

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТАВНОГО ПЛОСКОГО КРУГОВОГО ДИСКА

Предложен способ исследования методом малого параметра возможной потери устойчивости вращающегося составного плоского кругового диска. Получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно найдены значения критической угловой скорости вращения при различных параметрах диска.

Введение. Изучение неустойчивости вращающихся дисков при существенных угловых скоростях берет свое начало от исследований А. Love [22], S. P. Timoshenko, J. Goodier [30], J. Roark, W. Young [29] по выявлению зависимости между центробежной нагрузкой, напряженно-деформированным состоянием [7] и скоростью распространения пластической зоны. В работах M. Mazière, J. Besson, S. Forest, B. Tanguy, H. Chalons, F. Vogel [24, 25], содержащих детальный обзор и анализ методов изучения неустойчивости вращающихся дисков, указано, что на основании результатов упомянутых выше исследований F. Lászly [19], M. Percy, K. Ball, P. Mellor [28] засвидетельствовали потерю несущей способности вследствие одноосного растяжения при достижении средним кольцевым напряжением номинального предела прочности материала. Уточнение установленного критерия для сплошных дисков посредством его сопоставления с критерием максимальной угловой скорости и критерием промежуточной величины напряжения предложили V. Tvergaard [31] и B. Manavi [23].

Большинство важных результатов в данном направлении исследований получено с помощью моделирования методом конечных элементов (S. Meguid, P. S. Kanth, A. Czekanski [26], R. Cláudio, C. M. Branco, E. C. Gomes, J. Byrne, G. F. Harrison, M. R. Winstone [17], L. Witek [33], W. Zhuang [34], J. Newman [27], C. Liu, Z. Z. Lu, Y. L. Xu, Z. F. Yue [21], G. Walz, H. Riesch-Oppermann [32], M. Mazière, J. Besson, S. Forest, B. Tanguy, H. Chalons, F. Vogel [24, 25] и др.). И. В. Демьянушко, И. А. Биргер [5] создали методы расчета прочности и методы оптимального машинного проектирования вращающихся дисков с использованием аппарата математического программирования.

Первые аналитические результаты по определению критической угловой скорости вращения [11, 12, 20] круглых дисков из несжимаемого материала и изучению потери несущей способности [14] сплошных дисков, основанные на введении некоторого малого параметра, характеризующего «возмущение либо статических, либо геометрических краевых условий», принадлежат, по-видимому, Д. Д. Ивлеву и Л. В. Ершову [6, 8–10]. Об актуальности и перспективности такого направления исследований свидетельствует прямая аналогия между предложенным этими авторами приближенным вариантом метода малого параметра и аналитическим методом возмущения формы границы (А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш [4]), являющимся достаточно общим, успешно используемым при решении многочисленных краевых задач из различных разделов механики сплошной среды и выявлении характерных механических эффектов, а также предусматривающим приложение полученных решений к задачам теории устойчивости [3].

В этой работе излагается основанный на методе возмущений [18] способ определения критической скорости вращения простейшего из радиально неоднородных дисков – сплошного плоского кругового диска, состоящего из внутреннего сплошного диска и внешнего кольцевого диска из различных материалов. Вид возмущения внешней контурной окружности диска, потерявшего устойчивость, предполагает самоуравновешивающуюся форму.

1. Постановка задачи. Исследуем механизм потери устойчивости быстро вращающегося составного плоского кругового диска \mathcal{D} вследствие принятия им новой плоской равновесной формы из-за появления и значительного роста пластических зон, вызванных центробежными нагрузками. Представим \mathcal{D} выполненным в виде единого целого диска путем жесткого соединения однородного и изотропного сплошного кругового диска \mathcal{D}_1 радиуса a и однородного изотропного кругового кольцевого диска \mathcal{D}_2 с внутренним радиусом a и внешним радиусом b . Предел текучести материала диска \mathcal{D}_1 обозначим через σ_{s1} , модуль упругости – E_1 , плотность – γ_1 , коэффициент Пуассона – ν_1 . Одноименные параметры материала диска \mathcal{D}_2 обозначим через σ_{s2} , E_2 , γ_2 и ν_2 соответственно. Обозначения σ_s , E , γ и ν , употребляемые безотносительно к номеру дисковой секции, будем использовать без указания каких-либо индексов.

Остановимся вначале на самоуравновешенной (и мало отличающейся от круговой) форме потери устойчивости диска \mathcal{D} , когда уравнение внешней его границы с точностью до бесконечно малых первого порядка представимо в виде

$$r = b + d \cos n\theta, \quad d = \text{const}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2,$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \tag{1}$$

где $\rho = r/b$ – безразмерный текущий радиус, $\delta = d/b$ – малый параметр, θ – полярный угол. С учетом характера локализации пластического состояния в осесимметричных упругопластических задачах для канонических областей [13, 15], в т.ч. для круга и кольца, а также различной пластичности материалов каждого из частичных дисков \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 формально могут представлять интерес следующие три случая:

- 1° $\mathcal{D}_{1(pe)}\mathcal{D}_{2(e)}$ – центральная круговая область радиуса $r_{01*} < a$ диска \mathcal{D}_1 пластическая, а внешняя кольцевая область диска \mathcal{D}_1 и весь диск \mathcal{D}_2 в момент потери устойчивости пребывают в упругом состоянии (рис. 1);
- 2° $\mathcal{D}_{1(e)}\mathcal{D}_{2(pe)}$ – кольцевая пластическая зона радиуса $r_{02*} > a$ примыкает в \mathcal{D}_2 к окружности $r = a$, а диск \mathcal{D}_1 полностью упругий (рис. 2);
- 3° $\mathcal{D}_{1(pe)}\mathcal{D}_{2(pe)}$ – две пластические зоны соответствующих радиусов (рис. 3).

