УДК 539.3

В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина

СПІВВІДНОШЕННЯ ҐРАДІЄНТНОЇ ТЕРМОМЕХАНІКИ ЗА ВРАХУВАННЯ НЕОБОРОТНОСТІ ТА ІНЕРЦІЙНОСТІ ЛОКАЛЬНОГО ЗМІЩЕННЯ МАСИ

Отримано повну систему співвідношень нелокальної теорії ґрадієнтного типу, що описує процеси теплопровідності, деформування та локального зміщення маси за врахування інерційності та необоротності останнього. Визначальне співвідношення для віднесеного до густини вектора локального зміщення маси у цьому випадку є реологічним, а рівняння для потенціалу μ'_π, *який характеризує вплив локального зміщення маси на внутрішню енергію тіла, має динамічний характер з огляду на наявність доданків, що містять похідні за часом першого та другого порядку від потенціалу* μ'_π, *кульової складової тензора деформації і температури.*

1. Вступ. Відомо, що співвідношення класичної теорії пружності й термопружності передбачають необмеженість розв'язків задач із локальними джерелами і не враховують ряду експериментально встановлених явищ, зокрема існування антиплоских поверхневих хвиль, високочастотної дисперсії пружних хвиль, розмірних ефектів тощо. Неузгодженість між класичною теорією й експериментом спостерігається у середовищах складної внутрішньої структури (гранульовані, композитні, дрібнозернисті тіла), тонкоплівкових і тонковолокнистих структурах. Для вивчення термомеханічної поведінки таких об'єктів дедалі ширше використовують нелокальні теорії, які враховують залежність локального термодинамічного стану тіла у вибраній точці від стану у сусідніх точках. Таке врахування забезпечується заданням функціональних визначальних співвідношень просторового типу (*нелокальні теорії*) [5, 16, 24], або шляхом введення до простору параметрів термодинамічного стану ґрадієнтів першого та вищих порядків тензорів деформації та поворотів (*ґрадієнтні теорії*) [1, 23, 26, 28]. Побудову таких теорій пов'язують звичайно з урахуванням впливу мікроструктурних змін на макропроцеси в термомеханічних системах.

У працях [10, 19, 20] показано, що нелокальні теорії обох типів пов'язані з теорією мікроморфних середовищ (*micromorphic media*), виклад основ якої можна знайти в [17] (див. також [29]).

Практичне використання нелокальних теорій пружності та термопружності пов'язане, зокрема, з дослідженням приповерхневих явищ, напружено-деформованого стану тіл за дії зосереджених сил, аналізом дисперсійних залежностей і нелінійних ефектів, які виникають під час поширення різних типів хвиль у ґрадієнтно-пружних тілах, вивченням розмірних ефектів тощо [13, 14, 18, 25, 30].

Наприкінці 80-х років професором Я. Й. Бураком опублікована праця [2], яка започаткувала новий напрямок у розбудові нелокальних теорій термопружності. Цей напрямок ґрунтувався на врахуванні поряд із процесами деформування та теплопровідності процесу локального зміщення маси, пов'язаного зі структурними змінами у рамках фізично малого елемента тіла. Наслідком врахування такого процесу стало розширення фазового простору параметрів стану однією парою спряжених параметрів: ґрадієнтом хімічного потенціалу та вектором локального зміщення маси [2]. Це лягло в основу так званої локально ґрадієнтної термомеханіки. Докладний огляд досліджень у цьому напрямку міститься у праці [6]. Надалі локально ґрадієнтний підхід був узагальнений в [4], де для опису локального термодинамічного стану середовища введено дві пари додаткових спряжених параметрів: (***i***) питому густину наведеної маси ρ_m і наведену енергетичну міру μ'_π впливу зміщення маси на внутрішню енергію, (***ii***) віднесений до

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2011. – 54, № 1. – С. 91-100.

густини вектор $\boldsymbol{\pi}_m$ зміщення маси та просторовий ґрадієнт енергетичної міри μ'_π. Процес локального зміщення маси у цій роботі вважали оборотним і безінерційним. Підхід до врахування необоротності цього процесу у термомеханічних системах наведено у праці [8].

Метою пропонованого дослідження є побудова співвідношень ґрадієнтної термомеханіки деформівних пружних тіл за врахування як необоротності, так й інерційності процесу локального зміщення маси. При цьому використано результати щодо врахування інерції процесу електричної поляризації, отримані, зокрема, у публікаціях [11, 21]. Зазначимо, що інший підхід до врахування інерції процесу локального зміщення маси подано у роботі [3].

2. Вихідні співвідношення модельного опису.

2.1. Балансові рівняння. Розглядаємо ізотропне термопружне тіло, яке займає область (V) евклідового простору та обмежене гладкою поверхнею (Σ) із зовнішньою нормаллю $\mathbf{n}$. Тіло перебуває під впливом механічної і теплової дій, внаслідок чого у ньому протікають деформаційні й теплові процеси та процес локального зміщення маси. Будемо також враховувати необоротність та інерційність процесу локального зміщення маси.

