УДК 519.614

П. О. Савенко, Л. П. Процах

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З НЕЛІНІЙНИМ ДВОВИМІРНИМ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ

Досліджується застосування методу скінченних різниць до розв'язування двоточкової крайової задачі для диференціального рівняння m-го порядку з нелінійним входженням двовимірного спектрального параметра в коефіцієнти рівняння і крайові умови. Обґрунтовано збіжність наближених розв'язків дискретизованих задач до точних розв'язків вихідної задачі.

1. Вступ. У роботі на прикладі двоточкової крайової задачі для лінійного диференціального рівняння m-го порядку, коефіцієнти якого є неперервними функціями дійсного параметра t і голоморфними функціями від двомірного спектрального параметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \subset \boldsymbol{\Lambda}$, що входить також нелінійно в крайові умови, подається метод, який дозволяє обґрунтовувати існування і знаходити зв'язні компоненти спектра. При знаходженні наближених розв'язків чисельними методами вихідна задача $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u} = 0$ у функціональних банахових просторах апроксимується відповідною дискретною задачею $\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u} = 0$ у скінченновимірних просторах. З використанням теорії неявних функцій [2, 5] задача знаходження зв'язних компонент спектра зводиться до розв'язування відповідної задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку [8]. Для знаходження початкової умови в задачі Коші розв'язується допоміжна однопараметрична нелінійна спектральна задача. Збіжність наближених розв'язків цієї задачі до точних ґрунтується на результатах робіт [3, 4, 7, 11–16].

2. Формулювання задачі та побудова дискретного аналога. Розглянемо двоточкову крайову задачу для лінійного диференціального рівняння m-го порядку:

$$L(\boldsymbol{\lambda})u(t) \equiv \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(t,\boldsymbol{\lambda})u^{(k)}(t) = 0, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

$$\ell_i(\boldsymbol{\lambda})u \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \left[\alpha_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})u^{(k)}(0) + \beta_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})u^{(k)}(1)\right] = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \subset \boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ – область у комплексному просторі $\mathbb{C}^2$, причому Λ_1, Λ_2 – обмежені відкриті однозв'язні опуклі множини в $\mathbb{C}$. Покладаємо, що коефіцієнти $\alpha_k(t,\boldsymbol{\lambda})$, $\alpha_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})$, $\beta_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}$, $i = 1,2,\ldots,m$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, $\alpha_m(t,\boldsymbol{\lambda}) = 1$, причому $\alpha_k(t,\boldsymbol{\lambda})$ – досить гладкі функції від t на відрізку $[0,1]$ для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$, і $\alpha_k(t,\boldsymbol{\lambda})$, $\alpha_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})$, $\beta_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})$ – голоморфні функції від $\boldsymbol{\lambda}$ на $\boldsymbol{\Lambda}$; граничні умови (2) є лінійно незалежними при всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$. Покладаємо також, що для коефіцієнтів $\alpha_k(t,\boldsymbol{\lambda})$ виконується умова

$$\max_{0\le t\le 1}\max_{\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{\Lambda}_0}\left|\alpha_k(t,\boldsymbol{\lambda})\right| \le c(\boldsymbol{\Lambda}_0) = \text{const}, \qquad k = 0,1,\ldots,m-1.$$

Відомо [2], що розв'язком крайової задачі з комплексними коефіцієнтами в рівнянні (1) і крайових умовах (2) при фіксованому $\boldsymbol{\lambda}$ є комплексно-значна функція $u(t) = x(t) + iy(t)$, де $x(t), y(t) \in C^{(n)}[0,1]$. Очевидно, що $u(t) \equiv 0$ при $t \in [0,1]$ є розв'язком задачі (1), (2). Необхідно знайти такі значення $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ з $\boldsymbol{\Lambda}$, при яких задача (1), (2) має ненульові розв'язки, тобто знайти власні значення цієї задачі.

