

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН СКЛАДЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З ТЕПЛООБМІНОМ ЗА ДІЇ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНОГО ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

Запропоновано аналітично-числовий підхід до побудови розв'язків двовимірних за просторовими координатами квазістатичних задач термопружності для кусково-однорідних тіл. За допомогою цього підходу розв'язки задачі термопружності для складеної безмежної пластинки, що нагрівається зовнішнім середовищем та рівномірно розподіленим лінійним джерелом тепла, подано у вигляді розвинень за кратними інтегралами ймовірностей. На цій основі проведено розрахунок відповідного теплового і термопружного станів такої складеної пластинки.

У реальних умовах експлуатації більшість тонкостінних елементів неоднорідних конструкцій перебувають під дією змінних теплових навантажень. У зв'язку з цим для практичного застосування важливим є клас нестационарних задач теплопровідності, що моделюють нагрів складених пластин, оболонок тощо [6, 7, 11, 12], а також визначення і дослідження термомеханічної поведінки таких структур [6, 7, 14].

Розвиток моделей та методів дослідження термомеханічної поведінки неоднорідних структур пов'язаний з певними математичними труднощами. Зокрема, побудова розв'язків квазістатичних задач термопружності при застосуванні інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною напштовхується на проблему обернення, яка за своєю складністю не поступається складності вихідної задачі. Аналіз існуючих розв'язків нестационарних задач теплопровідності показує, що доволі часто при переході до оригіналів доводиться застосовувати представлення у вигляді рядів та інтегралів [4, 6, 7, 13]. У відповідних їм квазістатичних задачах термопружності для безмежних і півбезмежних областей, які розв'язуються аналітично, розв'язок, як правило, записується у вигляді функцій помилок чи інтегралів від них [6, 7].

У цій роботі розвинуто підхід [1, 2, 5], що базується на застосуванні розвинення шуканого розв'язку за кратними інтегралами ймовірностей, до розв'язування двовимірної за просторовими координатами нестационарної задачі теплопровідності та відповідної квазістатичної задачі термопружності для безмежної складеної пластинки з теплообміном. Такий підхід дає можливість здійснити обернене перетворення за просторовою координатою та отримати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

Постановка і побудова розв'язку задачі теплопровідності. Розглянемо вільну від зовнішнього навантаження кусково-однорідну безмежну ізотропну пластинку, що складається з двох зістикованих між собою на поверхні $x = 0$ півбезмежних пластинок. Через бокові поверхні $z = \pm \delta$ пластинки відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем. У початковий момент часу починає діяти рівномірно розподілене вздовж лінії $y = 0$ джерело тепла постійної потужності Q . Матеріали складових пластини характеризуються різними теплофізичними та механічними властивостями. На стику пластин $x = 0$ має місце ідеальний термомеханічний контакт.

Нестационарне температурне поле кожної із складових пластинки визначається з рівняння теплопровідності [7]

$$\frac{\partial^2 t_i(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_i(x, y, \tau)}{\partial y^2} - \alpha_i^2 t_i(x, y, \tau) = \frac{1}{a_i} \frac{\partial t_i(x, y, \tau)}{\partial \tau} - \frac{Q}{\lambda_i^{(i)}} \delta(y) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned}
t_1(0, y, \tau) &= t_2(0, y, \tau), & \lambda_t^{(1)} \frac{\partial t_1(0, y, \tau)}{\partial x} &= \lambda_t^{(2)} \frac{\partial t_2(0, y, \tau)}{\partial x}, \\
t_i(x, y, \tau) &= \frac{\partial t_i(x, y, \tau)}{\partial y} = 0, & |y| &\rightarrow \infty, \\
t_i(x, y, \tau) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} &< \infty, & t_i(x, y, 0) &= 0, \quad i = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0, \\ 2, & 0 < x < \infty, \end{cases} \quad (2)
\end{aligned}$$

де $\alpha_i^2 = \frac{\alpha_\gamma^{(i)}}{\lambda_t^{(i)} \delta}$; $t_i(x, y, \tau)$, a_i , $\alpha_\gamma^{(i)}$ і $\lambda_t^{(i)}$, $i = 1, 2$, – температури, коефіцієнти температуропровідності, тепловіддачі з поверхонь $z = \pm \delta$ і теплопровідності складових пластинки відповідно; $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

Розв'язок нестационарної задачі теплопровідності (1), (2) будемо за допомогою інтегрального перетворення Фур'є за просторовою координатою y . В результаті отримаємо задачу теплопровідності в трансформантах:

$$\frac{\partial^2 t_i^F(x, \beta, \tau)}{\partial x^2} - (\alpha_i^2 + \beta^2) t_i^F(x, \beta, \tau) = \frac{1}{a_i} \frac{\partial t_i^F(x, \beta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{Q}{\lambda_t^{(i)}}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
t_1^F(0, \beta, \tau) &= t_2^F(0, \beta, \tau), & \lambda_t^{(1)} \frac{\partial t_1^F(x, \beta, \tau)}{\partial x} &= \lambda_t^{(2)} \frac{\partial t_2^F(x, \beta, \tau)}{\partial x}, \\
t_i^F(x, \beta, \tau) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} &< \infty, & t_i^F(x, \beta, 0) &= 0, \quad (4)
\end{aligned}$$