Систему співвідношень ґрадієнтної термомеханіки одержимо на основі рівнянь балансу маси, ентропії та повної енергії.

Рівняння балансу маси в інтегральній формі має вигляд [4]

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)}\rho\, dV = -\int_{(\Sigma)}\mathbf{J}_{m*}\cdot\mathbf{n}\, d\Sigma\,, \tag{1}$$

де ρ – густина маси тіла; $\mathbf{J}_{m*}$ – вектор густини потоку речовини; t – час; «$\cdot$» – символ скалярного добутку.

За врахування процесу локального зміщення маси потік маси $\mathbf{J}_{m*}$ подамо як суму конвективної складової $\mathbf{J}_{mc} = \rho\mathbf{v}_*$ та складової $\mathbf{J}_{ms} = \dfrac{\partial\boldsymbol{\Pi}_m}{\partial t}$, зумовленої локальним зміщенням маси: $\mathbf{J}_{m*} = \mathbf{J}_{mc} + \mathbf{J}_{ms}$ [15]. Тут $\boldsymbol{\Pi}_m$ – вектор локального зміщення маси, $\mathbf{v}_*$ – швидкість конвективного перенесення фізично малого елемента тіла.

При врахуванні процесу локального зміщення маси вектор $\mathbf{v}$ швидкості центра мас частинок тіла означуємо таким співвідношенням [15]:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left(\rho\mathbf{v}_* + \frac{\partial\boldsymbol{\Pi}_m}{\partial t}\right). \tag{2}$$

За такого означення вектора швидкості континууму центрів мас локальна форма рівняння балансу маси (1) набуває стандартного вигляду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0\,. \tag{3}$$

Тут $\boldsymbol{\nabla}$ – оператор Гамільтона.

Зауважимо також, що наслідком співвідношення (2) є формула

$$\mathbf{J}_m = -\frac{\partial\boldsymbol{\Pi}_m}{\partial t}\,, \tag{4}$$

де $\mathbf{J}_m = \rho(\mathbf{v}_* - \mathbf{v})$.

При формулюванні рівняння балансу повної енергії врахуємо, що процесу локального зміщення маси властива інерційність і пов’яжемо цю інерційність з деякою скалярною величиною d_m. Тоді повну енергію системи у довільний момент часу означимо як суму внутрішньої ρu і кінетичної $\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2$ енергій, а також кінетичної енергії процесу локального зміщення маси $\frac{1}{2}\rho d_m\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2$. Тут u – питома внутрішня енергія; $\boldsymbol{\pi}_m = \frac{\boldsymbol{\Pi}_m}{\rho}$ – вектор локального зміщення маси, віднесений до густини ρ; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ – оператор повної похідної за часом. Зазначимо, що кінетична енергія процесу локального зміщення маси та пов'язана з нею величина d_m означені аналогічно до кінетичної енергії поляризації та величини d_E, введених Моженом для врахування інерційності процесу поляризації [11, 22].

Повна енергія системи змінюється внаслідок: конвективного перенесення енергії $\rho\left(u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}d_m\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2\right)$ через поверхню; роботи внутрішніх сил $\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v}$; потоку тепла $\mathbf{J}_q$; роботи $\mu\mathbf{J}_m$, виконаної для перенесення маси; роботи $\mu_\pi\frac{\partial\boldsymbol{\Pi}_m}{\partial t}$, затраченої на зміну структури тіла внаслідок локального зміщення маси; дії масових сил $\mathbf{F}$ і розподілених джерел тепла $\Re$. Остаточно рівняння балансу енергії в інтегральній формі має вигляд

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\rho\left(u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{d_m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2\right)dV =$$

$$= -\oint\limits_{(\Sigma)}\left\{\rho\left(u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{d_m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2\right)\mathbf{v} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{J}_q + \mu\mathbf{J}_m + \right.$$

$$\left. + \mu_\pi\frac{\partial\boldsymbol{\Pi}_m}{\partial t}\right\}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma + \int\limits_{(V)}(\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \rho\Re)\,dV. \tag{5}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напружень Коші; μ – хімічний потенціал; μ_π – міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси [4].

Якщо у рівнянні балансу повної енергії (5) з використанням теореми Остроградського – Ґаусса [9] перейти від поверхневого інтеграла до інтеграла по об'єму, врахувати рівняння балансу маси (3) та ентропії [7]

$$\rho T\frac{ds}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_q + \frac{1}{T}\mathbf{J}_q\cdot\boldsymbol{\nabla}T + T\sigma_s + \rho\Re, \tag{6}$$

а також формулу (4), то отримаємо таку локальну форму рівняння балансу внутрішньої енергії:

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho T\frac{ds}{dt} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}) - \mu'_\pi\frac{\partial[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{\pi}_m)]}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi\cdot\frac{\partial(\rho\boldsymbol{\pi}_m)}{\partial t} -$$

$$- \rho d_m\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2} - \mathbf{J}_q\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T} - T\sigma_s +$$

$$+ \mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho\mathbf{F}\right). \tag{7}$$

У формулах (6), (7) позначено: s – питома ентропія; T – абсолютна температура; σ_s – виробництво ентропії; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; «$\otimes$» – символ діадного добутку.