Для знаходження наближеного розв'язку задачі (1), (2) аналогічно до [7] будемо застосовувати метод скінченних різниць. Із цією метою на відрізку $[0,1]$ побудуємо рівномірну сітку в точках $t = jh$, де $h = 1/p$, $j = 0, 1, \ldots, p$. При заміні похідних у вузлах сітки деякими їхніми різницевими аналогами будемо використовувати збіжні формули чисельного диференціювання, записані в комплексній формі, і їхні аналоги для дійсної і уявної частин:

$$u^{(k)}(t) = \frac{1}{h^k} \sum_{g=-r}^{s} a_g u(t + gh) + r_h(u, t),$$

$$x^{(k)}(t) = \frac{1}{h^k} \sum_{g=-r}^{s} a_g x(t + gh) + r_h(x, t),$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{1}{h^k} \sum_{g=-r}^{s} a_g y(t + gh) + r_h(y, t), \tag{3}$$

де

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \le t \le 1} |r_h(u, t)| \equiv \lim_{h \to 0} \max_{0 \le t \le 1} \left[r_h^2(x, t) + r_h^2(y, t) \right]^{1/2} = 0 \tag{4}$$

– умова збіжності. У підсумку одержимо скінченний набір різницевих аналогів похідних для функції $u(t)$ вигляду

$$\left[d_h^k \mathbf{u}^h \right]_j = \frac{1}{h^k} \sum_{g=-r}^{s} a_g \left[\mathbf{u}^h \right]_{j+g}, \qquad \left[\mathbf{u}^h \right]_q = u_q^h. \tag{5}$$

Тут $\mathbf{u}^h$ – деякий вектор; коефіцієнти a_g, а також величини s, r, $r_h(u, t)$ залежать від порядку похідної і типу формули в наборі.

Для обчислення похідних біля крайніх точок відрізка $[0,1]$ необхідно обчислювати значення функції $u(t)$ за його межами. При цьому використовуємо аналітичне продовження функції $u(t)$ за формулою Тейлора за межі відрізка $[0,1]$:

$$T(u) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m+\mu} u^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, & t < 0, \\ u(t), & 0 \le t \le 1, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m+\mu} u^{(k)}(1) \frac{(t-1)^k}{k!}, & t > 1, \end{cases}$$

у припущенні, що функція u є $m + \mu$ разів неперервно диференційовною на відрізку $[0,1]$[1]. Зафіксуємо цілі числа $\omega \ge 0$ і $\tau \ge 0$, що дорівнюють числу необхідних вузлів, які знаходяться відповідно зліва та справа від відрізка $[0,1]$, покладаючи $\omega + \tau = m$, і запишемо дискретний аналог задачі (1), (2) у точках $t_j = jh$. Заміняючи похідні $u^{(k)}(jh)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, у рівнянні (1) і крайових умовах (2) їхніми різницевими аналогами та групуючи отримані вирази при $u(qh)$ в порядку зростання $q = -\omega, \ldots, n + \tau$, одержимо при

---

[1] Зауважимо, що для обчислення похідних біля крайніх точок відрізка $[0,1]$ можна використовувати також формули чисельного диференціювання, отримані на підставі інтерполяційних формул Ньютона для рівновіддалених вузлів уперед (біля точки $t = 0$) і назад (біля точки $t = 1$).

будь-якому фіксованому $n \in \mathbb{N}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку $(n = m + p + 1)$ відносно вектора невідомих

$$\mathbf{u}^h = (u_{-\omega}^h, \ldots, u_{p+\tau}^h) \in \mathbb{C}^n, \qquad u_q^h = u(qh).$$

Отриману таким чином однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку у векторному записі подамо у вигляді

$$\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u}^h = 0. \tag{6}$$

Відзначимо, що коефіцієнти матриці $a_{ij}^n(\boldsymbol{\lambda})$ цієї системи є голоморфними функціями векторного параметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$.

Систему рівнянь (6) будемо розглядати як задачу на знаходження наближених власних значень: необхідно знайти таку множину значень параметрів $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0)$, що належать до $\boldsymbol{\Lambda}$, при яких однорідна система (6) буде мати відмінні від тривіального розв'язки.