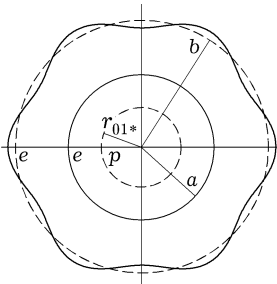


Рис. 1

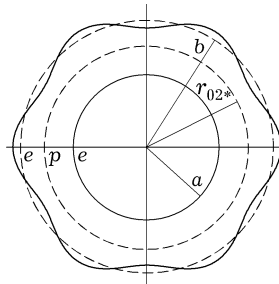


Рис. 2

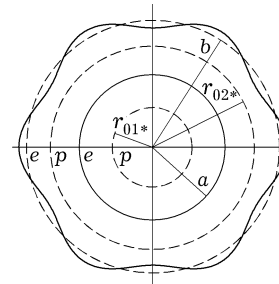


Рис. 3

Постоянную угловую скорость вращения диска \mathcal{D} обозначим ω , а текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска – r_{01} или/и r_{02} .

Требуется для описываемой зависимостью (1) формы границы диска получить в первом приближении по малому параметру характеристическое уравнение для критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_{0*}$ и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения $\omega = \omega_*$. Для этого надлежит установить условие существования не-

тривиальных решений системы линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}^0}{dr} u' &= 0, & \sigma'_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0 - \sigma_{rr}^0}{b} \frac{du'}{d\theta} &= 0, & r &= b, \\ \sigma'_{rr} &= 0, & \sigma'_{r\theta} &= 0, & r &= r_0, \end{aligned}$$

представляющей собой линеаризованные по δ граничные условия и условия сопряжения в напряжениях для

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^0 + \delta\sigma'_{rr} + \delta^2 \dots, & \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}^0 + \delta\sigma'_{\theta\theta} + \delta^2 \dots, & \sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\theta}^0 + \delta\sigma'_{r\theta} + \delta^2 \dots, \\ u &= u^0 + \delta u' + \delta^2 \dots, & v &= v^0 + \delta v' + \delta^2 \dots \end{aligned}$$

Возмущения компонент напряжений и перемещений σ'_{rr} , $\sigma'_{r\theta}$, $\sigma'_{\theta\theta}$ и u' находим из зависимостей, определяющих напряженно-деформированное состояние неподвижной упругой круговой кольцевой пластины, нагруженной в своей плоскости системой самоуравновешенных контурных нагрузок:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \bar{a} \cos n\theta, & \sigma_{r\theta} &= \bar{b} \sin n\theta, & r &= b, \\ \sigma_{rr} &= \underline{a} \cos n\theta, & \sigma_{r\theta} &= \underline{b} \sin n\theta, & r &= r_0. \end{aligned}$$

Указанным граничным и контурным условиям должны удовлетворять решения уравнений равновесия плоской задачи

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0,$$

а также решения уравнений связи между напряжениями и перемещениями

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial r} &= \sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}, & E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r} \right) &= \sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}, \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) &= \sigma_{r\theta}. \end{aligned}$$

Проверка условий возможна после определения из уравнения квазистатического равновесия

$$r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + \gamma\omega^2 r^2 = 0$$

и уравнений связи

$$E \frac{du}{dr} = \sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}, \quad E \frac{u}{r} = \sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}$$

в упругой зоне или условия текучести Сен-Венана

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$$

в пластической зоне невозмущенного (осесимметричного, не зависящего от полярного угла θ) напряженного состояния (с верхним индексом «0») вращающегося диска \mathcal{D} .

2. Решение в случае $\mathcal{D}_{1(pe)}\mathcal{D}_{2(e)}$. Проинтегрировав вначале уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma_1}{b^2} r, \quad \sigma_1 = \gamma_1 b^2 \omega^2 = \text{const}, \quad (2)$$

при $r \in [0, r_{01}]$, т.е. в пластической области $\mathcal{D}_{1(p)}$ (рис. 1), имеем

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{s1}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{s1} - \frac{\sigma_1}{3b^2} r^2$$

или

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}}, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}} - \frac{\sigma_1}{3\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (4)$$

если использовать безразмерные напряжения и полярный радиус .

В упругой области $\mathcal{D}_{1(e)}$ соответствующие зависимости будут иметь вид

$$\sigma_{\theta\theta} = C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} - \frac{\sigma_1(3\nu_1 + 1)}{8\sigma_{s2}}\rho^2, \quad (5)$$

$$\sigma_{rr} = C_1 - \frac{C_2}{\rho^2} - \frac{\sigma_1(\nu_1 + 3)}{8\sigma_{s2}}\rho^2, \quad (6)$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные.

Невозмущенное напряженное состояние упругой области $\mathcal{D}_{2(e)}$ определяется начальной задачей

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma_2}{b^2}r, \quad \sigma_2 = \gamma_2 b^2 \omega^2 = \text{const}, \quad \sigma_{rr}(b) = 0,$$

поэтому

$$\sigma_{\theta\theta} = C_3 \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\sigma_2(\nu_2 + 3)}{8\sigma_{s2}} - \frac{\sigma_2(3\nu_2 + 1)}{8\sigma_{s2}}\rho^2, \quad (7)$$

$$\sigma_{rr} = C_3 \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\sigma_2(\nu_2 + 3)}{8\sigma_{s2}}(1 - \rho^2), \quad (8)$$

где C_3 – неизвестная постоянная.

Для определения C_3 , а также C_1 , C_2 и ω в зависимости от радиуса пластической зоны $\beta_0 = r_{01}/b$ необходимо учесть непрерывность компонент напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{rr} при $\rho = \beta_0$ и непрерывность радиального напряжения σ_{rr} и радиального смещения u [2] при $\rho = \beta = a/b$. Исходя из непрерывности радиального напряжения и учитывая второе уравнение связи, получаем следующее правило сопряжения решений для $\sigma_{\theta\theta}$ на окружности $\rho = \beta$:

$$\sigma_{\theta\theta}(\beta + 0) = \varepsilon\sigma_{\theta\theta}(\beta - 0) + k\sigma_{rr}(\beta - 0), \quad (9)$$