Надалі аналогічно, як у праці [15], введемо у розгляд густину наведеної маси $\rho_{m\pi}$, для якої справджується таке співвідношення:

$$\rho_{m\pi} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{\pi}_m). \tag{8}$$

Переходячи у співвідношенні (7) до повних похідних за часом і враховуючи (8) та (3), одержимо таке рівняння балансу внутрішньої енергії:

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:(\nabla\otimes\mathbf{v})+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho\nabla\mu'_\pi\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-\rho d_m\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}-$$
$$-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_s+\mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*\right). \tag{9}$$

Тут введено питому величину густини наведеної маси $\rho_m=\rho_{m\pi}/\rho$, перепозначено тензор напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*=\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\rho(\rho_m\mu'_\pi+\boldsymbol{\pi}_m\cdot\nabla\mu'_\pi)\hat{\mathbf{I}}$ ($\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор) та враховано виникнення додаткової масової сили $\mathbf{F}_m=\rho_m\nabla\mu'_\pi-$ $-\boldsymbol{\pi}_m\cdot\nabla\nabla\mu'_\pi$, так що вектор масової сили $\mathbf{F}_*$ тепер визначається виразом $\mathbf{F}_*=\mathbf{F}=\rho_m\nabla\mu'_\pi-\boldsymbol{\pi}_m\cdot\nabla\nabla\mu'_\pi$.

Для врахування необоротності процесу локального зміщення маси подамо вектор $\nabla\mu'_\pi$ як суму оборотної $(\nabla\mu'_\pi)^r$ та необоротної $(\nabla\mu'_\pi)^i$ складових: $\nabla\mu'_\pi=(\nabla\mu'_\pi)^r+(\nabla\mu'_\pi)^i$ [8]. Тоді рівняння (9) балансу внутрішньої енергії набуде вигляду

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:(\nabla\otimes\mathbf{v})+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho(\nabla\mu'_\pi)^r\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-\rho d_m\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}-$$
$$-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-\rho(\nabla\mu'_\pi)^i\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-T\sigma_s+\mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*\right). \tag{10}$$

Подібно до того, як в теорії п’єзоелектриків Тупіна [12, 27] вводять вектор напруженості локального електричного поля, введемо у розгляд вектор локального поля величини $(\nabla\mu'_\pi)^L$. При цьому ґрунтуємося на певній аналогії між процесами локального зміщення маси та поляризації. Надалі приймемо, що локальний термодинамічний стан тіла залежить від вектора локального поля $(\nabla\mu'_\pi)^L$. Тоді співвідношення (10) запишемо таким чином:

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:(\nabla\otimes\mathbf{v})+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho(\nabla\mu'_\pi)^L\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}+$$
$$+\rho\left[(\nabla\mu'_\pi)^L-(\nabla\mu'_\pi)^r-d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right]\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-$$
$$-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-\rho(\nabla\mu'_\pi)^i\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-T\sigma_s+\mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*\right). \tag{11}$$

З використанням перетворення Лежандра $f=u-Ts+(\nabla\mu'_\pi)^L\cdot\boldsymbol{\pi}_m-$ $-\mu'_\pi\rho_m$ перейдемо у цій формулі до нової термодинамічної функції f, яку трактуємо як узагальнену вільну енергію Гельмгольца. Тоді з формули (11) одержимо

$$\rho\frac{df}{dt}=-\rho s\frac{dT}{dt}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:(\nabla\otimes\mathbf{v})-\rho\rho_m\frac{d\mu'_\pi}{dt}+\rho\boldsymbol{\pi}_m\cdot\frac{d(\nabla\mu'_\pi)^L}{dt}+$$
$$+\rho\left[(\nabla\mu'_\pi)^L-(\nabla\mu'_\pi)^r-d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right]\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-$$
$$-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-\rho(\nabla\mu'_\pi)^i\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-T\sigma_s+\mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*\right). \tag{12}$$

Рівняння балансу вільної енергії (12) є інваріантним відносно просторових трансляцій [12], тобто не може змінюватися при заміні $\mathbf{v}\to\mathbf{v}+\mathbf{a}$, де $\mathbf{a}$ – довільний сталий вектор. Як наслідок з (12) отримуємо рівняння балансу імпульсу

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_* \tag{13}$$

та формулу

$$\rho\frac{df}{dt}=-\rho s\frac{dT}{dt}+\hat{\boldsymbol\sigma}_*:(\nabla\otimes\mathbf{v})-\rho\rho_m\frac{d\mu'_\pi}{dt}+\rho\boldsymbol\pi_m\cdot\frac{d(\nabla\mu'_\pi)^L}{dt}+$$
$$+\rho\left[(\nabla\mu'_\pi)^L-(\nabla\mu'_\pi)^r-d_m\frac{d^2\boldsymbol\pi_m}{dt^2}\right]\cdot\frac{d\boldsymbol\pi_m}{dt}-$$
$$-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-\rho(\nabla\mu'_\pi)^i\cdot\frac{d\boldsymbol\pi_m}{dt}-T\sigma_s. \qquad (14)$$