де

$$f^F(x, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\beta y} dy.$$

Згідно із методикою, запропонованою в [1, 2, 5], з однорідних рівнянь (3) отримуємо диференціальні рівняння у частинних похідних, розв'язки яких, зникаючи при $|x| \rightarrow \infty$, подаються у вигляді ряду за кратними інтегралами ймовірностей [9]. Таким чином, загальні розв'язки рівнянь (3) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
t_i^F(x, \beta, \tau) &= \frac{Q}{\lambda_t^{(i)}} \left\{ \frac{1}{\gamma_i^2} \left[1 - e^{-\gamma_i^2 a_i \tau} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^i (4a_i \tau)^n e^{-\gamma_i^2 a_i \tau} i^n \operatorname{erfc}(|x|/(2\sqrt{a_i \tau})) \right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

де $\gamma_i^2 = \alpha_i^2 + \beta^2$; $i^n \operatorname{erfc}(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc}(t) dt$; β – параметр перетворення.

Коефіцієнти C_{2n}^i , $i = 1, 2$, $n = 1, 2, \dots$, визначаємо з умов контакту (4) з урахуванням співвідношень (5), прирівнюючи вирази при однакових степенях часової змінної. У результаті отримуємо рекурентну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K_\lambda} C_{2n}^1 - \alpha^n C_{2n}^2 &= (-1)^n \left[\frac{1}{K_\lambda} \gamma_1^{2(n-1)} - \alpha^n \gamma_2^{2(n-1)} \right] - \\
&\quad - \frac{1}{K_\lambda} \sum_{i=1}^{n-1} C_{2(n-i)}^1 \binom{n}{i} (-\gamma_1^2)^i + \alpha^n \sum_{i=1}^{n-1} C_{2(n-i)}^2 \binom{n}{i} (-\gamma_2^2)^i,
\end{aligned}$$

$$C_{2n}^1 + \alpha^{n-1/2} C_{2n}^2 = -\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_{2(n-i)}^1 n!}{\Gamma(n-i+1/2) \cdot i!} (-\gamma_1^2)^i + \right. \\ \left. + \alpha^{n-1/2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_{2(n-i)}^2 n!}{\Gamma(n-i+1/2) \cdot i!} (-\gamma_2^2)^i \right], \quad (6)$$

де $\alpha = \frac{a_2}{a_1}$; $K_\lambda = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}}$; $\gamma_i^2 = \alpha_i^2 + \beta^2$; $\binom{n}{i} = \frac{(n)!}{(n-i)! i!}$; $\Gamma(n)$ – гамма-функція [9]. Непарні коефіцієнти ($n = 2k + 1$) дорівнюють нулеві.

Оскільки у виразах для коефіцієнтів C_{2n}^i (6) від параметра перетворення β залежать тільки γ_i , $i = 1, 2$, то трансформанту температури (5) доцільно подати у такому вигляді:

$$t_i^F(x, \beta, \tau) = \frac{Q}{\lambda_t^{(i)}} \left\{ \frac{1}{\gamma_i^2} [1 - e^{-\gamma_i^2 a_i \tau}] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} F_{ij}^n \gamma_1^{2i} \gamma_2^{2(n-i-1)} \right) \times \right. \\ \left. \times (4a_i \tau)^n e^{-\gamma_i^2 a_i \tau} \cdot i^n \operatorname{erfc}(|x|/(2\sqrt{a_i \tau})) \right\}, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

де F_{ij}^n , $j = 0, 1, \dots, n-1$, $n = 1, 2, \dots$, визначаються із співвідношень, отриманих підстановкою виразів (7) у систему (6), які набувають вигляду

$$F_{1i}^k = -\frac{1}{1 + K_\lambda \sqrt{\alpha}} \left\{ \sum_{j=1}^i (-1)^j F_{1,i-j}^{k-j} \left[\binom{k}{j} + K_\lambda \sqrt{\alpha} \binom{k-1/2}{j} \right] - \right. \\ \left. - K_\lambda \alpha^k \sum_{j=1}^{k-i-1} (-1)^j F_{2,k-i-j-1}^{k-j} \left[\binom{k}{j} - \binom{k-1/2}{j} \right] \right\}, \\ i = 1, \dots, k-1, \\ F_{2i}^k = \frac{\alpha^{-k+1/2}}{1 + K_\lambda \sqrt{\alpha}} \left\{ \sum_{j=1}^{k-i-1} (-1)^j F_{2,k-i-j-1}^{k-j} \left[\binom{k}{j} - \binom{k-1/2}{j} \right] - \right. \\ \left. - \alpha^{k-1/2} \sum_{j=1}^i (-1)^j F_{2,i-j}^{k-j} \left[K_\lambda \sqrt{\alpha} \binom{k}{j} + \binom{k-1/2}{j} \right] \right\}, \\ i = 1, \dots, k-1. \quad (8)$$