где $\varepsilon = E_2/E_1$, $k = \nu_2 - \varepsilon\nu_1$. Приравнивая при $\rho = \beta_0$ правые части равенств (3) и (5), (4) и (6) и применяя при $\rho = \beta$ к правым частям (5) и (7) соотношение (9), приравняв правые части (6) и (8), получим систему четырех линейных уравнений относительно C_1 , C_2 , C_3 и $x = \sigma_2/(24\sigma_{s2})$:

$$\begin{aligned} C_1 + \beta_0^{-2}C_2 - 3\Gamma(3\nu_1 + 1)\beta_0^2x &= s, \\ C_1 - \beta_0^{-2}C_2 - \Gamma(3\nu_1 + 1)\beta_0^2x &= s, \\ (\varepsilon + k)C_1 + \beta^{-2}(\varepsilon - k)C_2 - (1 + \beta^{-2})C_3 + \ell x &= 0, \\ C_1 - \beta^{-2}C_2 - (1 - \beta^{-2})C_3 + mx &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad s = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}}, \quad m = -3\{\nu_2 + 3 + \beta^2[\Gamma(\nu_1 + 3) - (\nu_2 + 3)]\}, \\ \ell &= -3\{\nu_2 + 3 + \beta^2\{\Gamma[\varepsilon(3\nu_1 + 1) + k(\nu_1 + 3)] - (3\nu_2 + 1)\}\}. \end{aligned}$$

Решая систему (10), находим

$$C_1 = s + 2\Gamma(3\nu_1 + 1)\beta_0^2x, \quad (11)$$

$$C_2 = \Gamma(3\nu_1 + 1)\beta_0^4x, \quad (12)$$

$$C_3 = \frac{s + [m + \Gamma(3\nu_1 + 1)(2 - \beta^{-2}\beta_0^2)\beta_0^2]x}{1 - \beta^{-2}}, \quad (13)$$

$$x = \frac{s}{24\Gamma} \frac{\omega^2}{q_1^2} = \frac{1}{24} \frac{\omega^2}{q_2^2} = -s\{1 + \beta^2 + (\varepsilon + k)(1 - \beta^2)\} \{(1 + \beta^2)[m + \Gamma(3\nu_1 + 1)(2 - \beta^{-2}\beta_0^2)\beta_0^2] + (1 - \beta^2)[\ell + \Gamma(3\nu_1 + 1)\{2(\varepsilon + k) + \beta^{-2}(\varepsilon - k)\beta_0^2\}\beta_0^2]\}^{-1}, \quad (14)$$

где

$$q_1 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{1}{\gamma_1} \sigma_{s1}}, \quad q_2 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{1}{\gamma_2} \sigma_{s2}}.$$

Таким образом, с учетом соотношений (11)–(14) зависимости (3)–(8) задают компоненты σ_{rr}^0 и $\sigma_{\theta\theta}^0$ нулевого приближения к решению задачи о пластическом равновесии, определяющему положение упругопластической границы.

Замечание 1. При $\varepsilon = s = \Gamma = 1$ и $\nu_1 = \nu_2$ из (14) получаем известную зависимость

$$\frac{\omega^2}{q^2} = \frac{24}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2}$$

между угловой скоростью вращения и радиусом пластической зоны плоско-однородного сплошного кругового диска.

Отнесенные к σ_s возмущения соответствующих компонент напряжений первого порядка малости σ'_{rr} , $\sigma'_{\theta\theta}$, $\sigma'_{r\theta}$ и отнесенные к b возмущения радиального u'^e и тангенциального v'^e смещений в первом приближении для упругого однородного плоского кольцевого диска $\beta_0 \leq \rho \leq 1$ имеют в общем случае следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= [a_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + a_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + a_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + a_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \cos n\theta, \\ \sigma'_{\theta\theta} &= [b_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + b_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + b_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + b_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \cos n\theta, \\ \sigma'_{r\theta} &= [c_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + c_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + c_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + c_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \sin n\theta, \\ u'^e &= \frac{\sigma_s}{E} [d_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + d_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + d_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + d_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \cos n\theta, \\ v'^e &= \frac{\sigma_s}{E} [e_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + e_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + e_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + e_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \sin n\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь известные рациональные функции $a_I(\cdot), \dots, e_{IV}(\cdot)$ [1] отражают влияние сосредоточенных на внешнем контуре $\rho = 1$ и внутреннем контуре $\rho = \beta_0$ периодических нагрузок $\sigma'_{rr} = \bar{a} \cos n\theta$, $\sigma'_{r\theta} = \bar{b} \sin n\theta$ и $\sigma'_{rr} = \underline{a} \cos n\theta$, $\sigma'_{r\theta} = \underline{b} \sin n\theta$ соответственно. В исследуемом случае неоднородного диска $\mathcal{D}_{1(e)}\mathcal{D}_{2(e)}$ приведенные зависимости следует переопределить для каждого частичного диска, используя условия в точке разрыва: непрерывность радиального и тангенциального напряжений σ'_{rr} и $\sigma'_{r\theta}$ и непрерывность радиального и тангенциального смещений u'^e и v'^e [2]. Поскольку в крайней кольцевой секции $\mathcal{D}_{2(e)}$

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= [a_I(\beta, \rho)a_2 + a_{II}(\beta, \rho)a_1 + a_{III}(\beta, \rho)b_2 + a_{IV}(\beta, \rho)b_1] \cos n\theta, \\ \sigma'_{\theta\theta} &= [b_I(\beta, \rho)a_2 + b_{II}(\beta, \rho)a_1 + b_{III}(\beta, \rho)b_2 + b_{IV}(\beta, \rho)b_1] \cos n\theta, \\ \sigma'_{r\theta} &= [c_I(\beta, \rho)a_2 + c_{II}(\beta, \rho)a_1 + c_{III}(\beta, \rho)b_2 + c_{IV}(\beta, \rho)b_1] \sin n\theta, \end{aligned}$$

$$u'^e = \frac{\sigma_{s2}}{E_2} [d_I^{**}(\beta, \rho)a_2 + d_{II}^{**}(\beta, \rho)a_1 + d_{III}^{**}(\beta, \rho)b_2 + d_{IV}^{**}(\beta, \rho)b_1] \cos n\theta,$$

$$v'^e = \frac{\sigma_{s2}}{E_2} [e_I^{**}(\beta, \rho)a_2 + e_{II}^{**}(\beta, \rho)a_1 + e_{III}^{**}(\beta, \rho)b_2 + e_{IV}^{**}(\beta, \rho)b_1] \sin n\theta, \quad (16)$$

на основании непрерывности радиального и тангенциального усилий действующие на внешнем контуре $\rho = \beta$ кольцевой секции $\mathcal{D}_{1(e)}$ соответствующие нагрузки получаем в виде

$$\sigma'_{rr} = a_1 \cos n\theta, \quad \sigma'_{r\theta} = b_1 \sin n\theta. \quad (17)$$