Число $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0) \in \boldsymbol{\Lambda}$ буде власним значенням задачі (6), якщо точка $\boldsymbol{\lambda}^0$ є коренем рівняння [6]

$$\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2) = \det \begin{Vmatrix} a_{11}^n(\lambda_1, \lambda_2) & a_{12}^n(\lambda_1, \lambda_2) & \ldots & a_{1n}^n(\lambda_1, \lambda_2) \\ a_{21}^n(\lambda_1, \lambda_2) & a_{22}^n(\lambda_1, \lambda_2) & \ldots & a_{2n}^n(\lambda_1, \lambda_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^n(\lambda_1, \lambda_2) & a_{n2}^n(\lambda_1, \lambda_2) & \ldots & a_{nn}^n(\lambda_1, \lambda_2) \end{Vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Знаходження множини розв'язків рівняння (7) будемо розглядати як задачу на знаходження неявно заданої функції $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$ або $\lambda_1 = \lambda_1(\lambda_2)$. Теорема про неявно задані функції [2] визначає умови існування розв'язків рівняння (7) і дозволяє звести цю задачу до чисельного розв'язування відповідної задачі Коші

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = -\frac{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}}{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2}}, \tag{8}$$

$$\lambda_2(\lambda_1^n) = \lambda_2^n = \alpha \lambda_1^n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

у випадку, якщо $\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1^0, \lambda_2^0)}{\partial \lambda_2} \neq 0$ і відома початкова умова (9).

Для визначення початкової умови (9) паралельно будемо розглядати допоміжну, відповідну (1), (2), однопараметричну спектральну задачу на «комплексній прямій» $\lambda_2 = \alpha \lambda_1$:

$$L_\alpha(\lambda_1)u(t) \equiv \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(t, \lambda_1, \alpha\lambda_1) u^{(k)}(t) = 0, \qquad 0 \le t \le 1,$$

$$\ell_{i,\alpha}(\lambda_1)u \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \left[\alpha_{i,k}(\lambda_1, \alpha\lambda_1)u^{(k)}(0) + \beta_{i,k}(\lambda_1, \alpha\lambda_1)u^{(k)}(1)\right] = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \tag{10}$$

де $\tilde{\alpha}_k(t, \lambda_1) = \alpha_k(t, \lambda_1, \alpha\lambda_1)$, $\tilde{\alpha}_{i,k}(\lambda_1) = \alpha_{i,k}(\lambda_1, \alpha\lambda_1)$, $\tilde{\beta}_{i,k}(\lambda_1) = \beta_{i,k}(\lambda_1, \alpha\lambda_1)$, α – дійсний параметр, який вибираємо так, щоб перетин «комплексної прямої» $\lambda_2 = \alpha\lambda_1$ з областю $\boldsymbol{\Lambda}$ (який позначимо через $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$) був непустим. Область зміни параметра λ_1, що відповідає $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$, позначимо через $\Lambda_{\alpha,1}$. Покладаючи в (6) $\lambda_2 = \alpha\lambda_1$, одержуємо векторний запис дискретизованої нелінійної однопараметричної спектральної задачі:

$$\mathcal{A}_{n,\alpha}(\lambda_1, \alpha\lambda_1)\mathbf{u}^h = 0, \qquad \lambda_1 \in \Lambda_{\alpha,1}. \tag{11}$$

Рівняння відносно параметра λ_1, відповідне (11), набуває вигляду

$$\Psi_{n,\alpha}(\lambda_1, \alpha\lambda_1) \equiv \det\left(\mathcal{A}_{n,\alpha}(\lambda_1, \alpha\lambda_1)\right) = 0\,, \tag{12}$$

розв'язуючи яке, знаходимо початкові умови задачі Коші (9).

3. Збіжність наближених розв'язків до точних. На підставі (7) при $n \in \mathbb{N}$ одержуємо функціональну послідовність визначників $\{\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})\}$ від двох змінних $(\lambda_1, \lambda_2) = \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$, елементи $a_{ij}^n(\lambda_1, \lambda_2)$ яких відповідно до умов задачі (1), (2) і умов побудови дискретного аналога цієї задачі (6) є голоморфними функціями від λ_1, λ_2. Існування і неперервність частинних похідних $\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1}$ і $\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_2}$ стверджує наступна