Для почленного обернення трансформант температур (7) перерозкладемо наявний у них добуток $\gamma_1^{2i} \gamma_2^{2(n-i-1)}$ за параметром перетворення β , використовуючи при цьому формулу бінома Ньютона. У результаті отримаємо такі вирази для шуканих коефіцієнтів:

$$C_{2n}^i = \sum_{j=0}^{n-1} g_{ij}^n \beta^{2j},$$

де

$$g_{ik}^n = \sum_{j=0}^{n-1} F_{ij}^n \left[\sum_{\ell=k-\min(k,j)}^k \binom{n-1-j}{\ell} \binom{j}{k-\ell} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \right)^{2(\ell+j)} \right] \alpha_i^{-2k} \alpha_{i+1}^{2(n-1)}.$$

Остаточні Фур'є-трансформанти температур (7) набувають вигляду

$$t_i^F(x, \beta, \tau) = \frac{Q}{\lambda_t^{(i)}} \left\{ G_0^i(\beta, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^i(\beta, \tau) (4a_i \tau)^n i^{2n} \operatorname{erfc}(|x|/(2\sqrt{a_i \tau})) \right\}, \quad (9)$$

де

$$G_0^i(\beta, \tau) = \frac{1}{\gamma_i^2} [1 - e^{-\gamma_i^2 a_i \tau}], \quad G_n^i(\beta, \tau) = \left[\sum_{j=0}^{n-1} g_{ij}^n \beta^{2j} \right] e^{-\gamma_i^2 a_i \tau}.$$

Побудова оригіналів функції температури (9) при почленному знаходженні інтегралів Фур'є зводиться до відшукування оригіналу для виразу $\beta^{2k} e^{-(x^2 + \beta^2) a \tau}$, який будемо з використанням властивості перетворення Фур'є для похідних [3, 8] та формули Родріга [10] для ортогональних многочленів Ерміта $H_n(y)$. В результаті розв'язок задачі (1), (2) знайдено у замкнутому вигляді:

$$t_i(x, y, \tau) = \frac{Q}{\lambda_t^{(i)}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n}^{(i)}(y, \tau) (4a_i \tau)^n e^{-x_i a_i \tau - y^2 / (4a_i \tau)} \times \right. \\ \left. \times i^n \operatorname{erfc}(|x| / (2\sqrt{a_i \tau})) - N^{(i)}(y) \right\}, \quad (10)$$

де

$$N^{(i)}(y) = \{ e^{-x_i y} (\operatorname{erfc}(x_i \sqrt{a_i \tau} - y / (2\sqrt{a_i \tau})) - 2) + \\ + e^{x_i y} \operatorname{erfc}(x_i \sqrt{a_i \tau} + y / (2\sqrt{a_i \tau})) \} \cdot (4a_i)^{-1}, \\ D_{2n}^{(i)}(y, \tau) = \sum_{j=0}^{n-1} g_{ij}^n [(-1)^j H_{2j}(y / (2\sqrt{a_i \tau}))] \cdot [\sqrt{\pi} (2\sqrt{a_i \tau})^{2j+1}]^{-1}.$$

Визначення температурних напружень. Для знаходження квазістатичних напружень у складеній пластинці скористаємось постановкою задач термопружності в термінах функції напружень [6, 7]. Вирази компонент тензора напружень через функцію напружень мають вигляд

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \frac{\partial^2 F^{(i)}}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy}^{(i)} = \frac{\partial^2 F^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy}^{(i)} = -\frac{\partial^2 F^{(i)}}{\partial x \partial y}, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Цю функцію будемо шукати у вигляді суми двох складових

$$F^{(i)} = U^{(i)} + \Psi^{(i)},$$

для визначення яких маємо наступні диференціальні рівняння [6]:

$$\Delta \Delta U^{(i)} = 0, \quad \Delta \Psi^{(i)} + E_i \alpha_{ti} t_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Умови ідеального термомеханічного контакту на межі розділу $x = 0$ пластинок мають вигляд

$$\sigma_{xx}^{(1)} \Big|_{x=0} = \sigma_{xx}^{(2)} \Big|_{x=0}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} \Big|_{x=0} = \sigma_{xy}^{(2)} \Big|_{x=0}, \\ u^{(1)} \Big|_{x=0} = u^{(2)} \Big|_{x=0}, \quad v^{(1)} \Big|_{x=0} = v^{(2)} \Big|_{x=0}. \quad (13)$$