Рівняння (14) повинно зберігати свій вигляд і для тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю $\boldsymbol\omega$ [12]. У цьому випадку $\mathbf{v}\to\mathbf{v}+\boldsymbol\omega\times\mathbf{r}$. Враховуючи, що $\nabla\otimes(\mathbf{v}+\boldsymbol\omega\times\mathbf{r})=\nabla\otimes\mathbf{v}-\hat{\boldsymbol\delta}^{(3)}\cdot\boldsymbol\omega$, де $\hat{\boldsymbol\delta}^{(3)}$ – тензор третьої валентності Леві-Чівіта [9], надамо рівнянню (14) вигляду

$$\rho\frac{df}{dt}=-\rho s\frac{dT}{dt}+\hat{\boldsymbol\sigma}_*:(\nabla\otimes\mathbf{v}-\hat{\boldsymbol\delta}^{(3)}\cdot\boldsymbol\omega)-\rho\rho_m\frac{d\mu'_\pi}{dt}+\rho\boldsymbol\pi_m\cdot\frac{d(\nabla\mu'_\pi)^L}{dt}+$$
$$+\rho\left[(\nabla\mu'_\pi)^L-(\nabla\mu'_\pi)^r-d_m\frac{d^2\boldsymbol\pi_m}{dt^2}\right]\cdot\frac{d\boldsymbol\pi_m}{dt}-$$
$$-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-\rho(\nabla\mu'_\pi)^i\cdot\frac{d\boldsymbol\pi_m}{dt}-T\sigma_s. \qquad (15)$$

Порівнюючи співвідношення (14) та (15) одержуємо, що $\hat{\boldsymbol\sigma}_*:\hat{\boldsymbol\delta}^{(3)}\cdot\boldsymbol\omega=0$. Ця рівність буде справджуватися для довільних сталих значень кутової швидкості $\boldsymbol\omega$, якщо $\delta_{ijk}\sigma_{*jk}=0$ або $\sigma_{*jk}=\sigma_{*kj}$ (σ_{*jk} – компоненти тензора $\hat{\boldsymbol\sigma}_*$, а δ_{ijk} – компоненти тензора Леві-Чівіта). Таким чином, узагальнений тензор напружень $\hat{\boldsymbol\sigma}_*$ є симетричним тензором другого рангу.

Подамо величину $\nabla\otimes\mathbf{v}$ у вигляді [12]

$$\nabla\otimes\mathbf{v}=\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}+\frac{d\hat{\boldsymbol\omega}}{dt}.$$

Тут $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{u}}{dt}$, $\mathbf{u}$ – вектор переміщення; $\hat{\mathbf{e}}$ – симетричний тензор деформації; $\hat{\boldsymbol\omega}$ – антисиметричний тензор поворотів, які у рамках геометрично лінійної теорії пов'язані з вектором переміщення $\mathbf{u}$ формулами

$$\hat{\mathbf{e}}=\frac{1}{2}\left[\nabla\otimes\mathbf{u}+(\nabla\otimes\mathbf{u})^\top\right],\qquad \hat{\boldsymbol\omega}=\frac{1}{2}\left[\nabla\otimes\mathbf{u}-(\nabla\otimes\mathbf{u})^\top\right], \qquad (16)$$

індексом « $\top$ » позначено операцію транспонування тензора. Оскільки згортка симетричного та антисиметричного тензорів дорівнює нулеві, то $\hat{\boldsymbol\sigma}_*:\frac{d\hat{\boldsymbol\omega}}{dt}=0$. Тоді рівняння балансу вільної енергії (15) набуває вигляду

$$\rho\frac{df}{dt}=-\rho s\frac{dT}{dt}+\hat{\boldsymbol\sigma}_*:\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}-\rho\rho_m\frac{d\mu'_\pi}{dt}+\rho\boldsymbol\pi_m\cdot\frac{d(\nabla\mu'_\pi)^L}{dt}+$$
$$+\rho\left[(\nabla\mu'_\pi)^L-(\nabla\mu'_\pi)^r-d_m\frac{d^2\boldsymbol\pi_m}{dt^2}\right]\cdot\frac{d\boldsymbol\pi_m}{dt}-$$
$$-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-\rho(\nabla\mu'_\pi)^i\cdot\frac{d\boldsymbol\pi_m}{dt}-T\sigma_s. \qquad (17)$$