Лема 1. *Нехай елементами $a_{ij}^n(\lambda_1, \lambda_2)$ матриці $\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)$ є неперервно диференційовні функції від параметрів λ_1, λ_2. Тоді частинні похідні $\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_j}$, $j = 1, 2$, існують, неперервні й визначаться за формулами*

$$\frac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det \begin{Vmatrix} a_{11}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \ldots & a_{1,j-1}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \dfrac{\partial a_{1,j}^n(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_j} & a_{1,j+1}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \ldots & a_{1,n}^n(\lambda_1,\lambda_2) \\ a_{21}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \ldots & a_{2,j-1}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \dfrac{\partial a_{2,j}^n(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_j} & a_{2,j+1}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \ldots & a_{2,n}^n(\lambda_1,\lambda_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \ldots & a_{n,j-1}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \dfrac{\partial a_{n,j}^n(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_j} & a_{n,j+1}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \ldots & a_{n,n}^n(\lambda_1,\lambda_2) \end{Vmatrix}.$$

Для д о в е д е н н я леми 1 застосовуємо метод математичної індукції [9]. ◊

Надалі для обґрунтування збіжності наближених розв'язків задачі (6) до точних розв'язків задачі (1), (2) припускаємо, що для послідовності $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}$ виконуються наступні умови:

Умова I. При $n \to \infty$ визначник нескінченного порядку $\Psi(\lambda_1, \lambda_2)$ є збіжним для будь-яких $(\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}$, тобто виконуються умови теореми Пуанкаре [1].

Умова II. Функціональна послідовність $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}$ рівномірно збігається на кожній компактній підмножині множини $\boldsymbol{\Lambda}$.

Таким чином, з голоморфності послідовності $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}$ та умов ***I, II*** випливає виконання умов теореми Вейєрштрасса [10], яка стверджує, що гранична функція $\Psi(\lambda_1, \lambda_2)$ голоморфна на $\boldsymbol{\Lambda}$, а послідовності $\left\{\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_2}\right\}$ збігаються до $\dfrac{\partial\Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1}$ і $\dfrac{\partial\Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_2}$ відповідно. Ця збіжність рівномірна на кожній компактній підмножині області $\boldsymbol{\Lambda}$.

Для застосування результатів з робіт [4, 7] стосовно обґрунтування збіжності наближених розв'язків до точних запишемо (1), (2) в операторному вигляді. Для цього означимо [7]:

$$E = \{x \mid x = u \in C^{(m)}[0,1],\ \ \|x\|_E = \|u\|_{C^{(m)}[0,1]}\},$$

$$F = \{y \mid y = (v, v_1, \ldots, v_m) \in C[0,1] \times \mathbb{C}^m,$$

$$\|y\|_F = \max\{\max_{0 \le t \le 1}|v(t)|,\ \max_{i=1,2,\ldots,m}|v_i|\}\},$$

$$E_n = \{x_n \mid x_n = u^h = (u^h_{-\omega}, \ldots, u^h_{n+\tau}) \in \mathbb{C}^{m+n+1},\ \ \|x\|_{E_n} = \left\|u^h\right\|_{\mathbb{C}^{m+n+1}}\},$$

$$F_n = \{y_n \mid y_n = (v_0^h, \ldots, v_n^h; v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{C}^{m+n+1},$$

$$\|y_n\|_F = \max\{\max_{j=0,1,\ldots,n}\left|v_j^h\right|,\ \max_{i=1,2,\ldots,m}|v_i|\}\}, \tag{13}$$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})x = \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})u = \left(L(\boldsymbol{\lambda})u;\ \ell_1(\boldsymbol{\lambda})u, \ldots, \ell_m(\boldsymbol{\lambda})u\right) \in F \qquad \forall x \in E,$$

$$\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})x_n = \mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u}^h = \left(L_n(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u}^h;\ \ell_{1,h}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u}^h, \ldots, \ell_{m,h}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u}^h\right) \in F_n$$

$$\forall x_n \in E_n. \tag{14}$$

З наведених означень випливає, що E, F, E_n, F_n − банахові простори, а задачі (1), (2) і (6) рівносильні відповідно операторним рівнянням

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})x = 0, \qquad x \in E, \qquad \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}) : E \to F, \tag{15}$$

$$\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})x_n = 0, \qquad x_n \in E_n, \qquad \mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda}) : E_n \to F_n. \tag{16}$$