Для побудови виразів Фур'є-трансформант функції напружень, як і при знаходженні розв'язку задачі теплопровідності, застосуємо до співвідношень (11) та рівняння (12) перетворення Фур'є за координатою y . У трансформантах Фур'є співвідношення для напружень та рівняння на складові функції напружень набувають вигляду

$$\sigma_{xx}^{F(i)} = -\beta^2 F^{F(i)}, \quad \sigma_{yy}^{F(i)} = \frac{\partial^2 F^{F(i)}}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy}^{F(i)} = i\beta \frac{\partial F^{F(i)}}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{d^4 U^{F(i)}}{dx^4} - 2\beta^2 \frac{d^2 U^{F(i)}}{dx^2} + \beta^4 U^{F(i)} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \Psi^{F(i)}}{dx^2} - \beta^2 \Psi^{F(i)} + E_i \alpha_{ti} t_i^F = 0, \quad (16)$$

де

$$F^{F(i)} = U^{F(i)} + \Psi^{F(i)}.$$

Розв'язок рівняння (15) шукаємо у вигляді

$$\Psi^{F(i)}(x, \tau) = -\frac{QE_i \alpha_t^{(i)}}{\lambda_t^{(i)}} \left(A_0^i + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^i (4a_i \tau)^n i^{2n} \operatorname{erfc}(|x|/(2\sqrt{a_i \tau})) \right). \quad (17)$$

Підстановка виразів (17) та (9) в рівняння (16) приводить до рекурентних співвідношень для визначення коефіцієнтів A_n^i :

$$A_0^i = -G_0^i(\beta, \tau) \frac{1}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\gamma_i^2} [1 - e^{-\gamma_i^2 a_i \tau}],$$

$$A_{n+1}^i = -\beta^2 A_n^i - G_n^i(\beta, \tau) = -e^{-\gamma_i^2 a_i \tau} \sum_{k=0}^{n-2} \left[\sum_{j=0}^k g_{ij}^{n-1-k+j} \right] \beta^{2k}, \quad i = 1, 2.$$

Тоді з використанням виразів (17) і подання для загального розв'язку однорідного бігармонічного рівняння (15) Фур'є-трансформанту функції напружень запишемо так:

$$F^{F(i)}(x, \beta, \tau) = \frac{QE_i \alpha_t^{(i)}}{\lambda_t^{(i)}} \left[(B_1^i + x B_2^i) e^{\beta|x|} + A_0^i + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^i (4a_i \tau)^n i^{2n} \operatorname{erfc}(|x|/(2\sqrt{a_i \tau})) \right]. \quad (18)$$