Звідси, приймаючи, що вільна енергія f є функцією від температури T, тензора деформації $\hat{\mathbf{e}}$, величин μ'_π та $(\nabla\mu'_\pi)^L$, тобто $f=f(T,\mu'_\pi,(\nabla\mu'_\pi)^L,\hat{\mathbf{e}})$, і враховуючи, що доданки, записані у другій та третій стрічках формули (17), не залежать від швидкостей $\frac{dT}{dt}$, $\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}$, $\frac{d\mu'_\pi}{dt}$ та $\frac{d(\nabla\mu'_\pi)^L}{dt}$, одержуємо узагальнене рівняння Ґіббса

$$df = - s dT + \rho^{-1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : d\hat{\mathbf{e}} - \rho_m d\mu'_\pi + \boldsymbol{\pi}_m \cdot d(\nabla\mu'_\pi)^L , \tag{18}$$

вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s = - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T^2} - \rho(\nabla\mu'_\pi)^i \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} \tag{19}$$

та диференціальне рівняння, що пов'язує оборотну складову ґрадієнта величини μ'_π, локальне поле ґрадієнта цієї величини та вектор локального зміщення маси, віднесений до густини:

$$(\nabla\mu'_\pi)^L - (\nabla\mu'_\pi)^r = d_m \frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2} . \tag{20}$$

Зазначимо, що за структурою рівняння (20) схоже до так званого рівняння «балансу міжмолекулярних сил», яке у межах ґрадієнтної теорії п'єзоелектриків пов'язує вектор поляризації і вектори напруженостей локального й макроскопічного електричного полів [11, 12].

Рівняння Ґіббса (18), вираз для виробництва ентропії (19) і диференціальне рівняння (20) є основою для формулювання визначальних співвідношень моделі локально ґрадієнтної термопружності.

2.2. Визначальні рівняння. З огляду на незалежність параметрів T, μ'_π, $(\nabla\mu'_\pi)^L$ та $\hat{\mathbf{e}}$ зі співвідношення Ґіббса (18) одержуємо такі рівняння стану:

$$s = - \left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{\hat{\mathbf{e}},\mu'_\pi,(\nabla\mu'_\pi)^L} , \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \rho \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}}\right|_{T,\mu'_\pi,(\nabla\mu'_\pi)^L} ,$$

$$\rho_m = - \left.\frac{\partial f}{\partial \mu'_\pi}\right|_{T,\hat{\mathbf{e}},(\nabla\mu'_\pi)^L} , \qquad \boldsymbol{\pi}_m = \left.\frac{\partial f}{\partial (\nabla\mu'_\pi)^L}\right|_{T,\hat{\mathbf{e}},\mu'_\pi} . \tag{21}$$

Розвинемо узагальнену вільну енергію f за збуреннями параметрів стану і для малих збурень обмежимося у цьому розвиненні квадратичними членами. Тоді для ізотропного початково однорідного середовища маємо

$$f = f_0 - s_0\tilde{T} - \frac{C_V}{2T_0}\tilde{T}^2 + \frac{1}{2\rho_0}\left(K - \frac{2}{3}G\right)I_1^2 + \frac{1}{\rho_0}GI_2 - \frac{1}{\rho_0}K\alpha_t I_1\tilde{T} -$$
$$- \frac{1}{2}d_\mu\tilde{\mu}'^2_\pi - \frac{1}{\rho_0}K\alpha_\mu I_1\tilde{\mu}'_\pi - \beta_{T\mu}\tilde{\mu}'_\pi\tilde{T} - \frac{1}{2}\chi_m(\nabla\mu'_\pi)^L \cdot (\nabla\mu'_\pi)^L . \tag{22}$$

Тут $\tilde{\mu}'_\pi = \mu'_\pi - \mu'_{\pi 0}$; $\tilde{T} = T - T_0$; $I_1 = \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{I}} \equiv \mathbf{e}$, $I_2 = \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}$ – перший та другий інваріанти тензора деформації відповідно; K – модуль об'ємного стиску за сталих температури та потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$; G – модуль зсуву; α_t – температурний коефіцієнт об'ємного розширення за сталого потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$; α_μ – коефіцієнт об'ємного розширення, зумовленого локальним зміщенням маси за сталої температури; C_V – питома теплоємність за незмінних деформації та потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$; $\beta_{T\mu}$, d_μ – ізотермо-ізохоричні коефіцієнти залежності ентропії і густини наведеної маси від потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$; χ_m – коефіцієнт, який характеризує локальне зміщення маси, зумовлене полем $(\nabla\tilde{\mu}'_\pi)^L$; f_0, s_0, T_0 та $\mu'_{\pi 0}$ – значення енергії f, ентропії, температури та зведеного потенціалу μ'_π у вихідному стані, в якому також $\rho_m = 0$, $(\nabla\mu'_\pi)^L = 0$, $\boldsymbol{\pi}_m = 0$, $\hat{\mathbf{e}} = 0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 0$. Отже, на основі (21) та (22) можемо записати такі лінійні рівняння стану:

$$s = s_0 + \frac{C_V}{T_0}\tilde{T} + \frac{1}{\rho_0}K\alpha_t e + \beta_{T\mu}\tilde{\mu}'_\pi ,$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2G\hat{\mathbf{e}} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)e - K\alpha_t\tilde{T} - K\alpha_\mu\tilde{\mu}'_\pi\right]\hat{\mathbf{I}},$$

$$\rho_m = d_\mu\tilde{\mu}'_\pi + \frac{1}{\rho_0}K\alpha_\mu\, e + \beta_{T\mu}\tilde{T}\,, \qquad (23)$$

