

## ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

*Разработана трёхмерная модель динамической системы, состоящей из сферической оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью, с газовой полостью в центре. Динамика оболочки описывается уравнениями движения в постановке Кирхгофа – Лява, состояние газа в полости определяется уравнением баланса энергии, движение жидкости – волновым уравнением. Взаимодействие между компонентами системы устанавливается с помощью контактных граничных условий. Выполнено тестирование модели по математическим и физическим принципам.*

**1. Введение.** Объектом исследования в этой работе является динамическая система, состоящая из сферической оболочки, заполненной идеальной сжимаемой жидкостью. В центре оболочки может располагаться импульсный источник энергии (взрывчатое вещество, канал высоковольтного электрического разряда и т.п.), в результате действия которого образуется полость, заполненная газом или плазмой. Рассматриваемая система встречается в различных областях науки и техники. При хранении сжиженного газа под давлением, а также легко воспламеняющихся веществ, применяются сферические резервуары [14, 15]. Сферические емкости входят в состав оборудования технологических линий в химической промышленности [2, 24]. Также подобные модели применяются в биомеханике при рассмотрении глазного яблока как сферической оболочки, заполненной жидкостью [17, 25]. Кроме того, оболочки сферической формы применяются во взрывных камерах для моделирования и исследования взрывных процессов [8, 12]. Однако волновые процессы в этих системах рассматриваются преимущественно в приближении центральной или осевой симметрии [1, 18, 19, 21, 26, 27], что не позволяет учесть разнообразие условия закрепления оболочки и, тем самым, ограничивает применение результатов исследований в технических приложениях. Поэтому создание более универсальной модели является актуальной задачей в научном и практическом отношении.

Целью данной работы является построение математической модели для исследования процессов, возникающих в динамической системе, состоящей из сферической оболочки, заполненной жидкостью, с пузырьком газа в центре в трёхмерной постановке.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

- Составить систему уравнений исследуемой физической системы.
- Разработать алгоритм решения, применяя аппарат численных методов решения дифференциальных уравнений.
- Выполнить тестирование математической модели.

**2. Постановка задачи.** При построении математической модели для описания колебаний оболочки применяются гипотезы Кирхгофа – Лява [11]. Это дает возможность рассматривать перемещения в каждой точке оболочки, а также определять напряжения ( $\sigma_{ij}$ ) через перемещения срединной поверхности. Оболочка предполагается тонкой, однако учитываются моментные составляющие для возможности рассмотрения различных способов закрепления оболочки. Материал оболочки абсолютно упругий.

Жидкость предполагается идеальной, сжимаемой. Форма пузырька остаётся сферической в процессе его пульсаций. Учитываются кавитационные явления, возникающие в жидкости.

Для построения математической модели вводится сферическая система координат с началом в центре сферы. Тогда любая точка системы будет

иметь координаты  $M(\theta, \varphi, r)$ . Так как рассматривается срединная поверхность оболочки, то положение точек на ней определяется географическими координатными углами ( $\theta$  – вдоль меридиана, а  $\varphi$  – вдоль широты).

Математическая модель состоит из трёх основных систем уравнений: газовой полости, жидкости и оболочки. Связь между ними осуществляется с помощью условий на контактных границах.

Пульсация газовой полости определяется уравнением баланса энергии. Выбор этого уравнения обусловлен тем, что один из способов выведения системы из состояния равновесия состоит во введении энергии в газовую полость [10]:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} (P_b \cdot V_b) + P_b \frac{dV_b}{dt} = N(t), \quad (1)$$

где объём пузырька  $V_b = \frac{4}{3} \pi R_b^3$ ,  $R_b$  – радиус пузырька;  $P_b$  – давление в пузырьке;  $\gamma$  – показатель адиабаты газа в пузырьке;  $N(t)$  – мощность вводимой в полость энергии.

Динамика жидкости определяется волновым уравнением в сферической системе координат в трёхмерной постановке [16, 22]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right], \quad (2)$$

где  $f$  – потенциал скорости жидкости;  $c$  – скорость звука в невозмущённой жидкости.