У результаті трансформанти компонент тензора напружень (11) отримуємо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^F(x, \beta, \tau) &= \frac{QE_2 \alpha_t^2}{\lambda_t^2} \beta^2 \left\{ \frac{K_\alpha K_E}{K_\lambda} \left[A_0^1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^1 (4a_1 \tau)^n \times \right. \right. \\ &\quad \times i^{2n} \operatorname{erfc}(-x/(2\sqrt{a_1 \tau})) \left. \right] S_+(-x) - \\ &\quad - [\mu_{12}(\beta) + \psi(\beta) - x \chi_{12}(\beta)] D e^{|\beta|x} S_+(-x) - \\ &\quad - [\mu_{21}(\beta) + \psi(\beta) - x \chi_{21}(\beta)] D e^{-|\beta|x} S_-(x) + \\ &\quad \left. + \left[A_0^2 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^2 (4a_2 \tau)^n i^{2n} \operatorname{erfc}(x/(2\sqrt{a_2 \tau})) \right] S_-(x) \right\}, \\ \sigma_{xy}^F(x, \beta, \tau) &= \frac{QE_2 \alpha_t^2}{\lambda_t^2} i \beta \left\{ -\frac{K_\alpha K_E}{K_\lambda} \left[\sum_{n=2}^{\infty} A_n^1 (2\sqrt{a_1 \tau})^{2n-1} \times \right. \right. \\ &\quad \times i^{2n-1} \operatorname{erfc}(-x/(2\sqrt{a_1 \tau})) \left. \right] S_+(-x) + \beta \left[\mu_{12}(\beta) + \psi(\beta) - \right. \\ &\quad \left. - \left(x + \frac{1}{\beta} \right) \chi_{12}(\beta) \right] D e^{|\beta|x} S_+(-x) - \\ &\quad - \beta \left[\mu_{21}(\beta) + \psi(\beta) + \left(x - \frac{1}{\beta} \right) \chi_{21}(\beta) \right] D e^{-|\beta|x} S_-(x) + \\ &\quad \left. + \left[\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2 (2\sqrt{a_2 \tau})^{2n-1} i^{2n-1} \operatorname{erfc}(x/(2\sqrt{a_2 \tau})) \right] S_-(x) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^F(x, \beta, \tau) = & \frac{QE_2\alpha_t^2}{\lambda_t^2} \left\{ -\frac{K_\alpha K_E}{K_\lambda} \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_{n+1}^1 (4a_1\tau)^{2n} \times \right. \right. \\
& \times i^{2n} \operatorname{erfc}(-x/(2\sqrt{a_1\tau})) \Big] S_+(-x) + \beta^2 \left[\mu_{12}(\beta) + \psi(\beta) - \right. \\
& - \left(x + \frac{2}{\beta} \right) \chi_{12}(\beta) \Big] De^{|\beta|x} S_+(-x) + \\
& + \beta^2 \left[\mu_{21}(\beta) + \psi(\beta) + \left(x - \frac{2}{\beta} \right) \chi_{21}(\beta) \Big] De^{-|\beta|x} S_-(x) - \\
& \left. - \sum_{n=1}^{\infty} A_{n+1}^2 (4a_2\tau)^n i^{2n} \operatorname{erfc}(x/(2\sqrt{a_2\tau})) S_-(x) \right\}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\mu_{ij}(\beta) = & \frac{E_2}{\alpha_t^{(2)} E_i E_j} \left\{ \frac{\alpha_t^{(i)}}{K_\lambda^{2-i}} \left[A_0^i + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^i \frac{(a_i\tau)^n}{n!} \right] M_{ij}^{(i)} - \right. \\
& \left. - \frac{\alpha_t^{(j)}}{K_\lambda^{2-j}} \left[A_0^j + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^j \frac{(a_j\tau)^n}{n!} \right] M_{ij}^{(j)} \right\}, \\
M_{ij}^{(i)} = & E_i^2 (3 + 2v_j - v_j^2) + 2E_i E_j (2 - 2v_i + v_i v_j) + E_j^2 (1 - v_i^2), \\
M_{ij}^{(j)} = & 2E_j^2 (3 - v_i) + 2E_i E_j (1 + v_j), \quad \Phi^{(i)} = E_i (3 - v_j) + E_i (1 + v_i), \\
\chi_{ij}(\beta) = & \frac{\beta \alpha_t^{(i)} E_2}{\alpha_t^{(2)} E_i E_j K_\lambda^{2-i}} \left\{ X^{(i)} \left[A_0^i + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^i \frac{(a_i\tau)^n}{n!} - \frac{1}{\beta} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^i \frac{(\sqrt{a_i\tau})^{2n-1}}{\Gamma(n+1/2)} \right] \right\}, \\
X^{(i)} = & E_i^2 (1 + v_j)(3 - v_j) - 2E_i E_j (1 + v_i)(1 - v_j) - E_j^2 (1 + v_i^2), \\
\psi(\beta) = & \psi_{12}(\beta) + \psi_{21}(\beta), \quad \psi_{ij}(\beta) = \Phi^{(i)} \frac{2\alpha_t^{(i)} E_2}{\alpha_t^{(2)} E_i E_j K_\lambda^{2-i}} \frac{1}{\beta} \sum_{n=2}^{\infty} A_n^i \frac{(\sqrt{a_i\tau})^{2n-1}}{\Gamma(n+1/2)}, \\
D = & (3 + 2v_2 - v_2^2 + 2K_E^{-1} (5 - v_1 - v_2 + v_1 v_2) + K_E^{-2} (3 + 2v_1 - v_1^2))^{-1}.
\end{aligned}$$

Оригінали компонент тензора напружень за їх Фур'є-трансформантами (19), як і для температури, можна подати в аналітичному вигляді. Звівши відповідні доданки, які містять параметр перетворення β , бачимо, що побудова оригіналу зводиться також до відшукування оригіналу виразу $\beta^k e^{-(x^2 + \beta^2)\alpha\tau}$.

Зокрема, в результаті обернення компоненти напружень квазістатичної задачі термопружності на межі розділу $x = 0$ зведено до вигляду