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\,\chi_m(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^L\,. \qquad (24)$$

Враховуючи диференціальне рівняння (20), визначальне співвідношення (24) для віднесеного до густини вектора локального зміщення маси запишемо так:

$$\boldsymbol{\pi}_m + \chi_m d_m\,\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2} = -\,\chi_m(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r\,. \qquad (25)$$

Кінетичні співвідношення моделі отримаємо, виходячи із рівняння (19) для виробництва ентропії, яке подамо у вигляді

$$\sigma_s = \mathbf{j}_1\cdot\mathbf{X}_1 + \mathbf{j}_2\cdot\mathbf{X}_2\,,$$

де $\mathbf{j}_1 = \mathbf{J}_q$, $\mathbf{j}_2 = \rho\dfrac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}$ – термодинамічні потоки, а $\mathbf{X}_1 = -\dfrac{\boldsymbol{\nabla}T}{T^2}$, $\mathbf{X}_2 = -\dfrac{1}{T}(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^i$ – термодинамічні сили. Звідси, приймаючи, що термодинамічні потоки $\mathbf{j}_k$ є лінійними функціями термодинамічних сил $\mathbf{X}_k$, $k = 1, 2$, одержимо такі кінетичні рівняння:

$$\mathbf{j}_k = L_{k1}\mathbf{X}_1 + L_{k2}\mathbf{X}_2\,, \qquad k = 1, 2\,.$$

Тут L_{kj}, $k, j = 1, 2$, – кінетичні коефіцієнти. З огляду на прийняті позначення кінетичні рівняння запишемо так:

$$\mathbf{J}_q = -\,\lambda_T\boldsymbol{\nabla}T + \lambda_{T\mu}(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^i, \qquad \rho\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} = \lambda_\mu(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^i + \lambda_{\mu T}\boldsymbol{\nabla}T\,, \qquad (26)$$

де $\lambda_\mu = -\dfrac{L_{22}}{T}$, $\lambda_{\mu T} = -\dfrac{L_{21}}{T^2}$, $\lambda_{T\mu} = -\dfrac{L_{12}}{T}$, $\lambda_T = \dfrac{L_{11}}{T^2}$.

Якщо тепер у рівняннях (26) врахувати, що $(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^i = \boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi - (\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r$, а також формулу (25), то у підсумку прийдемо до таких реологічних визначальних співвідношень:

$$\mathbf{J}_q - \frac{\lambda_{T\mu}}{\chi_m}\boldsymbol{\pi}_m - \lambda_{T\mu}d_m\,\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2} = -\,\lambda_T\boldsymbol{\nabla}T + \lambda_{T\mu}\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi\,, \qquad (27)$$

$$\boldsymbol{\pi}_m - \rho\frac{\chi_m}{\lambda_\mu}\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} + \chi_m d_m\,\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2} = -\,\chi_m\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi - \chi_m\,\frac{\lambda_{\mu T}}{\lambda_\mu}\boldsymbol{\nabla}T\,. \qquad (28)$$

Зазначимо, що наявність у рівнянні (28) ґрадієнта температури та доданка, пропорційного похідній за часом першого порядку від віднесеного до густини вектора локального зміщення маси, зумовлена врахуванням необоротності процесу локального зміщення маси. Доданок, що містить похідну за часом другого порядку, є наслідком врахування інерційності цього процесу.

3. Ключові рівняння у лінійному наближенні. Рівняння балансу маси (3), рівняння балансу ентропії (6) та імпульсу (13), формула (8), що пов'язує густину наведеної маси з вектором локального зміщення маси, визначальні співвідношення (23), (27) і (28) разом зі співвідношеннями Коші (16_1) складають повну систему рівнянь ґрадієнтної термомеханіки ізотропних тіл із урахуванням інерційності й необоротності процесу локального зміщення маси. Запишемо її ключову форму в лінеаризованому наближенні відносно збурень функцій переміщення $\mathbf{u}$, температури $\tilde{T}$ і потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$. Підставивши визначальні співвідношення (23), (27) і (28) і співвідношення Коші (16_1) у рівняння руху (13), балансу ентропії (6) і вираз (8), для знаходження цих функцій отримаємо

$$\left(K+\frac{1}{3}G\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+G\Delta\,\mathbf{u}-K\alpha_t\nabla\tilde{T}-K\alpha_\mu\nabla\tilde{\mu}'_\pi+\rho_0\mathbf{F}=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\,, \tag{29}$$