Учёт кавитации в жидкости осуществлялся следующим образом: если давление жидкости в рассматриваемой точке не больше давления насыщенного пара, то давление в точке принимаем равным давлению  $P_c$  насыщенного пара:

$$P_f = \begin{cases} P_f, & P_f > P_c, \\ P_c, & P_f \leq P_c. \end{cases} \quad (3)$$

Динамика оболочки описывается системой уравнений движения оболочки в приближении Кирхгофа – Лява. Перемещения и углы поворота выражаются через усилия и моменты [4]:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} + (T_{11} - T_{22}) \operatorname{ctg} \theta + Q_1 + Rq_1 = \rho R h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} + 2T_{12} \operatorname{ctg} \theta + Q_2 + Rq_2 = \rho R h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + Q_1 \operatorname{ctg} \theta - T_{11} - T_{22} + Rq_3 = \rho R h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + (M_{11} - M_{22}) \operatorname{ctg} \theta = Q_1 R + \frac{\rho h^3 R}{12} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + 2M_{12} \operatorname{ctg} \theta = Q_2 R + \frac{\rho h^3 R}{12} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2}, \quad (8)$$

где  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $q_i$  – составляющие суммарного давления на поверхность оболочки;  $\rho$  – плотность оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $u, v, w$  – компоненты перемещения срединной поверхности, соответственно в направлениях  $\theta, \varphi$  и  $r$ ;  $\theta^*, \varphi^*$  – углы поворота срединной поверхности вдоль соответствующих координатных линий;  $T_{11}, T_{22}, T_{12} = T_{21}$  – силы, действующие на единицу длины дуги соответствующей

ющей площадки;  $M_{11}, M_{22}, M_{12} = M_{21}$  – моменты срединной поверхности, здесь индексами обозначены направления  $\theta$  и  $\varphi$  соответственно;  $Q_1, Q_2$  – перерезывающие силы.

Система дополнена физическими и геометрическими соотношениями, которые определены через перемещения и повороты оболочки (индексом 3 в формулах обозначено направление нормальное срединной поверхности) [4]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right), & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \operatorname{ctg} \theta + w \right), \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \operatorname{ctg} \theta \right), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R} \right), & \chi_{11} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta^*}{\partial \theta}, \\
\chi_{22} &= \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varphi} + \theta^* \operatorname{ctg} \theta \right), & \chi_{12} &= \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta^*}{\partial \varphi} - \varphi^* \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \\
T_{11} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), & T_{22} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\
T_{12} &= \frac{Eh}{1 + \nu} \varepsilon_{12}, & M_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\chi_{11} + \nu \chi_{22}), \\
M_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\chi_{22} + \nu \chi_{11}), & M_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1 + \nu)} \chi_{12}, \\
Q_1 &= \frac{Eh}{1 + \nu} \varepsilon_{13}, & Q_2 &= \frac{Eh}{1 + \nu} \varepsilon_{23}.
\end{aligned} \tag{9}$$

В начальный момент времени система находится в состоянии статического равновесия:

$$\begin{aligned}
t = 0, \quad P_f = P_b = P_0, \quad q_i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 0, \\
\chi_{ij} = 0, \quad T_{ij} = 0, \quad M_{ij} = 0, \\
u = v = w = \theta^* = \varphi^* = 0, \quad R_b = R_0, \quad N(t) = 0, \quad f = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Из состояния равновесия система выводится путём ввода энергии в пузырёк либо путём изменения нагрузки на оболочку в локальной области её поверхности.

Систему уравнений (1), (2), (4)–(9) дополняем условиями на контактных границах. На границе пузырька задаем условия

$$\frac{dR_b}{dt} = \frac{df}{dr}, \quad P_b = P^*, \tag{11}$$

где  $P^*$  – давление на границе с пузырьком. На границе жидкости с оболочкой задаем условия

$$\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dr}, \quad q_3 = P^{**}, \tag{12}$$

где  $P^{**}$  – давление на границе с оболочкой.

Для контроля выполнения гипотезы о малых упругих деформациях оболочки применяем условие Губера – Мизеса [3, 23]:

$$\begin{aligned}
(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \\
+ 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \leq \frac{2}{3} \sigma_T^2,
\end{aligned} \tag{13}$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести материала оболочки.