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(1)}(0, y, \tau) = & \frac{QE_2\alpha_t^2}{\lambda_t^2 2\pi} \left\{ \left(\frac{K_\alpha K_E}{K_\lambda} - M_{12}^{(1)} \right) \left[N^{(1)} - 4\alpha_1 e^{-\alpha_1^2 a_1 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{0n}^{(1)}(y) \right] + \right. \\
& + M_{12}^{(2)} \left[N^{(2)} - 4\alpha_2 e^{-\alpha_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{0n}^{(2)}(y) \right] + \\
& \left. + \Phi^{(1)} e^{-\alpha_1^2 a_1 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{0n}^{(1)}(y) + \Phi^{(2)} e^{-\alpha_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{0n}^{(2)}(y) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(2)}(0, y, \tau) &= \frac{QE_2\alpha_t^2}{\lambda_t^2 2\pi} \left\{ (1 - M_{21}^{(2)}) \left[N^{(2)} - e^{-x_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{0n}^{(2)}(y) \right] + \right. \\
&\quad + M_{21}^{(1)} \left[N^{(1)} - e^{-x_1^2 a_1 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{0n}^{(1)}(y) \right] + \\
&\quad \left. + \Phi^{(1)} e^{-x_1^2 a_1 \tau} + \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{0n}^{(1)}(y) + \Phi^{(2)} e^{-x_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{0n}^{(2)}(y) \right\}, \\
\sigma_{xy}^{(1)}(0, y, \tau) &= i\beta \frac{QE_2\alpha_t^2}{\lambda_t^2 2\pi} \left\{ e^{-x_1^2 a_1 \tau} (M_{12}^{(1)} - X^1) \left[Y^{(1)} + y \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{1n}^{(1)}(y) \right] - \right. \\
&\quad - e^{-x_2^2 a_2 \tau} M_{12}^{(2)} \left[Y^{(1)} - y \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{1n}^{(2)}(y) \right] - \Phi^{(2)} y e^{-x_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{1n}^{(2)}(y) - \\
&\quad \left. - \left(\Phi^{(1)} + X^{(1)} - \frac{K_\alpha K_E}{K_\lambda} \right) y e^{-x_1^2 a_1 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{1n}^{(1)}(y) \right\}, \\
\sigma_{xy}^{(2)}(0, y, \tau) &= i\beta \frac{QE_2\alpha_t^2}{\lambda_t^2 2\pi} \left\{ e^{-x_1^2 a_1 \tau} M_{21}^{(1)} \left[Y^{(1)} + y \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{1n}^{(1)}(y) \right] - \right. \\
&\quad - e^{-x_2^2 a_2 \tau} (M_{21}^{(2)} - X^{(2)}) \left[Y^{(2)} - y \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{1n}^{(2)}(y) \right] + \Phi^{(1)} y e^{-x_1^2 a_1 \tau} \times \\
&\quad \times \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{1n}^{(1)}(y) + \left(\Phi^{(2)} + X^{(2)} - \frac{K_\alpha K_E}{K_\lambda} \right) y e^{-x_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{1n}^{(2)}(y) \left. \right\}, \\
\sigma_{yy}^{(1)}(0, y, \tau) &= \frac{QE_2\alpha_t^2}{\lambda_t^2 2\pi} \left\{ \frac{K_\alpha K_E}{K_\lambda} e^{-x_1^2 a_1 \tau} \times \right. \\
&\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_{1k}^n \frac{\Gamma(k+1/2)}{(a_1 \tau)^{k+1/2}} {}_1F_1 \left(k + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{y^2}{4a_1 \tau} \right) \right) \frac{(a_1 \tau)^n}{n!} - \\
&\quad - (M_{12}^{(1)} - X^{(1)}) \left[-N^{(1)} + e^{-x_1^2 a_1 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{0n}^{(1)}(y) \right] - \\
&\quad - M_{12}^{(2)} \left[-N^{(1)} + e^{-x_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{0n}^{(2)}(y) \right] - \\
&\quad \left. - (\Phi^{(1)} + 2X^{(1)}) e^{-x_1^2 a_1 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{0n}^{(1)}(y) - \Phi^{(2)} e^{-x_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{0n}^{(2)}(y) \right\}, \\
\sigma_{yy}^{(2)}(0, y, \tau) &= \frac{QE_2\alpha_t^2}{\lambda_t^2 2\pi} \left\{ \frac{K_\alpha K_E}{K_\lambda} e^{-x_2^2 a_2 \tau} \times \right. \\
&\quad \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_{2k}^n \frac{\Gamma(k+1/2)}{(a_2 \tau)^{k+1/2}} {}_1F_1 \left(k + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{y^2}{4a_2 \tau} \right) \right) \frac{(a_2 \tau)^n}{n!} \right] - \\
&\quad - (M_{21}^{(2)} - 2X^{(2)}) \left[N^{(2)} - e^{-x_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{0n}^{(2)}(y) \right] - \\
&\quad - M_{21}^{(1)} \left[-N^{(1)} - e^{-x_1^2 a_1 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_{0n}^{(1)}(y) \right] - \Phi^{(1)} e^{-x_1^2 a_1 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{0n}^{(1)}(y) - \\
&\quad \left. - (\Phi^{(2)} + 2X^{(2)}) e^{-x_2^2 a_2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_{0n}^{(2)}(y) \right\}. \tag{20}
\end{aligned}$$

