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
7. *Евтушенко А. А., Иваник Е. Г., Евтушенко Е. А.* Приближенный метод определения максимальной температуры при квазистационарном нагреве кусочно-однородного полупространства // Прикл. механика и техн. физика. – 2005. – **46**, № 3. – С. 85–97.
8. *Евтушенко А. А., Панасюк И. В., Уханская О. М.* Термонапряженное состояние упругой полуплоскости, нагреваемой равномерно движущимся источником тепла // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, № 1. – С. 165–171.
9. *Євтушенко О. О., Пир’єв С. Ю.* Головні напруження у півпросторі від дії на його поверхні рухомого фрикційного навантаження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 4. – С. 106–111.
10. *Євтушенко О. О., Пир’єв С. Ю.* Напружений стан півпростору, зумовлений дією на його поверхні рухомого механічного та теплового навантаження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 94–100.
11. *Именитова Ж. М., Огурцов К. И.* О нестационарном динамическом поле, возбуждаемом источником, движущимся по границе упругой полуплоскости // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 3. – С. 3–13.
12. *Каплунов Ю. Д.* Нестационарная динамика упругой полуплоскости при действии подвижной нагрузки. – Москва, 1986. – 54 с. – (Препр. / Ин-т проблем механики АН СССР; № 277.)
13. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
14. *Коровчинский М. В.* Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхности соприкосновения // Контактная прочность машиностроительных материалов. – Москва: Наука, 1964. – С. 5–24.
15. *Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С.* Основы расчетов на трение и износ. – Москва: Машиностроение, 1977. – 526 с.
16. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1955. – 491 с.
17. *Маркелова Е. И.* Нестационарная плоская задача о подвижной нагрузке на упругом полупространстве // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1976. – № 5. – С. 120–126.
18. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
19. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
20. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамика хрупкого разрушения. – Москва: Машиностроение, 1988. – 240 с.
21. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
22. *Слепян Л. И.* Механика трещин. – Ленинград: Судостроение, 1981. – 295 с.
23. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. – Ленинград: Судостроение, 1972. – 376 с.

24. *Beitin K. I.* Response of an elastic half space to a decelerating surface point load // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1969. – **36**, No. 4. – P. 819–826.
25. *Cole J., Huth J.* Stresses produced in a half plane by moving loads // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1958. – **25**, No. 4. – P. 433–436.
26. *Dang Dinh Ang*. Transient motion of line load on the surface of the elastic half-plane // Quart. Appl. Math. – 1960. – **18**, No. 3. – P. 251–256.
27. *Gakenheimer D. C.* Discussion on the paper: «Response of an elastic half space to a decelerating surface point load» by Beitin K. I. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1970. – **37**, No. 3. – P. 156–163.
28. *Huang J. H., Ju F. D.* Thermomechanical cracking due to moving frictional loads // Wear. – 1985. – **102**, No. 1-2. – P. 81–104.
29. *Jaeger J. C.* Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts // Proc. Roy. Soc. New South Wales. – 1942. – **76,** No. 3. – P. 203–224.
30. *Lykotrafitis G., Georgiadis H. G.* The three-dimensional steady-state thermo-elastodynamic problem of moving sources over a half space // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – **40**. – P. 899–940.
31. *Yevtushenko A. A., Ivanyk E. G., Ukhanska O. M.* Transient temperature of local moving areas of sliding contact // Tribology Int. – 1997. – **30**, No. 3. – P. 209–214.

РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЛОКАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ И ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКОЙ

С помощью двойного интегрального преобразования Фурье построены решения пространственных задач теории упругости и термоупругости для полупространства, на поверхность которого действует локально распределенная движущаяся механическая и тепловая нагрузка. Полученные формулы позволяют находить перемещения и напряжения в полупространстве при скорости движения нагрузки, меньшей от скорости волны Рэлея. В предельном случае действия неподвижной нагрузки полученные решения совпадают с известными.

SOLUTION OF QUASI-STATIC THERMOELASTICITY PROBLEM FOR SEMI-SPACE WITH LOCALLY DISTRIBUTED ON THE SURFACE MOVING MECHANICAL AND THERMAL LOAD

By means of double Fourier integral transformation the solutions of spatial problems of the of elasticity and thermoelasticity theory for a half-space with locally distributed moving mechanical and thermal load on the surface are constructed. The obtained formulas allow to find the displacements and stresses in a half-space for motion velocity of load smaller than the Rayleigh wave velocity. In a limiting case of action of motionless load the obtained solutions coincide with the known ones.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Б'ялистоцька політехніка, Б'ялисток, Польща

Одержано
15.07.10