$$\Delta\tilde{T}=\rho_0\frac{\bar{C}_V}{\bar{\lambda}_T}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t}+T_0\frac{K\bar{\alpha}_t}{\bar{\lambda}_T}\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{u})}{\partial t}+\rho_0T_0\frac{\bar{\beta}_{T\mu}}{\bar{\lambda}_T}\frac{\partial\tilde{\mu}'_\pi}{\partial t}-\frac{\rho_0}{\bar{\lambda}_T}\Re\,, \tag{30}$$

$$\Delta\tilde{\mu}'_\pi-\frac{d_\mu}{\chi_m}\mathcal{E}_\mu(\tilde{\mu}'_\pi)=\frac{K\alpha_\mu}{\rho_0\chi_m}\mathcal{E}_u(\nabla\cdot\mathbf{u})+\frac{\beta_{T\mu}}{\chi_m}\mathcal{E}_T(\tilde{T})+\rho_0\Re\frac{\lambda_{\mu T}}{\lambda_\mu\bar{\lambda}_T}\,. \tag{31}$$

Тут $\quad \bar{\lambda}_T=\lambda_T+\dfrac{\lambda_{T\mu}\lambda_{\mu T}}{\lambda_\mu}\,,\quad \bar{C}_V=C_V-\dfrac{\beta_{T\mu}\lambda_{T\mu}}{\lambda_\mu}\,,\quad \bar{\alpha}_t=\alpha_t-\dfrac{\alpha_\mu}{T_0}\dfrac{\lambda_{T\mu}}{\lambda_\mu}\,,$

$$\bar{\beta}_{T\mu}=\beta_{T\mu}-\frac{d_\mu}{T_0}\frac{\lambda_{T\mu}}{\lambda_\mu}\,,$$

а також введено оператори $\mathcal{E}_j=1-\rho_0\dfrac{\chi_m}{\lambda_\mu}I_j\dfrac{\partial}{\partial t}+\chi_m d_m\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$, $j=\{\mu,u,T\}$, де

$$I_\mu=1+T_0\frac{\lambda_{\mu T}\bar{\beta}_{T\mu}}{d_\mu\bar{\lambda}_T}\,,\qquad I_u=1+T_0\frac{\lambda_{\mu T}\bar{\alpha}_t}{\alpha_\mu\bar{\lambda}_T}\,,\qquad I_T=1+\frac{\lambda_{\mu T}\bar{C}_V}{\beta_{T\mu}\bar{\lambda}_T}\,.$$

Бачимо, що врахування необоротності та інерційності локального зміщення маси проявилось у виникненні динамічних доданків у рівнянні для потенціалу μ'_π: тепер воно містить доданки з часовими похідними першого та другого порядку не лише від цього потенціалу, а й від температури та об'ємних деформацій. Система рівнянь (29)–(31) разом із відповідними крайовими умовами може бути застосована, зокрема, для опису перехідних режимів становлення приповерхневих неоднорідностей напружено-деформованого стану тіла та дослідження спектрів сигналів акустичної емісії, спричиненої утворенням поверхні. Вона буде корисна для вивчення пружних хвиль ультра- та гіперчастотного діапазонів, а також збурень, спричинених ударними діями.

4. Висновки. Отримано повну систему співвідношень нелокальної термомеханіки ґрадієнтного типу за урахування інерційності та необоротності процесу локального зміщення маси. Показано, зокрема, що визначальне співвідношення для віднесеного до густини вектора локального зміщення маси у цьому випадку є реологічним. Записано відповідну ключову систему лінеаризованих рівнянь. Встановлено, що рівняння для потенціалу μ'_π має динамічний характер за рахунок нових доданків, пропорційних часовим похідним першого та другого порядків від цього потенціалу, кульової складової тензора деформації і температури.

Одержана тут система рівнянь може бути використана для дослідження перехідних режимів становлення приповерхневої неоднорідності напружено-деформованого стану твердих деформівних тіл, спектрів сигналів акустичної емісії, спричиненої утворенням поверхні, високочастотних механічних хвиль і напружено-деформованого стану термопружних тіл за дії швидкозмінного навантаження.

1. *Аэро Е. Л., Кувшинский Е. В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. – 1960. – **2**, Вып. 7. – С. 1399–1409.
2. *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 12. – С. 19–23.
3. *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С.* Термодинамічні аспекти узагальненої термомеханіки // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 8. – С. 34–37.
4. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 45–49.