Тут

$$\Omega_{jn}^{(i)}(y) = \frac{(a_i \tau)^{n-1/2+j/2}}{\Gamma(n+1/2+j/2)} \sum_{k=0}^{n-2} b_{ik}^n \frac{\Gamma(k+1+j)}{(a_i \tau)^{k+1+j}} {}_1F_1\left(k+1+j; \frac{1}{2}+j; -\frac{y^2}{4a_i \tau}\right),$$

$$\Lambda_{jn}^{(i)}(y) = \frac{(a_i \tau)^{n-j/2}}{\Gamma(n+1-j/2)} \sum_{k=0}^{n-2} b_{ik}^n \frac{\Gamma(k+3/2)}{(a_i \tau)^{k+3/2}} \cdot {}_1F_1\left(k+\frac{3}{2}; \frac{1}{2}+j; -\frac{y^2}{4a_i \tau}\right),$$

$$b_{ik}^n = \sum_{j=0}^k g_{ij}^{n-1-k+j}, \quad K_\alpha = \frac{\alpha_\gamma^{(1)}}{\alpha_\gamma^{(2)}}, \quad K_E = \frac{E_1}{E_2},$$

$$Y^{(i)} = \frac{1}{x_i} (e^{x_i y} \text{Ei}(-x_i y) - e^{-x_i y} \text{Ei}(x_i y)) + y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(x_i^2 a_i \tau)^{n+1}} \cdot {}_1F_1\left(n+1; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{4a_i \tau}\right),$$

де ${}_1F_1$ – вироджена гіпергеометрична функція Кумера; $\text{Ei}(\cdot)$ – інтегральна показникова функція.

Дослідження термопружного стану складеної пластинки. На основі побудованих розв'язків (9) та (20) проведено числовий аналіз температурного поля та спричинених ним квазістатичних температурних напружень на стикі складових пластинки. При розрахунках використано такі безрозмірні величини для температури та нормальних і дотичних напружень: $T = t \lambda_t^{(2)} / (Q \delta)$, $\sigma_x = \sigma_{xx} \lambda_t^{(2)} / (\alpha_t^{(2)} E_2 Q \delta)$, $\tau_{xy} = \sigma_{xy} \lambda_t^{(2)} / (\alpha_t^{(2)} E_2 Q \delta)$, а також безрозмірні параметри $Fo = a_1 \tau / \delta^2$, $Bi = \alpha_\gamma \delta / \lambda$, $\xi = x / \delta$, $\eta = y / \delta$.

На рис. 1, 2 зображено графіки залежностей безрозмірної температури T від безрозмірних координат ξ та η у складеній пластинці при значеннях безрозмірного часу $Fo = 10, 20, 40, 80, 120$ (суцільні криві) та її стаціонарного значення (штрихові криві). Обчислення температури виконано при таких значеннях параметрів: $K_\lambda = 0.5$, $\alpha = 2$ (на рис. 1 для $\eta = 0$, на рис. 2 для $\xi = 0$); $Bi_1 = 0.04$, $Bi_2 = 0.01$.

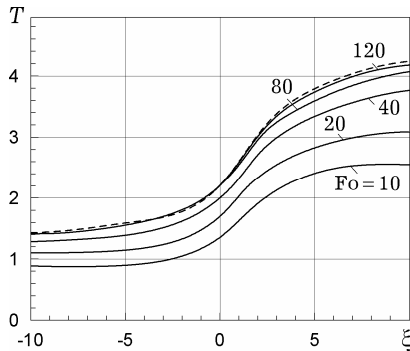


Рис. 1. Розподіл температури вздовж лінії стику півпластин

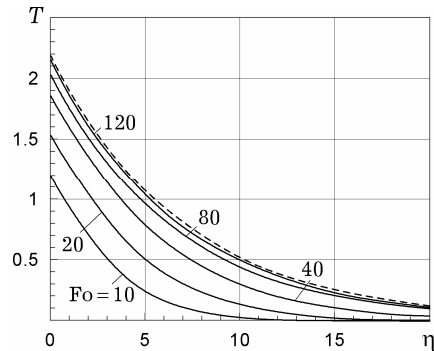


Рис. 2. Розподіл температури вздовж лінії дії джерела

Основні зміни температурного поля відбуваються в діапазоні $|\xi| < 10$. Поза ним температура є практично постійною, а при віддаленні від джерела тепла зникає експоненціально. При відході від межі розділу температура зростає при $\xi > 0$ та спадає при $\xi < 0$. З часом температура монотонно зростає і при $Fo = 120$ виходить на стаціонарний режим [4]. Температурні криві лежать тим вище від кривої на границі розділу, чим меншими є коефіцієнти тепловіддачі і теплопровідності розглядуваного матеріалу.

На рис. 3 і 4 зображено розподіли безрозмірних нормальних σ_x та дотичних τ_{xy} напружень на межі стику півбезмежних пластин. Тут суцільним кривим відповідають значення напружень при $Bi_1 = 0.04$, $Bi_2 = 0.01$, а штриховим – при $Bi_1 = Bi_2 = 0.04$.