**3. Метод решения.** Уравнения математической модели (1)–(12) решали с помощью численных методов. Непрерывную в пространстве и времени область решения системы уравнений заменяли дискретной. Дифференциальные уравнения дискретизировали в пространстве и во времени по методу конечных разностей [20, 28]. Решение полученной алгебраической системы уравнений выполняли с помощью явных численных методов с помощью рекуррентных по времени формул.

Решение уравнения (1) выполняли по двухслойному по времени методу Эйлера – Коши [13]. Для решения системы (3)–(7), описывающей движение оболочки, применяли трёхслойную по времени схему «крест» [6]. Дискретизацию уравнений оболочки выполняли по пространственному шаблону, приведённому на рис. 1. В узловых точках шаблона определяли кинематические характеристики (перемещения и углы поворота), а в промежуточных – силовые (мембранные силы, перерезывающие силы, моменты).

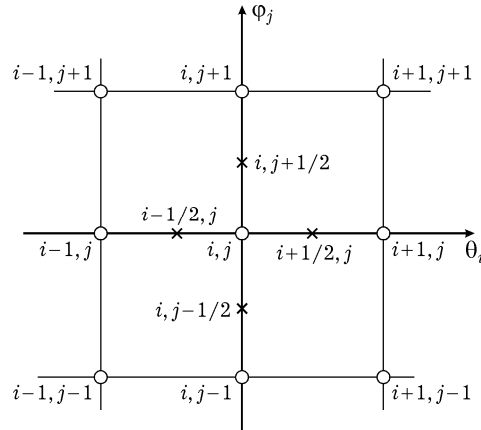


Рис. 1. Схема шаблона для дискретизации системы уравнений оболочки.

Дискретизацию волнового уравнения выполняли с использованием шаблона, показанного на рис. 2. В его узловых точках определяются потенциалы и давления, а в промежуточных – компоненты вектора скорости жидкости.

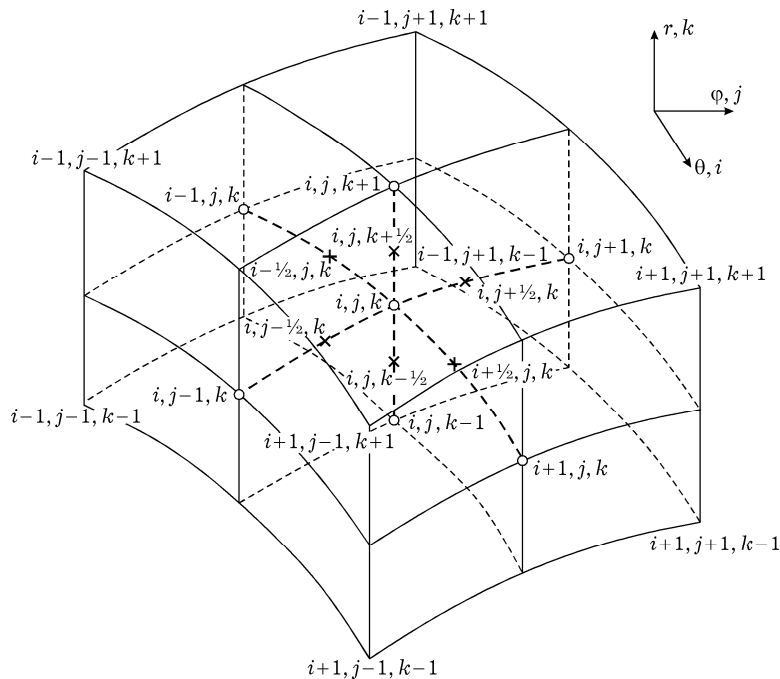


Рис. 2. Схема шаблона для дискретизации волнового уравнения.

**4. Результаты тестирования.** Тестирование модели выполняли на основе фундаментальных физических принципов, включающих проверку сохранения равновесия системы в отсутствие возмущений, скорости распространения продольных и поперечных волн в оболочке, волн в жидкости, а также сравнения собственных частот колебаний пузырька и оболочки с известными из публикаций их точными значениями.