Звуження операторних рівнянь (15), (16) на область $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$ подамо у вигляді

$$\mathcal{A}_\alpha(\boldsymbol{\lambda})x = 0, \qquad x \in E, \qquad \mathcal{A}_\alpha(\boldsymbol{\lambda}) : E \to F, \tag{17}$$

$$\mathcal{A}_{n,\alpha}(\boldsymbol{\lambda})x_n = 0, \qquad x_n \in E_n, \qquad \mathcal{A}_{n,\alpha}(\boldsymbol{\lambda}) : E_n \to F_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Введемо у розгляд згідно з [4, 7] лінійні обмежені оператори (зв'язуючі відображення)

$$P_n : E \to E_n, \qquad Q_n : F \to F_n, \tag{19}$$

де

$$P_n x = P_n u(t) = \left(Tu(-\omega h), \ldots, Tu((p+\tau)h)\right),$$

$$Q_n y = Q_n\left(v(t); v_1, \ldots, v_m\right) = \left(v(0), v(h), \ldots, v(nh); v_1, \ldots, v_m\right),$$

які мають такі властивості:

$$\|P_n x\|_{E_n} \to \|x\|_{E_n} \qquad \forall x \in E,$$

$$\|Q_n y\|_{F_n} \to \|y\|_{F_n} \qquad \forall y \in F. \tag{20}$$

Будемо припускати, що при $n \in \mathbb{N}$ виконуються наступні умови:

Умова 1°. Простори E, F, E_n, F_n банахові, а зв'язуючі оператори (19) лінійні й мають властивості (20).

Умова 2°. $\boldsymbol{\Lambda}$ − опукла відкрита область в $\mathbb{C}^2$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ і $\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})$ − голоморфні на $\boldsymbol{\Lambda}$ оператор-функції зі значеннями з $\mathcal{L}(E,F)$ і $\mathcal{L}(E_n, F_n)$ відповідно.

Умова 3°. При кожному фіксованому $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$ оператори $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ й $\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})$ фредгольмові.

Умова 4°. $\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda}) \to \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ властиво $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$.

Умова 5°. Норми $\|\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})\|$ рівномірно обмежені по n і $\boldsymbol{\lambda}$ на кожному компакті $\boldsymbol{\Lambda}_0 \subseteq \boldsymbol{\Lambda}$.

Умова 6°. Резольвентна множина $\rho(\mathcal{A}_\alpha) \neq \varnothing$, тобто $\sigma(\mathcal{A}_\alpha) \neq \boldsymbol{\Lambda}_\alpha$.

Оскільки область $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$, що відповідає одновимірній задачі (10), є підмножиною області $\boldsymbol{\Lambda}$, то звідси випливає, що на області $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$ для задач (17), (18) виконуються умови ***1°–6°***, тобто справджується теорема 1 з [4]. У цій теоремі для одновимірної нелінійної спектральної задачі (17) визначено необхідні й достатні умови збіжності відповідної послідовності власних значень наближених задач (18) до точного розв'язку задачі (17). Доведення часткового випадку цієї теореми безпосередньо для двоточкової крайової задачі (10) на підставі означень (13), (14) і обґрунтування виконання умов ***1°–6°*** при побудові дискретного аналога задачі (10) наведено в роботі [7]. Застосування цих результатів до двовимірної нелінійної спектральної задачі (1), (2) дозволяє визначити умови існування зв'язних компонент спектра в області $\boldsymbol{\Lambda}$ й побудувати відповідні чисельні алгоритми для їхнього знаходження.

Умови існування зв'язних компонент спектра двовимірної спектральної задачі (1), (2) при непустій множині розв'язків допоміжної однопараметричної задачі (10) випливають з такої теореми.

Теорема 1. *Нехай послідовність функцій* $\{\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})\}$ *голоморфна на області* $\boldsymbol{\Lambda}$, *рівномірно збігається на кожній компактній підмножині множини* $\boldsymbol{\Lambda}$ *і при* $n \in \mathbb{N}$ *похідна* $\dfrac{\partial \Psi_n}{\partial \lambda_2}$ *або* $\dfrac{\partial \Psi_n}{\partial \lambda_1}$ *відмінна від нуля на множині* $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$. *Нехай також на області* $\boldsymbol{\Lambda}$ *виконуються умови* ***1°–5°***, *а умова* ***6°*** *виконується на множині* $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$.