Принимая, что

$$\sigma'_{rr} = a_0 \cos n\theta, \quad \sigma'_{r\theta} = b_0 \sin n\theta \quad (18)$$

на внутреннем контуре $\rho = \beta_0$ этой секции, согласно (15)–(18) определяем напряженное и деформированное состояние в ней:

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= \left[a_I \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_1 + a_{II} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_0 + a_{III} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_1 + \right. \\ &\quad \left. + a_{IV} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_0 \right] \cos n\theta, \\ \sigma'_{\theta\theta} &= \left[b_I \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_1 + b_{II} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_0 + b_{III} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_1 + \right. \\ &\quad \left. + b_{IV} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_0 \right] \cos n\theta, \\ \sigma'_{r\theta} &= \left[c_I \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_1 + c_{II} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_0 + c_{III} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_1 + \right. \\ &\quad \left. + c_{IV} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_0 \right] \sin n\theta, \\ u'^e &= \beta \frac{\sigma_{s2}}{E_1} \left[d_I^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_1 + d_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_0 + d_{III}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_1 + \right. \\ &\quad \left. + d_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_0 \right] \cos n\theta, \\ v'^e &= \beta \frac{\sigma_{s2}}{E_1} \left[e_I^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_1 + e_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_0 + e_{III}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_1 + \right. \\ &\quad \left. + e_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_0 \right] \sin n\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

В формулах (16) и (19) индексы «**» и «*» указывают соответственно на значения параметров $\nu = \nu_2$ и $\nu = \nu_1$.

Для того чтобы выразить неизвестные амплитуды a_0 и b_0 через неопределенные коэффициенты a_2 , a_1 , b_2 и b_1 , воспользуемся непрерывностью u'^e и v'^e на окружности $\rho = \beta$. Приравнивая правые части соответствующих выражений в формулах для смещений (16) и (19) при $\rho = \beta$, получим линейную систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} \beta \left[d_I^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) a_1 + d_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) a_0 + d_{III}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) b_1 + d_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) b_0 \right] = \\ = \varepsilon^{-1} [d_I^{**}(\beta, \beta)a_2 + d_{II}^{**}(\beta, \beta)a_1 + d_{III}^{**}(\beta, \beta)b_2 + d_{IV}^{**}(\beta, \beta)b_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta \left[e_I^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) a_1 + e_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) a_0 + e_{III}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) b_1 + e_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) b_0 \right] = \\ & = \varepsilon^{-1} [e_I^{**}(\beta, \beta) a_2 + e_{II}^{**}(\beta, \beta) a_1 + e_{III}^{**}(\beta, \beta) b_2 + e_{IV}^{**}(\beta, \beta) b_1] \end{aligned}$$

относительно a_0 и b_0 с отличным от нуля определителем

$$\Delta = \beta^2 \left[d_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) e_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) - d_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) e_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right].$$

Ее решение имеет вид

$$a_0 = q'_1 a_2 + q'_2 a_1 + q'_3 b_2 + q'_4 b_1, \quad b_0 = q'_5 a_2 + q'_6 a_1 + q'_7 b_2 + q'_8 b_1,$$

где

$$q'_1 = \frac{\beta}{\varepsilon \Delta} \left[d_I^{**}(\beta, \beta) e_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) - e_I^{**}(\beta, \beta) d_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right],$$

$$\begin{aligned} q'_2 = \frac{\beta}{\Delta} & \left[\left\{ \varepsilon^{-1} d_{II}^{**}(\beta, \beta) - \beta d_I^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right\} e_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) - \right. \\ & \left. - \left\{ \varepsilon^{-1} e_{II}^{**}(\beta, \beta) - \beta e_I^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right\} d_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$q'_3 = \frac{\beta}{\varepsilon \Delta} \left[d_{III}^{**}(\beta, \beta) e_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) - e_{III}^{**}(\beta, \beta) d_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right],$$

$$\begin{aligned} q'_4 = \frac{\beta}{\Delta} & \left[\left\{ \varepsilon^{-1} d_{IV}^{**}(\beta, \beta) - \beta d_{III}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right\} e_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) - \right. \\ & \left. - \left\{ \varepsilon^{-1} e_{IV}^{**}(\beta, \beta) - \beta e_{III}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right\} d_{IV}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$q'_5 = \frac{\beta}{\varepsilon \Delta} \left[e_I^{**}(\beta, \beta) d_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) - d_I^{**}(\beta, \beta) e_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right],$$

$$\begin{aligned} q'_6 = \frac{\beta}{\Delta} & \left[\left\{ \varepsilon^{-1} e_{II}^{**}(\beta, \beta) - \beta e_I^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right\} d_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) - \right. \\ & \left. - \left\{ \varepsilon^{-1} d_{II}^{**}(\beta, \beta) - \beta d_I^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right\} e_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$q'_7 = \frac{\beta}{\varepsilon \Delta} \left[e_{III}^{**}(\beta, \beta) d_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) - d_{III}^{**}(\beta, \beta) e_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right],$$

$$\begin{aligned} q'_8 = \frac{\beta}{\Delta} & \left[\left\{ \varepsilon^{-1} e_{IV}^{**}(\beta, \beta) - \beta e_{III}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right\} d_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) - \right. \\ & \left. - \left\{ \varepsilon^{-1} d_{IV}^{**}(\beta, \beta) - \beta d_{III}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right\} e_{II}^* \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку функции (16) и (19) должны удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{rr}^e + A_1 u'^e = 0, \quad \rho = 1, \quad (20)$$

$$\sigma_{r\theta}^e - A_2 \frac{du'^e}{d\theta} = 0, \quad \rho = 1, \quad (21)$$

$$\sigma_{r\theta}^e = 0, \quad \rho = \beta_0, \quad (22)$$

$$\sigma_{rr}^e = 0, \quad \rho = \beta_0, \quad (23)$$

необходимо знать $A_1 = \left. \frac{d\sigma_{rr}^{0e}}{d\rho} \right|_{\rho=1}$ и $A_2 = \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{rr}^{0e}(1)$. Для получения A_1 и