Для тестирования алгоритма, описывающего динамику пузырька, выводили пузырёк из состояния равновесия путём задания возмущения скорости жидкости на границе пузырька ( $V = 0.0008 \text{ м/с}$ ) в один из начальных моментов времени. При этом система выходит из состояния равновесия, пузырёк начинает совершать пульсации, периодически изменяется его радиус и давление. Для исключения влияния на динамику пузырька отражённой от оболочки волны расчёты выполняли до момента времени  $t = 2 \cdot R/c$ . Результаты расчётов пульсаций пузырька и изменения давления в нём представлены на рис. 3, рис. 4. Сплошные кривые соответствуют начальному радиусу  $R_0 = 1 \text{ мм}$ , штриховые –  $R_0 = 2 \text{ мм}$ .

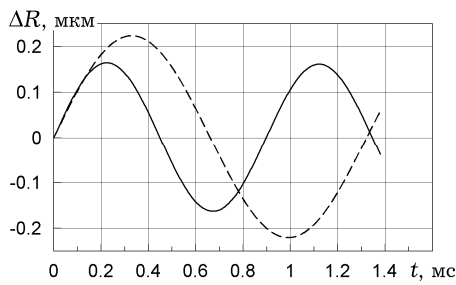


Рис. 3. Изменение радиуса пузырька.

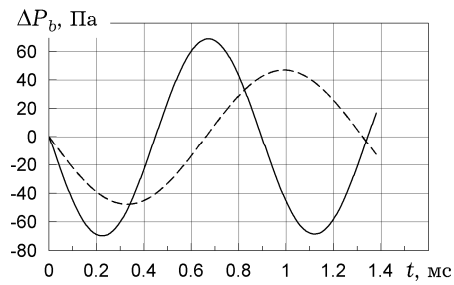


Рис. 4. Изменение давления в пузырьке.

Как видно из полученных результатов, при движении пузырька его радиус и давление колеблются в противофазе. Кроме того, при увеличении начального радиуса пузырька период его колебаний увеличивается в соответствии с точной формулой [9]

$$\omega_0 = \sqrt{3\gamma P_0 / (\rho_0 R_0^2)}. \quad (14)$$

При начальном давлении в жидкости и пузырьке  $P_0 = 100 \text{ кПа}$ , начальном радиусе пузырька  $R_0 = 0.001 \text{ м}$ , а также плотности жидкости  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ , круговая частота пульсации пузырька равна  $20494 \text{ рад/с}$ , а период колебания пузырька  $T_0 = 2\pi/\omega_0 \approx 0.00031 \text{ с}$ .

Получаемые при вычислении период собственных колебаний пузырька, амплитуда изменения его радиуса и давление зависят от погрешности вычисления, т.е. от количества точек дискретизации непрерывной области решения. Зависимость изменения периода собственных колебаний пузырька от количества точек дискретизации области по радиальной координате представлена на рис. 5.

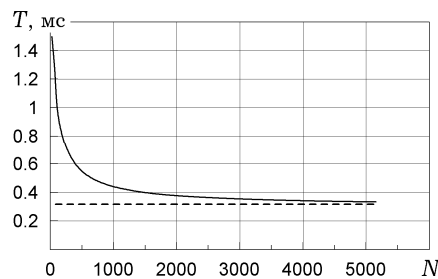


Рис. 5. Зависимость периода колебаний пузырька от количества точек дискретизации.

Вычисленные значения периода собственных колебаний пузырька, изображаемые на рис. 5 сплошной линией, стремятся к значению, полученному с помощью формулы (14), показанному штриховой линией, при увеличении количества точек дискретизации. Погрешность при 5250 точках дискретизации равна 5 %.

Возмущение от пульсирующего пузырька передавалось жидкости, в которой возникала волна давления. Её профиль в радиальном направлении в различные моменты времени представлен на рис. 6.

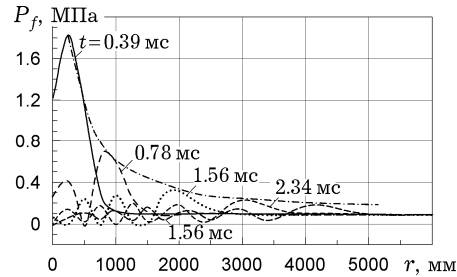


Рис. 6. Профили волны давления в неограниченной жидкости для различных моментов времени.

Полученные профили распространения волны давления в жидкости соответствуют закону распространения сферической волны [22], амплитуда которой обратно пропорциональна расстоянию от источника возмущения (огибающая амплитуд давления показана на рис. 6 штрихпунктирной линией).