Тоді, якщо $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^0 = (\lambda_1^0, \alpha\lambda_1^0)$ *є власним значенням операторів* $\mathcal{A}$ *і* $\mathcal{A}_\alpha$ (*тобто* $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^0 \in \sigma(\mathcal{A}_\alpha) \in \sigma(\mathcal{A})$), *то існує послідовність власних значень* $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^n = (\lambda_1^n, \alpha\lambda_1^n) \in \sigma(\mathcal{A}_{\alpha,n})$, *що збігається до* $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^0$.

Якщо для визначеності покласти, що $\dfrac{\partial \Psi(\boldsymbol{\lambda}_\alpha^0)}{\partial \lambda_2} \neq 0$ *і* $\dfrac{\partial \Psi_n(\boldsymbol{\lambda}_\alpha^n)}{\partial \lambda_2} \neq 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$, *то в деякому малому околі точки* $(\lambda_1^0, \lambda_2^0) = (\lambda_1^0, \alpha\lambda_1^0)$ *існують:*

- *неперервно диференційовна функція* $\lambda_2 = \varphi(\lambda_1)$, *що описує однозв'язну спектральну компоненту оператор-функції* $A(\boldsymbol{\lambda})$;
- *послідовність неперервно диференційовних функцій* $\{\lambda_2^n = \varphi_n(\lambda_1)\}$, *що описують однозв'язні спектральні компоненти оператор-функцій* $\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})$ *при* $n \in \mathbb{N}$, *яка збігається до функції* $\lambda_2 = \varphi(\lambda_1)$.

Д о в е д е н н я.[2] З умови теореми про голоморфність послідовності функцій $\{\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})\}$ в області $\boldsymbol{\Lambda} \subset \mathbb{C}^2$ і рівномірної збіжності її на кожній компактній підмножині області $\boldsymbol{\Lambda}$ випливає виконання умов теореми Вей-

[2] При доведенні теореми використовуються теорема 1 із [4], теорема Вейєрштрасса [10], теорема про неявну функцію [2, 5].

єрштрасса [10]. Звідси випливає, що гранична функція $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$ голоморфна на $\boldsymbol{\Lambda}$, а послідовності $\left\{\dfrac{\partial\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_1}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\partial\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_2}\right\}$ на $\boldsymbol{\Lambda}$ збігаються до $\dfrac{\partial\Psi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_1}$ і $\dfrac{\partial\Psi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_2}$ відповідно. Ця збіжність рівномірна на кожній компактній підмножині області $\boldsymbol{\Lambda}$.

Оскільки $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$ є компактною підмножиною області $\boldsymbol{\Lambda}$, то звідси випливає виконання умов ***1°–5°*** на $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$. Приєднуючи сюди умову ***6°***, приходимо до висновку, що виконуються умови 1–6 теореми 1 з [4] для нелінійної однопараметричної спектральної задачі, відповідно до якої справджуються такі твердження:

(***i***) Якщо $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^0 = (\lambda_1^0, \alpha\lambda_1^0)$ – власне значення оператора $\mathcal{A}_\alpha$, то звідси випливає існування послідовності власних значень $\{\boldsymbol{\lambda}_\alpha^n\} = \{(\lambda_1^n, \alpha\lambda_1^n)\}$ операторів $A_{n,\alpha}$, яка належить до $\{\sigma(\mathcal{A}_{n,\alpha})\}$ і збіжна до $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^0 \in \sigma(\mathcal{A}_\alpha)$ при $n \in \mathbb{N}$.

(***ii***) Навпаки, якщо існує послідовність власних значень $\{\boldsymbol{\lambda}_\alpha^n\} = \{(\lambda_1^n, \alpha\lambda_1^n)\}$ операторів $\mathcal{A}_{\alpha,n}$, що належить до $\{\sigma(\mathcal{A}_{\alpha,n})\}$ і збігається до $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^0 = (\lambda_1^0, \alpha\lambda_1^0)$ при $n \in \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, то звідси випливає, що $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^0 \in \sigma(\mathcal{A}_\alpha) \in \sigma(\mathcal{A})$.