A_2 в (20) и (21) воспользуемся соотношениями (7), (8), (13) и (14):

$$A_1 = 2C_3 - 6(v_2 + 3)x, \quad A_2 = A_1 + 24x. \quad (24)$$

Перепишем теперь условия (20)–(23) в развернутом виде, получим систему линейных однородных уравнений относительно a_2 , a_1 , b_2 и b_1 :

$$\begin{aligned} a_2 + A_1 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \{d_I^{**}(\beta, 1)a_2 + d_{II}^{**}(\beta, 1)a_1 + d_{III}^{**}(\beta, 1)b_2 + d_{IV}^{**}(\beta, 1)b_1\} &= 0, \\ b_2 + nA_2 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \{d_I^{**}(\beta, 1)a_2 + d_{II}^{**}(\beta, 1)a_1 + d_{III}^{**}(\beta, 1)b_2 + d_{IV}^{**}(\beta, 1)b_1\} &= 0, \\ q'_1 a_2 + q'_2 a_1 + q'_3 b_2 + q'_4 b_1 &= 0, \quad q'_5 a_2 + q'_6 a_1 + q'_7 b_2 + q'_8 b_1 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, искомое характеристическое уравнение имеет вид

$$\tilde{\Delta}(\beta_0) = 0, \quad (26)$$

где $\tilde{\Delta}(\beta_0)$ – определитель матрицы $(a_{ij})_{i,j=1}^4$ системы (25), в которой

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + A_1 d_I^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{12} &= A_1 d_{II}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\ a_{13} &= A_1 d_{III}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{14} &= A_1 d_{IV}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\ a_{21} &= nA_2 d_I^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{22} &= nA_2 d_{II}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\ a_{23} &= 1 + nA_2 d_{III}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{24} &= nA_2 d_{IV}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\ a_{31} &= q'_1, & a_{32} &= q'_2, & a_{33} &= q'_3, & a_{34} &= q'_4, \\ a_{41} &= q'_5, & a_{42} &= q'_6, & a_{43} &= q'_7, & a_{44} &= q'_8. \end{aligned}$$

Соответствующее критическому значению радиуса пластической области β_{0*} , $\beta_{0*} \in [0, \beta]$, критическое значение квадрата угловой скорости получаем по формуле (14):

$$\begin{aligned} \omega_*^2 &= -24sq_2^2 \{1 + \beta^2 + (\varepsilon + k)(1 - \beta^2)\} \{(1 + \beta^2)[m + \Gamma(3v_1 + 1)(2 - \\ &\quad - \beta^{-2}\beta_{0*}^2)\beta_{0*}^2] + (1 - \beta^2)[\ell + \Gamma(3v_1 + 1)\{2(\varepsilon + \\ &\quad + k) + \beta^{-2}(\varepsilon - k)\beta_{0*}^2\}\beta_{0*}^2]\}^{-1}. \end{aligned}$$

3. Решение в случае $\mathcal{D}_{1(e)}\mathcal{D}_{2(pe)}$. Рассматривая вначале упругую область $\mathcal{D}_{1(e)}$ (рис. 2), на основании уравнения (2) невозмущенное напряженное состояние получим в виде

$$\sigma_{\theta\theta} = C_1 - \frac{\sigma_1(3v_1 + 1)}{8\sigma_{s2}} \rho^2, \quad \sigma_{rr} = C_1 - \frac{\sigma_1(v_1 + 3)}{8\sigma_{s2}} \rho^2,$$

где C_1 подлежит определению (в (5), (6) учтено, что $\sigma_{\theta\theta}(0) = \sigma_{rr}(0)$). В $\mathcal{D}_{2(p)}$

$$\sigma_{\theta\theta} = 1, \quad \sigma_{rr} = 1 - \frac{\sigma_2}{3\sigma_{s2}} \rho^2 + \frac{C_2}{\rho},$$

тогда как в $\mathcal{D}_{2(e)}$ $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{rr} совпадают по виду с (7) и (8).

Сопряжение полученных решений на окружностях $\rho = \beta$ (здесь опять следует использовать (9), т.к. в пластической области $\mathcal{D}_{2(p)}$ вблизи упруго-пластической границы закон Гука выполняется [10]) и $\rho = \beta_0 = r_{02}/b$ приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} (\varepsilon + k)C_1 - 3\Gamma\beta^2[\varepsilon(3v_1 + 1) + k(v_1 + 3)]x &= 1, \\ C_1 - \beta^{-1}C_2 + \beta^2[8 - 3\Gamma(v_1 + 3)]x &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + \beta_0^{-2})C_3 + 3[v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta_0^2]x &= 1, \\
-\beta_0^{-1}C_2 + (1 - \beta_0^{-2})C_3 + [3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)\beta_0^2]x &= 1.
\end{aligned} \tag{27}$$

Решив систему (27), аналоги соотношений (11)–(14) получим в виде

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1 + 3\beta^2\Gamma[\varepsilon(3v_1 + 1) + k(v_1 + 3)]x}{\varepsilon + k}, \\
C_2 &= \frac{\beta\{1 - (\varepsilon + k) + \beta^2[8(\varepsilon + k) - 6\Gamma\varepsilon(1 - v_1)]x\}}{\varepsilon + k}, \\
C_3 &= \frac{1 - 3[v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta_0^2]x}{1 + \beta_0^{-2}},
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
x &= \{\varepsilon + k + 0.5\beta(1 - (\varepsilon + k))(1 + \beta_0^2)\beta_0^{-1}\} \{(\varepsilon + k)[3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1) \times \\
&\quad \times (2 - \beta_0^2)\beta_0^2] - \beta^3[4(\varepsilon + k) - 3\Gamma\varepsilon(1 - v_1)](1 + \beta_0^2)\beta_0^{-1}\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Возмущенное состояние внешней упругой кольцевой области в исследуемом случае получить довольно просто, т.к. она однородна и представляет собой $D_{2(e)}$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^e &= (nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} + (n-2)C\rho^n + (n+2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\
\sigma_{\theta\theta}^e &= (-nA\rho^{n-2} - nB\rho^{-n-2} - (n+2)C\rho^n - (n-2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\
\sigma_{r\theta}^e &= (-nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} - nC\rho^n + nD\rho^{-n}) \sin n\theta, \\
u^e &= \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \left(\frac{(v_2 + 1)n}{n-1} A\rho^{n-1} - \frac{(v_2 + 1)n}{n+1} B\rho^{-n-1} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n-2 + v_2(n+2)}{n+1} C\rho^{n+1} - \frac{n+2 + v_2(n-2)}{n-1} D\rho^{-n+1} \right) \cos n\theta.
\end{aligned}$$