Скорость распространения волны давления в жидкости вычисляли, рассматривая профили волны давления в различные моменты времени как отношение длины пробега волны к времени её распространения. Полученные величины соответствуют известному значению скорости распространения волны в воде при давлении 0.1 МПа и температуре 20 °С с погрешностью не более 4 %.

При тестировании оболочки рассматривали только уравнения её движения (3)–(7) с замыкающими соотношениями (9). Оболочку выводили из состояния равновесия, задавая радиальное перемещение всей её поверхности. В результате она начинала совершать центрально-симметричные радиальные колебания. Радиальные перемещения оболочки радиусом  $R = 1$  м представлены на рис. 7.

Частоту собственных радиальных колебаний сферической оболочки определяли по формуле [5]:

$$\Omega^2 = \frac{2E}{R^2 \rho(1 - \nu)}, \quad (15)$$

где  $\Omega$  – частота собственных колебаний сферической оболочки,  $R$  – радиус оболочки,  $\rho$  – плотность материала оболочки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль упругой деформации.

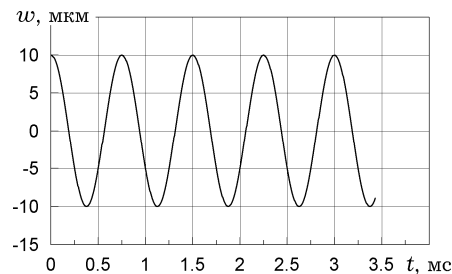


Рис. 7. Радиальные собственные колебания оболочки радиусом  $R = 1$  м.

В табл. 1 представлены результаты определения периода собственных колебаний стальной оболочки ( $T$ ) при различных значениях её радиуса, вычисленные по формуле (15) и с помощью уравнений движения оболочки ( $T^*$ ).

Таблица 1

$R$ , м	$T$ , мс	$T^*$ , мс	$\Delta T$ , мс	$\varepsilon$ , %
1	0.76	0.749	0.011	1.47
3	2.28	2.247	0.033	1.47
5	3.79	3.745	0.045	1.20
7	5.3	5.243	0.057	1.09
9	6.84	6.741	0.099	1.47
11	8.35	8.239	0.111	1.35

Для определения волновых характеристик возмущения оболочки оболочку выводили из состояния равновесия путём задания возмущения по экватору (задавали положительное радиальное перемещение) и рассматривали распространение возмущения по меридиану, при этом оболочка была жёстко закреплена в полюсах. Полученные результаты представлены на рис. 8 и рис. 9.

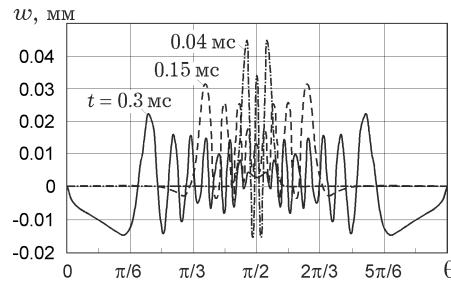


Рис. 8. Распространение радиальных возмущений в оболочке по меридиану в различные моменты времени при возмущении оболочки по экватору.

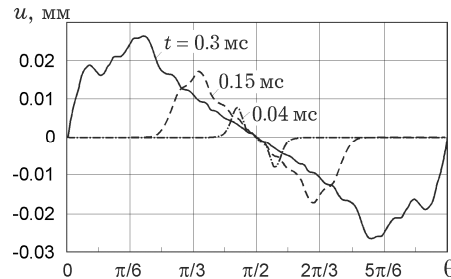


Рис. 9. Распространение продольных возмущений в оболочке по меридиану в различные моменты времени при возмущении оболочки по экватору.