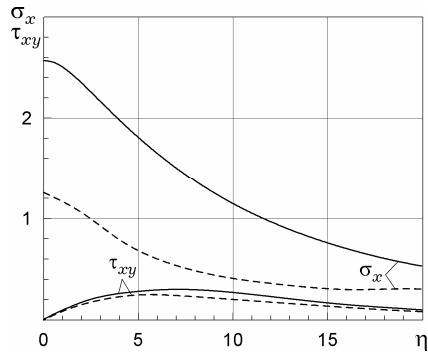


Рис. 3. Розподіл безрозмірних напружень уздовж лінії дії джерела

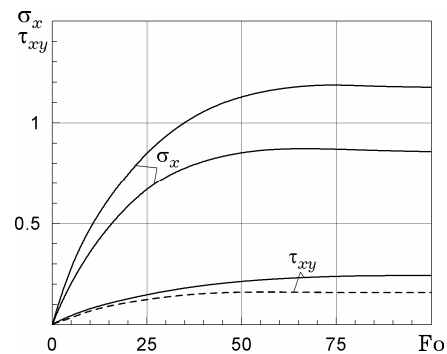


Рис. 4. Розподіл безрозмірних напружень за часом

Нормальні напруження досягають максимальних значень на лінії дії джерела, а дотичні – вздовж неї на віддалі приблизно 7δ . При зменшенні тепловіддачі температурні напруження зростають.

Для перевірки достовірності отриманих результатів проводилося порівняння часткових випадків розглянутих задач з відомими результатами [4] та отриманими асимптотичними виразами, встановлено їх співпадіння. Числові дослідження показали швидку збіжність рядів за кратними інтегралами ймовірностей в задачах нестационарної теплопровідності, що підтверджує ефективність запропонованого підходу до розв'язування квазістатичних задач термопружності для неоднорідних тіл.

Подання розв'язку задач теплопровідності у вигляді розвинень за кратними інтегралами ймовірностей спрощує процедуру побудови розв'язку і квазістатичних задач термопружності, а у випадку двовимірних задач стає можливим здійснення почленного обернення трансформант інтегрального перетворення Фур'є за просторовою змінною.

Дослідження частково виконані за НДР для молодих науковців (договір з Президією НАН України від 1.07.2009, № ВБМ/339).

1. Горечко Н. О., Кушнір Р. М. Розрахунок квазістатичного термонапруженого стану напівбезмежних контактуючих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 82–87.
2. Горечко Н. О., Кушнір Р. М. Розрахунок неусталеного термопружного стану трибосистеми під час гальмування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 5. – С. 81–86.
Te same: Horechko N. O., Kushnir R. M. Analysis of the nonstationary thermoelastic state of a tribosystem in the process of braking // Mater. Sci. – 2006. – 42, No. 5. – P. 665–672.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: Наука, 1974. – 542 с.
4. Кушнір Р. М., Музычук Ю. А. К определению температурных напряжений в составных пластинках // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – Вып. 16. – С. 44–48.
5. Кушнір Р., Горечко Н. Визначення неусталеного термопружного стану складеної пластинки з теплообміном // Сучасні проблеми механіки та математики: Тези доп. II Міжнар. наук. конф. (Львів, 25–29 тр. 2008). – Львів, 2008. – Т. 1. – С. 174–176.
6. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.

7. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Марычев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – Москва: Физматлит, 2003. – 664 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
10. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1979. – 416 с.
11. Atarashi T., Minagawa S. Transient coupled-thermoelastic problem of heat conduction in a multilayered composite plate // Int. J. Eng. Sci. – 1992. – 30, No. 10. – P. 1543–1550.
12. Bhullara S. K., Wegner J. L. Some transient thermoelastic plate problems // J. Therm. Stresses. – 2009. – 32, No. 8. – P. 768–790.
13. Hetnarski M. R., Eslami M. R. Thermal stresses – Advanced theory and applications. – Ser. Solid Mechanics and Applications. – Vol. 158 / Ser. Ed. Gladwell G. M. L. – New-York: Springer, 2008. – 559 p.
14. Tokovyy Y., Ma C.-C. Analytical solutions to the 2D elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous planes and half-planes // Arch. Appl. Mech. – 2009. – 79, No. 5. – P. 441–456.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНКИ С ТЕПЛОБМЕНОМ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Предложен аналитико-численный подход к построению решений двумерных по пространственным координатам квазистатических задач термоупругости для кусочно-однородных тел. С помощью этого подхода решения задачи термоупругости для составной бесконечной пластинки, нагреваемой внешней средой и равномерно распределенным источником тепла, представлены в виде рядов по кратным интегралам вероятностей. На этой основе проведены расчеты соответствующего теплового и термоупругого состояний такой составной пластинки.

THERMOSTRESSED STATE OF COMPOSITE PLATE WITH HEAT EXCHANGE UNDER ACTION OF UNIFORMLY DISTRIBUTED HEAT SOURCE

The analytical-numerical approach to construct solution of 2D thermoelasticity problem for piecewise-homogeneous bodies is proposed. Using this approach the solutions of the thermoelasticity problem for the composite plate heated by the environment and uniformly distributed heat source are found in the form of decompositions by the iterated integrals of complementary error functions. On this basis the calculation of corresponding heat and thermoelastic states of such composite plate is carried out.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
13.04.10