Следовательно, характеристическое уравнение приобретает вид (26) с

$$\begin{aligned}
a_{11} &= n + A_1 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{(v_2 + 1)n}{n-1}, & a_{12} &= n - A_1 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{(v_2 + 1)n}{n+1}, \\
a_{13} &= n - 2 + A_1 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{n-2 + v_2(n+2)}{n+1}, \\
a_{14} &= n + 2 - A_1 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{n+2 + v_2(n-2)}{n-1}, \\
a_{21} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{(v_2 + 1)n}{n-1}, & a_{22} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{(v_2 + 1)n}{n+1}, \\
a_{23} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{n-2 + v_2(n+2)}{n+1}, & a_{24} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{n+2 + v_2(n-2)}{n-1}, \\
a_{31} &= n\beta_0^{n-2}, & a_{32} &= n\beta_0^{-n-2}, & a_{33} &= (n-2)\beta_0^n, & a_{34} &= (n+2)\beta_0^{-n}, \\
a_{41} &= -\beta_0^{n-2}, & a_{42} &= \beta_0^{-n-2}, & a_{43} &= -\beta_0^n, & a_{44} &= \beta_0^{-n}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 + A_1 d_I^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{12} &= A_1 d_{II}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\
a_{13} &= A_1 d_{III}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{14} &= A_1 d_{IV}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\
a_{21} &= nA_2 d_I^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{22} &= nA_2 d_{II}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\
a_{23} &= 1 + nA_2 d_{III}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{24} &= nA_2 d_{IV}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= 0, & a_{32} &= 1, & a_{33} &= 0, & a_{34} &= 0, \\ a_{41} &= 0, & a_{42} &= 0, & a_{43} &= 0, & a_{44} &= 1. \end{aligned}$$

При этом A_1, A_2 определяются соотношениями (24), (28), (29).

4. Решение в случае $\mathcal{D}_{1(pe)}\mathcal{D}_{2(pe)}$. Анализируя случай с двумя пластическими зонами (круговой в \mathcal{D}_1 и кольцевой в \mathcal{D}_2) как возможный механизм потери устойчивости составного диска \mathcal{D} (рис. 3), учтем и «объединим» результаты пп. 2, 3. «Двигаясь» от $\mathcal{D}_{1(p)}$ к $\mathcal{D}_{2(e)}$, выпишем четыре пары соответствующих выражений для $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{rr} :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}}, \quad (30)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}} - \frac{\sigma_1}{3\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (31)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} - \frac{\sigma_1(3\nu_1 + 1)}{8\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (32)$$

$$\sigma_{rr} = C_1 - \frac{C_2}{\rho^2} - \frac{\sigma_1(\nu_1 + 3)}{8\sigma_{s2}} \rho^2; \quad (33)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 1, \quad (34)$$

$$\sigma_{rr} = 1 - \frac{\sigma_2}{3\sigma_{s2}} \rho^2 + \frac{C_3}{\rho}, \quad (35)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_4 \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\sigma_2(\nu_2 + 3)}{8\sigma_{s2}} - \frac{\sigma_2(3\nu_2 + 1)}{8\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (36)$$

$$\sigma_{rr} = C_4 \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\sigma_2(\nu_2 + 3)}{8\sigma_{s2}} (1 - \rho^2). \quad (37)$$

Сопряжение компонент напряжений (30) и (32), (31) и (33) на окружности $\rho = \beta_{01} = r_{01}/b$, (32) и (34), (33) и (35) – на окружности $\rho = \beta$, а также (34) и (36), (35) и (37) – на окружности $\rho = \beta_0 = r_{02}/b$ приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} C_1 + \beta_{01}^{-2} C_2 - 3\Gamma(3\nu_1 + 1)\beta_{01}^2 x &= s, \\ C_1 - \beta_{01}^{-2} C_2 - \Gamma(3\nu_1 + 1)\beta_{01}^2 x &= s, \\ (\varepsilon + k)C_1 + \beta^{-2}(\varepsilon - k)C_2 - 3\beta^2\Gamma(\varepsilon(3\nu_1 + 1) + k(\nu_1 + 3))x &= 1, \\ C_1 - \beta^{-2}C_2 - \beta^{-1}C_3 - \beta^2(3\Gamma(\nu_1 + 3) - 8)x &= 1, \\ (1 + \beta_0^{-2})C_4 + 3(\nu_2 + 3 - (3\nu_2 + 1)\beta_0^2)x &= 1, \\ -\beta_0^{-1}C_3 + (1 - \beta_0^{-2})C_4 + (3(\nu_2 + 3) - (3\nu_2 + 1)\beta_0^2)x &= 1, \end{aligned}$$

из которой можно получить следующие шесть зависимостей от β_0 :

$$\begin{aligned} C_1 &= s + 2\Gamma(3\nu_1 + 1)\beta_{01}^2 x, & C_2 &= \Gamma(3\nu_1 + 1)\beta_{01}^4 x, \\ C_3 &= 2\beta_0 \frac{1}{1 + \beta_0^2} \{ [3(\nu_2 + 3) - (3\nu_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2] x - 1 \}, \\ C_4 &= \beta_0 \frac{1}{1 + \beta_0^2} \{ 1 - 3(\nu_2 + 3 - (3\nu_2 + 1)\beta_0^2)x \}, \\ x &= [1 - s(\varepsilon + k)]\Gamma^{-1} \{ (3\nu_1 + 1)[2(\varepsilon + k) + (\varepsilon - k)\beta^{-2}\beta_{01}^2]\beta_{01}^2 - \\ &\quad - 3\beta^2[\varepsilon(3\nu_1 + 1) + k(\nu_1 + 3)] \}^{-1}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\beta_{01}^2 = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4c_1c_3}}{2c_1}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= -\beta^2\Gamma(3\nu_1 + 1)\{[1 - 2\varepsilon s + \varepsilon - k](1 + \beta_0^2) - 2(\varepsilon - k)\beta^{-1}\beta_0\}, \\ c_2 &= 2\Gamma(3\nu_1 + 1)\{[1 - (\varepsilon + k)](1 + \beta_0^2) + 2(\varepsilon + k)\beta^{-1}\beta_0\}, \\ c_3 &= 3\beta^2\Gamma[\varepsilon(3\nu_1 + 1) + k(\nu_1 + 3)]\{(1 - s)(1 + \beta_0^2) - 2\beta^{-1}\beta_0\} + \\ &\quad + [1 - s(\varepsilon + k)]\{\beta^2(8 - 3\Gamma(\nu_1 + 3))(1 + \beta_0^2) - \\ &\quad - 2\beta^{-1}\beta_0[3(\nu_2 + 3) - (3\nu_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2]\}. \end{aligned}$$

Это позволяет полностью определить невозмущенное напряженное состояние диска \mathcal{D} и составить характеристическое уравнение (26) с

$$A_1 = 2C_4 - 6(\nu_2 + 3)x, \quad A_2 = A_1 + 24x$$

и a_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$, из п. 3.