Для определения скорости распространения изгибных возмущений рассматривали три момента времени и соответствующие им координаты первых экстремумов волны радиальных перемещений оболочки ( $t_1 = 0.00004$  с;  $\ell_1 = 1.65$  м), ( $t_2 = 0.00015$  с;  $\ell_2 = 2.0$  м), ( $t_3 = 0.0003$  с;  $\ell_3 = 2.47$  м). Им соответствуют скорости волны  $v_1 = 3180$  м/с,  $v_2 = 3133$  м/с,  $v_3 = 3150$  м/с, определённые по формулам

$$v_1 = \frac{\ell_2 - \ell_1}{t_2 - t_1}, \quad v_2 = \frac{\ell_3 - \ell_2}{t_3 - t_2}, \quad v_3 = \frac{\ell_3 - \ell_1}{t_3 - t_1}. \quad (16)$$

Погрешность вычислений не превышает 1%, по сравнению со значением скорости распространения поперечных возмущений  $V_{tr} = 3177$  м/с для

используемого материала оболочки, определяемой с помощью формулы [7]

$$V_{tr} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}. \quad (17)$$

При определении скорости распространения продольных возмущений рассматриваем три момента времени и соответствующие координаты первых экстремумов волны ( $t_1 = 0.0000506$  с;  $l_1 = 1.8$  м), ( $t_2 = 0.00015$  с;  $l_2 = 2.28$  м), ( $t_3 = 0.0003$  с;  $l_3 = 3.06$  м). Им соответствуют скорости волны  $v_1 = 4830$  м/с,  $v_2 = 5200$  м/с,  $v_3 = 5052$  м/с, определённые по формуле [7]

$$V_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (18)$$

Погрешность вычислений не превышает 4% по сравнению со значением скорости распространения продольных возмущений  $V_{long} = 5065$  м/с, определяемой с помощью формулы (18).

Положительное радиальное перемещение экватора оболочки создаёт волну возмущения жидкости. Первоначально в районе экватора формируется волна разрежения, которая распространяется к центру сферы, позже формируется волна давления. Одновременно с волной разрежения в жидкости вдоль оболочки формируются волны давления, распространяющиеся к полюсам, возникновение которых связано с большей скоростью распространения возмущения в оболочке, чем в жидкости и вызывается отрицательными перемещениями оболочки в точках удалённых от экватора.

**5. Выводы.** Результаты тестирования показывают, что разработанная математическая модель адекватно описывает трёхкомпонентную динамическую систему пузырёк – жидкость – оболочка и может применяться для исследования процессов и явлений в подобных физических системах, которые соответствуют допущениям, сделанным при построении модели.

1. Амензаде Р. Ю., Киясбейли Э. Т., Салманова Г. М. Распространение волн в оболочке из композитного материала, содержащей пузырьковую жидкость // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – Вып. 71. – С. 104–112.
2. Бармин И. В., Кунис И. Д. Сжиженный природный газ вчера, сегодня, завтра. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 256 с.
3. Гольденблат И. Н., Копнов В. А. Критерий прочности и пластичности конструктивных материалов. – Москва: Машиностроение, 1968. – 192 с.
4. Григolloк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – Москва: ВИНТИ, 1973. – 273 с. – (Итоги науки и техники: Механика твёрдых деформируемых тел. – Т. 5.)
5. Иванов В. А., Ильгамов М. А. Исследование собственных колебаний сферической оболочки, содержащей сплошное упругое тело и газ // Исследования по теории пластин и оболочек: Сб. науч. тр. (Казань). – 1967. – Вып. 5. – С. 397–409.
6. Калиткин Н. Н. Численные методы. – Москва: Наука, 1978. – 512 с.
7. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. – Москва: Наука, 1980. – 256 с.
8. Линь Б.-Ц., Ли В.-С., Чжу Ч.-Цз., Лу Х.-Л., Лу Чж.-Г., Ли Ц.-Ч. Экспериментальное исследование характеристик взрыва смеси наночастиц алюминия и воздуха // Физика горения и взрыва. – 2010. – 46, № 6. – С. 73–77.
9. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. – Москва: Энергоатомиздат, 1990. – 248 с.
10. Наугольных К. А., Рой Н. А. Электрические разряды в воде. – Москва: Наука, 1977. – 151 с.
11. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. – Ленинград: Политехника, 1991. – 656 с.
12. Пинаев А. В., Кузавов В. Т., Кедринский В. К. Структура ударных волн в ближней зоне при взрыве пространственных зарядов // Прикл. механика и техн. физика. – 2000. – 41, № 5. – С. 81–90.
13. Пирумов У. Г. Численные методы. – Москва: Дрофа, 2004. – 224 с.