Крім того, із твердження (***i***) та умов теореми випливає, що послідовність власних значень $\{\boldsymbol{\lambda}_\alpha^n \in \sigma(\mathcal{A}_{n,\alpha})\}$ є послідовністю розв'язків рівнянь

$$\tilde{\Psi}_{n,\alpha}(\lambda_1) \equiv \Psi_{n,\alpha}(\lambda_1, \alpha\lambda_1) = 0 .$$

Розглянемо компактну підмножину

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha,\varepsilon} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1 \in \Lambda_{1,\alpha},\ \lambda_2 = \alpha_\varepsilon\lambda_1;\ \alpha_\varepsilon \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)\} \subset \boldsymbol{\Lambda} .$$

Компактність $\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha,\varepsilon}$ випливає з обмеженості області $\boldsymbol{\Lambda}$ і означення $\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha,\varepsilon}$. Для визначеності покладемо, що $\dfrac{\partial\Psi_n(\boldsymbol{\lambda}_k)}{\partial\lambda_2} \neq 0$ і $\dfrac{\partial\Psi(\boldsymbol{\lambda}^{(0)})}{\partial\lambda_2} \neq 0$. Оскільки функції $\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)$, $\Psi(\lambda_1, \lambda_2)$, $\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1}$ і $\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_2}$ при $n \in \mathbb{N}$ голоморфні на $\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha,\varepsilon}$, то для рівнянь

$$\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \tag{22}$$

виконуються умови теореми про неявну функцію [2], відповідно до якої в деяких малих околах точок $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^n = (\lambda_1^n, \alpha\lambda_1^n)$, $n \in \mathbb{N}$, і $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^0 = (\lambda_1^0, \alpha\lambda_1^0)$ існують неперервні функції

$$\lambda_{2,n}(\lambda_1) = \varphi_n(\lambda_1), \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\lambda_{2,0}(\lambda_1) = \varphi(\lambda_1),$$

що є відповідно розв'язками задачі Коші для рівнянь (21), (22), причому

$$\varphi_k(\lambda_1^n) = \alpha\lambda_1^n = \lambda_2^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\varphi(\lambda_1^0) = \lambda_2^0 = \alpha\lambda_1^0 .$$

Оскільки на підмножині $\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha,\varepsilon}$ множини $\boldsymbol{\Lambda}$ послідовності похідних $\left\{ \frac{\partial \Psi_n(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_1} \right\}$ і $\left\{ \frac{\partial \Psi_n(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_2} \right\}$ збігаються рівномірно відповідно до $\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_1}$ і $\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_2}$, то звідси випливає збіжність до функції $\varphi(\lambda_1)$ при $n \to \infty$ у деякому околі точки $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0) = (\lambda_1^0, \alpha\lambda_1^0)$ послідовності функцій $\{\varphi_n(\lambda_1)\}$, які є розв'язками наступних задач Коші:

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = \frac{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}}{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2}}, \qquad \lambda_2(\lambda_1^n) = \lambda_2^n = \alpha\lambda_1^n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = \frac{\dfrac{\partial \Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}}{\dfrac{\partial \Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2}}, \qquad \lambda_2(\lambda_1^0) = \lambda_2^0 = \alpha\lambda_1^0, \tag{24}$$

оскільки при $n \to \infty$ рівняння (23) співпадає з рівнянням (24).

Теорему доведено. ◊

4. Числовий приклад. Як приклад наведемо результати чисельного розв'язування нелінійної двопараметричної спектральної задачі для диференціального рівняння другого порядку

$$L(\boldsymbol{\lambda})u(t) \equiv u''(t) + (0.3\lambda_1 + 0.2\lambda_2^2)u'(t) + (0.1\lambda_1 + 0.1\lambda_2)u(t) = 0$$

з крайовими умовами

$$\ell_1(\boldsymbol{\lambda})u \equiv (0.1\lambda_1 - 0.1\lambda_2^2)u'(0) + (0.1\lambda_1^2 + 0.1\lambda_2)u(0) = 0,$$

$$\ell_2(\boldsymbol{\lambda})u \equiv (0.1\lambda_1^2 + 0.2\lambda_2)u'(1) + (0.1\lambda_1 - 0.1\lambda_2^2)u(1) = 0.$$

Покладали, що $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda \subset \mathbb{R}^2$. При розв'язуванні задачі Коші (23) використовували методи Рунге – Кутта й Адамса. Зв'язні компоненти спектра (криві лінії) наведено на рис. 1.