Решив характеристическое уравнение (26), по найденному критическому значению $\beta_0 = \beta_{0*}$ радиуса кольцевой пластической области $\mathcal{D}_{2(p)}$ определяем согласно (39) и (38) критический радиус $\beta_{01} = \beta_{01*}$ круговой пластической зоны $\mathcal{D}_{1(p)}$ и критическую угловую скорость ω_* .

5. Числовые примеры и обсуждение результатов. Для составного диска с параметрами $\beta = 0.93$, $\nu_1 = 0.31$, $\nu_2 = 0.3$, $\varepsilon = 1$, $\Gamma = 0.99$, $s = 0.99$, $\sigma_{s2}/E_2 = 0.01$, теряющего по предположению устойчивость по сценарию 1° (см. рис. 1), значения критического радиуса β_{0*} пластической зоны $\mathcal{D}_{1(p)}$ и относительной критической скорости вращения ω_*/q_2 в зависимости от n (формула (1)) приведены в табл. 1. Заметим, что, положив в этом случае $\nu_1 = \nu_2 = 0.5$ и $\varepsilon = s = \Gamma = 1$, получаем известное решение для однородного диска из несжимаемого материала [6, 12].

Таблица 1

n	2	3	4	5
β_{0*}	0.7148	0.8440	0.8968	0.9250
ω_*/q_2	1.6825	1.7133	1.7223	1.7259

Решения поставленной задачи в случае реализации механизма 2° (см. рис. 2) потери устойчивости неоднородного диска с параметрами $\beta = 0.1$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$, $\varepsilon = 1.1$, $\Gamma = 0.9$, $s = 1.1$, $\sigma_{s2}/E_2 = 0.01$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

n	2	3	4	5	6
β_{0*}	0.7159	0.8448	0.8971	0.9253	0.9425
ω_*/q_2	1.6656	1.7005	1.7108	1.7149	1.7169

Механизм 3° (см. рис. 3) потери устойчивости составного диска с образованием двух пластических зон радиусов β_{01*} и β_{0*} иллюстрируется соответствующими критическими значениями из табл. 3. Вычисления выполнены при $\beta = 0.5$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.2$, $\varepsilon = 1.2$, $\Gamma = 0.9$, $s = 1.1$, $\sigma_{s2}/E_2 = 0.01$.

Таблица 3

n	2	3	4	5	6
β_{01*}	0.0750	0.1248	0.1356	0.1399	0.1418
β_{0*}	0.7114	0.8420	0.8954	0.9239	0.9414
ω_*/q_2	1.7243	1.7527	1.7614	1.7650	1.7666

В каждом из рассмотренных случаев полученные числовые результаты согласуются с видом возмущения контурной окружности: при увеличении значения параметра n характерные критические величины возрастают, – диск дольше сопротивляется потере «запаса упругости», оставаясь устойчивым (см. [6, 10]).

Изложенным способом, эффективность которого продемонстрирована предыдущими примерами, можно рассчитать момент перехода быстро вращающегося составного сплошного кругового диска в неустойчивое состояние по одному из механизмов 1° – 3° . Более того, сравнение при медленно увеличиваемом (от небольших значений) параметре ω напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в центре упругого диска \mathcal{D} с σ_{s1} и на окружности $\rho = \beta$ – с σ_{s2} дает возможность спрогнозировать, будет ли потеряна устойчивость по сценарию 1° или 3° , либо – 2° или 3° . Детальный анализ этого вопроса, включая особые случаи $\mathcal{D}_{1(p)}\mathcal{D}_{2(e)}$ и $\mathcal{D}_{1(p)}\mathcal{D}_{2(pe)}$, составит предмет дальнейших исследований.

Заметим, что полученный в работе результат в случае 1° обобщает аналогичный результат для сплошного однородного диска. Случаи 2° и 3° можно интерпретировать как потерю устойчивости однородным кольцевым диском \mathcal{D}_2 , специальным образом нагруженным в его плоскости по внутреннему контуру [16]. Положив в 2° и 3° $\Gamma = 0$, $s = 0$, $\varepsilon = +\infty$, $k = -\infty$ и выводя, таким образом, из рассмотрения диск \mathcal{D}_1 , из (26), (29), (38) и (39) сразу же получаем характеристическое уравнение и критическую скорость для неустойчивого кругового кольцевого диска, свободного от контурных усилий.

С практической точки зрения, приведенный способ исследования неустойчивости интересен, помимо прочего, прежде всего для изучения быстро вращающейся системы вал – диск, когда сечение вала образует \mathcal{D}_1 , а жестко насаженный диск – \mathcal{D}_2 . В связи с этим перспективным представляется распространение ранее полученных результатов относительно динамики возмущения формы границы однородных плоских и ступенчатых дисков, а также дисков произвольного профиля на радиально неоднородные диски. При этом подчеркнем, что приведенный в работе подход к изучению потери устойчивости вращающихся дисков дает возможность исследовать некоторые вопросы их сверхскоростной динамики в уточненной постановке. Он позволяет учесть выборочный характер перехода тех или иных кольцевых зон (ступеней) диска (или их подобластей) в пластическое состояние в случае существенного отличия их толщин и объяснить аналитически в рамках используемого метода малого параметра подтвержденный опытами механизм потери несущей способности реальных дисков посредством отрыва ступицы или обода либо разрывов в области локализации отверстий и пустот.

1. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: В 2 т. – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1950. – Т. 1. – 900 с.
2. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: В 2 т. – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1952. – Т. 2. – 640 с.
3. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
4. Гузь А. Н., Немчи Ю. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Выща шк., 1989. – 352 с.
5. Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. – Москва: Машиностроение, 1978. – 247 с.
6. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125.

7. *Жук Я. О., Сенченков И. К., Васильева Л. Я.* Влияние микроструктурных превращений на напряженно-деформированный стан локально облученного сталевого диска // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2011. – **54**, № 1. – С. 101–115.
То же: *Zhuk Ya. O., Senchenkov I. K., Vasylyeva L. Ya.* Influence of microstructural transformations on the stress-strain state of a locally irradiated steel disk // *J. Math. Sci.* – 2012. – **183**, No. 1. – P. 112–129.
8. *Ивлев Д. Д.* Механика пластических сред: В 2 т. – Т. 2: Общие вопросы. Жестко-пластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – Москва: Физматлит, 2002. – 448 с.
9. *Ивлев Д. Д.* О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // *Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук.* – 1957. – № 1. – С. 141–144.
10. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
11. *Лила Д. М.* Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска // *Доп. НАН України.* – 2011. – № 2. – С. 49–53.
12. *Лила Д. М., Мартынюк А. А.* О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска // *Доп. НАН України.* – 2011. – № 1. – С. 44–51.
13. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел: В 2 т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – Т. 1. – 648 с.
14. *Прокопович И. Б.* Загальний підхід до розробки математичних моделей неруйнівного контролю напружень. I. Методологічне та фізичне обґрунтування і кінематична модель // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 2. – С. 68–75.
То же: *Prokopych I. B.* General approach to the development of mathematical models of nondestructive stress control. I. Methodological and physical substantiation and a kinematic model // *J. Math. Sci.* – 2011. – **178**, No. 4. – P. 447–454.
15. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. – Москва: Высш. шк., 1969. – 608 с.
16. *Токовий Ю. В., Ханг К.-М., Ма Ч.-Ч.* Визначення напружень і переміщень у тонкому кільцевому диску під дією діаметрального стиску // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 3. – С. 152–162.
То же: *Tokovyy Yu. V., Hung K.-M., Ma C.-C.* Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression // *J. Math. Sci.* – 2010. – **165**, No. 3. – P. 342–354.
17. *Cláudio R. A., Branco C. M., Gomes E. C., Byrne J., Harrison G. F., Winstone M. R.* Fatigue life prediction and failure analysis of a gas turbine disc using the finite element method // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2004. – **27**. – P. 849–860.
18. *Georgievskii D. V.* Small perturbations of an undeformed state in media with yield stress // *Doklady Physics.* – 2003. – **48**, No. 10. – P. 590–593.
То же: *Георгиевский Д. В.* Малые возмущения недеформированного состояния в средах с пределом текучести // *Докл. РАН.* – 2003. – **392**, № 5. – С. 634–637.
19. *László F.* Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation // *Z. angew. math. mech.* – 1925. – **5**, No. 4. – P. 281–293.
20. *Lila D. M., Martynuk A. A.* Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // *Appl. Math.* – 2011. – **2**, No. 5. – P. 579–585.
21. *Liu C. L., Lu Z. Z., Xu Y. L., Yue Z. F.* Reliability analysis for low cycle fatigue life of the aeronautical engine turbine disc structure under random environment // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2005. – **395**. – P. 218–225.
22. *Love A. E. H.* A treatise on the mathematical theory of elasticity. – New York: Dover Publ., 1927. – 643 p.
23. *Manavi B.* Centrifugal rotor tri-hub burst for containment system validation // *ASME Turbo Expo 2006: Power for Land, Sea and Air.* – ASME, 2006. – P. 1–9.
24. *Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F.* Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks – Part I: Analytical and numerical stability analyses // *Eur. J. Mech. A/Solid.* – 2009. – **28**, No. 1. – P. 36–44.
25. *Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F.* Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part II – Burst of a superalloy turbine disk // *Eur. J. Mech. A/Solid.* – 2009. – **28**, No. 3. – P. 428–432.
26. *Meguid S. A., Kanth P. S., Czekanski A.* Finite element analysis of fir-tree region in turbine discs // *Finite Elem. Anal. Des.* – 2000. – **35**, No. 4. – P. 305–317.
27. *Newman J. C.* Application of a closure model to predict crack growth in three engine disc materials // *Int. J. Fracture.* – 1996. – **80**, No. 2–3. – P. 193–218.
28. *Percy M., Ball K., Mellor P.* An experimental study of the burst strength of rotating disks // *Int. J. Mech. Sci.* – 1974. – **16**. – P. 809–817.

29. Roark R. J., Young W. C. Formulas for stress and strain. – New York: McGraw-Hill, 1982. – 518 p.
30. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1934. – 415 p.
То же: Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
31. Tvergaard V. On the burst strength and necking behavior of rotating disks // Int. J. Mech. Sci. – 1978. – **20**. – P. 109–120.
32. Walz G., Riesch-Oppermann H. Probabilistic fracture mechanics assessment of flaws in turbine disks including quality assurance procedures // Struct. Saf. – 2006. – **28**, No. 3. – P. 273–288.
33. Witek L. Failure analysis of turbine discs of an aero engine // Eng. Failure Anal. – 2006. – **13**. – P. 9–17.
34. Zhuang W. Z. Prediction of crack growth from bolt holes in a disc // Int. J. Fatigue. – 2000. – **22**, No. 3. – P. 241–250.

ПРО НЕСТІЙКІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО СКЛАДЕНОГО ПЛОСКОГО КРУГОВОГО ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Запропоновано спосіб дослідження методом малого параметра можливої втрати стійкості складеного плоского кругового диска, що обертається. Одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання при різних параметрах диска.

ON INSTABILITY OF A ROTATING ELASTOPLASTIC COMPOSITE PLANE CIRCULAR DISC

A way of calculating a possible stability loss by a rotating elastoplastic composite plane circular disc is suggested with the help of small parameter method. A characteristic equation for a critical radius of a plastic zone is obtained as a first approximation. The values of critical angular velocity of rotating at different parameters of the disc are found numerically.

¹ Черкаський нац. ун-т
им. Б. Хмельницького, Черкаси,
² Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенко
НАН України, Київ

Получено
08.08.11