14. Скакунов М. Г. Сферические резервуары: производственно-практическое издание. – Москва: Стройиздат, 1986. – 132 с.
15. Скакунов М. Г., Портненко Ф. А., Каптелов В. И. Сферические резервуары для сельского хозяйства. – Москва: Агропромиздат, 1990. – 80 с.
16. Сташкевич А. П. Акустика моря. – Ленинград: Судостроение, 1966. – 350 с.
17. Тупяев А. С. О деформации сферической оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью, при воздействии кругового растяжения по экватору // Рос. журн. биомеханики. – 2008. – **12**. – С. 60–65.
18. Товстик П. Е. Неклассические модели балок, пластин и оболочек // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – **8**, Вып. 3. – С. 72–85.
19. Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Доблин С. Ю. Определение характеристик колебаний упругой сферической оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью, с помощью полупроводникового лазерного автодина // Письма в ЖТФ. – 2011. – **37**, вып.18. – С. 65–72.
20. Atkinson K., Han W. Finite difference method // Theor. Numer. Anal. – 2009. – **39**. – P. 253–275.
21. Calkins Michael A., Noir Jérôme, Eldredge Jeff D., Aurnou Jonathan M. Axisymmetric simulations of libration-driven fluid dynamics in a spherical shell geometry // Phys. Fluids. – 2010. – **22**, No. 8. – P. 086602-086602-12. DOI: 10.1063/1.3475817.
22. Durst Franz. Fluid mechanics: an introduction to the theory of fluid flows. – Berlin: Springer, 2008. – 742 p.
23. Lebedev A. A., Kovalchuk B. I., Giginjak F. F., Lamashevskiy V. P. Handbook of mechanical properties of structural materials at a complex stress state. – New York: Begell House Inc., 2000. – 500 p.
24. Lee H. S., Yoon J. H., Park J. S. A study on failure characteristic of spherical pressure vessel // J. Mater. Process. Techn. – 2005. – **164/165**. – P. 882–888.
25. Norman R. E., Flanagan J. G., Sigal I. A., Rausch M. K., Tertinegg I., Ethier C. R. Finite element modeling of the human sclera: Influence on optic nerve head biomechanics and connections with glaucoma // Exp. Eye Res. – 2011. – **93**(1). – P. 4–12.
26. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V., Shamarin V. Dynamic response of spherical shells impacted by falling objects // Int. J. Mech. – 2011. – **5**, No. 3. – P. 166–181.
27. Syed Ahmed Shah, Mohammed Tajuddin. On axially symmetric vibrations of fluid filled proelastic spherical shells // Open J. Acoust. – 2011. – **1**, No. 1. – P. 15–26.
28. Xi L., Cen Z., Chen J. A Second-order finite difference scheme for a type of black-scholes equation // Int. J. Nonlin. Sci. – 2008. – **6**, No. 3. – P. 238–245.

### ТРИВИМІРНА МОДЕЛЬ ГІДРОПРУЖНОЇ СИСТЕМИ, ОБМЕЖЕНОЇ СФЕРИЧНОЮ ОБОЛОНКОЮ

Розроблено тривимірну модель динамічної системи, що складається зі сферичної оболонки, заповненої стисливою рідиною, з газовою порожниною в центрі. Динаміка оболонки визначається рівняннями руху Кірхгофа – Лява, стан газу в порожнині визначається рівнянням балансу енергії, для рідини використовується хвильове рівняння. Взаємодія компонентів системи встановлюється за допомогою контактних граничних умов. Виконано тестування моделі за математичними та фізичними принципами.

### THREE-DIMENSIONAL MODEL OF HYDROELASTIC SYSTEM CONFINED BY SPHERICAL SHELL

A three-dimensional model of dynamical system consisting from a spherical shell filled by compressible liquid with a gas bubble in the center is developed. The dynamics of the shell is governed by the Kirchhoff – Love's equations of motion, the state of gas in a cavity is described by the equation of energy balance, the wave equation for fluid is used. The interaction between the system components is established from the contact boundary conditions. The model is tested on the basis of mathematical and physical principles.

<sup>1</sup> Николаев. гос. аграрный ун-т, Николаев,

<sup>2</sup> Ин-т импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев,

<sup>3</sup> Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено  
21.01.12