5. *Вдовин В. Е., Кунин И. А.* Теория упругости с пространственной дисперсией – трехмерная сложная структура // Прикл. математика и механика. – 1966. – **30**, № 6. – С. 1071–1080.
6. *Грицина О., Нагірний Т., Червінка К.* Локально градієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 72–83.
7. *Гроот де С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – Москва: Мир, 1964. – 456 с.
8. *Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Рівняння термомеханіки деформівного твердого тіла з урахуванням необоротності локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 169–177.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1974. – 831 с.
10. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 416 с.
11. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – Москва: Мир, 1991. – 560 с.
12. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. – Москва: Мир, 1984. – 159 с.
13. *Шешенина О. А.* Нелинейные плоские продольные стационарные волны в градиентно упругой среде // Прикл. мех. и технологии машиностроения. – 2003. – Вып. 2 (6). – С. 144–151.
14. *Beran M. J., Mc Coy J. J.* The use of strain gradient theory for analysis of random media // Int. J. Solids and Struct. – 1970. – **6**. – P. 1267–1275.
15. *Burak Ya., Kondrat V., Hrytsyna O.* An introduction of the local displacements of mass and electric charge phenomena into the model of the mechanics of polarized electromagnetic solids // J. Mech. Mater. and Struct. – 2008. – **3**, No. 6. – P. 1037–1046.
16. *Eringen A. C.* A unified theory of thermomechanical materials // Int. J. Eng. Sci. – 1966. – **4**, No. 2. – P. 179–202.
17. *Eringen A. C.* Mechanics of micromorphic continua // IUTAM Symp.: Mechanics of Generalized Continua (Freudenstad-Stuttgard, Germany, 1967) / Ed. E. Kröner. – Berlin: Springer, 1968.– P. 18–35.
18. *Farahmand H., Arabnejad S.* Developing a novel finite elastic approach in strain gradient theory for microstructures // Int. J. Multisc. Comput. Eng. – 2010. – **8**, No. 4. – P. 441–446.
19. *Forest S., Cordero N. M., Busso E. P.* First vs. second gradient of strain theory for capillarity effects in an elastic fluid at small length scales // Comput. Mater. Sci. – 2011. – **50,** No. 4. – P. 1299–1304.
20. *Germain P.* The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: Microstructure // SIAM J. Appl. Math. – 1973. – **25**, No. 3. – P. 556–575.
21. *Kondrat V., Hrytsyna O.* Mechanical and electromagnetic wave interaction in linear isotropic dielectrics with local mass displacement and polarization inertia // Vibrations in Physical Systems / Eds C. Cempel, M. W. Dobry. – XXIV. – Poznan, 2010. – P. 227–232.
22. *Maugin G. A.* Deformable dielectrics II. Voigt's intramolecular force balance in elastic dielectrics // Arch. Mech. – 1977. – **29**. – P. 143–151.
23. *Mindlin R. D.* Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity // Int. J. Solids and Struct. – 1965. – **1**. – P. 417–438.
24. *Rogula D.* Influence of spatial acoustic dispersion on dynamical properties if dislocations. I // Bull. de l'Acad. Polonaise des Sci. Sér. des sci. techniques. – 1965. – **13**. – P. 337–343.
25. *Tang Z., Shen S., Atluri S. N.* Analysis of materials with strain-gradient effects: a meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach, with nodal displacements only // Comput. Model. Eng. & Sci. – 2003. – **4**, No. 1. – P. 177–196.
26. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple-stresses // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1962. – **11**. – P. 385–414.
27. *Toupin R. A.* The elastic dielectric // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1956. – **5**. – P. 849–915.
28. *Truesdell C., Toupin R. A.* The classical field theory. – Berlin: Springer, 1960. – P. 226–793. – (Handbuch der Physik / Ed. S. Flügge. – Vol. III/1).
29. *Yavariy A., Marsdenz J. E.* Covariant balance laws in continua with microstructure // Rep. on Math. Phys. – 2009. – **63**, No. 1. – P. 1–42.
30. *Yi Dake, Wang TC, Xiao ZM.* Strain gradient theory based on a new framework of non-local model // Acta Mech. – 2010. – **212**, No. 1-2. – P. 51–67.

СООТНОШЕНИЯ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕРМОМЕХАНИКИ С УЧЕТОМ НЕОБРАТИМОСТИ И ИНЕРЦИОННОСТИ ЛОКАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ МАССЫ

Получена полная система соотношений нелокальной теории градиентного типа, описывающая процессы теплопроводности, деформирования и локального смещения массы с учетом инерционности и необратимости последнего. Определяющее соотношение для отнесенного к плотности вектора локального смещения массы в этом случае является реологическим, а уравнение для потенциала μ'_π, *характеризующего влияние локального смещения массы на внутреннюю энергию тела, имеет динамический характер благодаря наличию слагаемых, содержащих производные по времени первого и второго порядков от потенциала* μ'_π, *шаровой составляющей тензора деформации и температуры.*

RELATIONS OF GRADIENT THERMOMECHANICS TAKING INTO ACCOUNT THE IRREVERSIBILITY AND INERTIA OF LOCAL DISPLACEMENT OF MASS

We obtained a complete set of relations of gradient type nonlocal theory which describes the processes of heat conduction, deformation and local mass displacement and takes into account its inertness and irreversibility. In this case the constitutive equation for specific local mass displacement vector is rheological. The equation for potential μ'_π, *characterizing the effect of local mass displacement on the body internal energy, has dynamical character due to presence of summands with first and second time derivatives of the potential* μ'_π, *the spherical component of the strain tensor and temperature.*

Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.10.10