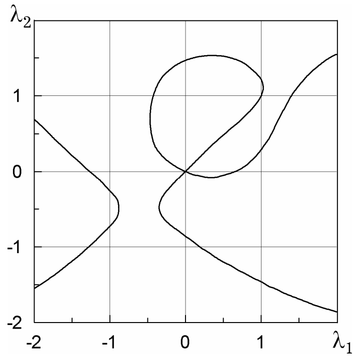

Рис. 1

5. Висновки. Зазначимо, що запропонований метод розв'язування двоточкової крайової задачі з нелінійним входженням двовимірних спектральних параметрів у коефіцієнти рівняння та крайові умови без особливих застережень переноситься на багатоточкову крайову задачу і на випадок вектор-функцій $\mathbf{u}(t)$. Тоді коефіцієнти $\alpha_k(t, \boldsymbol{\lambda})$, $\alpha_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})$, $\beta_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})$ необхідно розглядати як матриці-функції.

1. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. – Москва: Высш. шк., 1999. – 695 с.

2. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс дифференциальных уравнений. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. – 232 с.
3. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Тартуск. гос. ун-т, 1976. – 161 с.
   Vainikko G. M. Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. – Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1976.
4. *Вайникко Г. М., Карма О.* О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1974. – **14**, № 6. – С. 1393–1408.
5. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1., Ч. 1. – 368 с.
6. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. – Москва: Наука, 1984. – 295 с.
7. *Карма О.* О сходимости разностного метода в нелинийных проблемах собственных значений для линейных дифференциальных уравнений // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975. – С. 211–228.
8. *Савенко П. О., Процах Л. П.* Методи неявних функцій при розв'язуванні двопараметричних лінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 2. – С. 42–49.
9. *Савенко П. А., Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
10. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. Локальная теория. – Москва: Мир, 1965. – 166 с.
11. *Karma O. O.* Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions. I // Numer. Funct. Anal. Optimization. – 1996. – **17**. – P. 365–387.
12. *Karma O. O.* Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions. II // Numer. Funct. Anal. Optimization. – 1996. – **17**. – P. 389–408.
13. *S. Amir Hossein A. E. Tabatabaei, Alaeddin Malek, Elham Shakour.* Numerical solution for the nonlinear eigenvalue problems in bifurcation points // Appl. Math. and Comput. – 2008. – **195**, No. 2. – P. 397–401.
14. *Solov'ёv S. I.* Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems // Linear Algebra and its Appl. – 2006. – **41**, No. 1. – P. 210–229.
15. *Steinbach O., Unger G.* Convergence analysis of a Galerkin boundary element method for the Dirichlet Laplacian eigenvalue problem // Berichte aus dem Inst. für Numer. Mathematik: Bericht 2010/9. – 21 p.
    http://www.numerik.math.tu-graz.ac.at/berichte/
16. *Unger G.* Analysis of boundary element methods for Laplacian eigenvalue problems. – Graz: Verlag TU, 2009. – 111 p. – Monographic Ser. TU Graz «Computation in Engineering and Science», Vol. 6.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДВУХМЕРНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Исследуется применение метода конечных разностей к решению двухточечной краевой задачи для дифференциального уравнения m-го порядка с нелинейным вхождением двумерного спектрального параметра в коэффициенты уравнения и краевые условия. Обоснована сходимость приближенных решений дискретизированных задач к точным решениям исходной задачи.

NUMERICAL SOLUTIONS OF TWO-POINT BOUNDARY PROBLEM WITH NONLINEAR TWO-DIMENSIONAL SPECTRAL PARAMETER

The application of finite-difference method to solution of two-point boundary problem for the m-order differential equation with non-linear occurrence of two-dimensional spectral parameter in coefficients of equation and boundary conditions is investigated. The convergence of approximate solutions of discrete problems to exact solutions of initial problem is justified.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.02.10