

ВИВЧЕННЯ РОЗМІРНИХ ЕФЕКТІВ У ТОНКИХ ВОЛОКНАХ

На прикладі модельної задачі для суцільного циліндра в рамках локально градієнтного підходу в термомеханіці вивчено розмірні ефекти у тонких волокнах. Досліджено залежність поверхневих напружень, енергії зв'язку, а також інтенсивності силового навантаження, що призводить до крихкого руйнування, від радіуса волокна. Проведено порівняння результатів з аналогічними, одержаними у випадку, коли на поверхні циліндра задано постійне значення хімічного потенціалу (енергії зв'язку). Вказано на істотну залежність розмірних ефектів від крайових умов, а також на фізичну обґрунтованість задання на поверхні тіла густини або дивергенції вектора зміщення маси. Показано, що значення хімічного потенціалу, який встановлюється на поверхні тіла, однозначно визначається геометричними та фізичними характеристиками тіла, а також параметрами силового навантаження.

Вступ. В останні десятиліття у зв'язку з інтенсивним розвитком нанотехнологій та широким використанням в інженерній практиці тонкоплівкових і тонковолокнистих систем важливого значення набуває побудова та дослідження математичних моделей, які достатньо повно враховують властивості приповерхневих областей тіла і структуру матеріалу. До таких моделей належать нелокальні моделі механіки суцільного середовища [13–17, 19–21, 23] та моделі, побудовані за локально градієнтного підходу у термомеханіці [1, 2, 4, 6, 9, 18]. У рамках цього підходу простір параметрів локального стану розширено хімічним потенціалом і його градієнтом, спряженими до яких відповідно є густина та вектор зміщення маси. При формулюванні крайових задач на поверхні тіла, як правило, задавали постійне значення хімічного потенціалу. Однак способів вимірювання чи визначення такого значення вказати не можна, оскільки збурення хімічного потенціалу можна ототожнити зі збуренням енергії зв'язку [2]. У роботі [9] показано, що моделі, побудовані за локально градієнтного підходу, враховують структуру, у тому числі структуру приповерхневих областей тіла. Згідно із сучасними уявленнями про поверхню тіла її схематично можна подати, як на рис. 1. У машино- та приладобудуванні для опису властивостей поверхні широко використовують поняття шорсткості. Так, сучасні технології для виробництва комп'ютерних жорстких дисків вимагають шорсткості поверхні на рівні кількох нанометрів [3, 12].

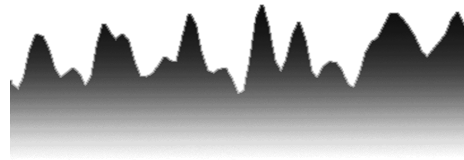


Рис. 1

У механіці деформівного твердого тіла поняття поверхні тіла ідеалізується і, в основному, її моделюють гладкою поверхнею. У випадку півпростору такою поверхнею є площина. Оскільки характеристики тіла розглядаємо як осереднені, то, прийнявши, що поверхня тіла проходить через найбільшу висоту профілю реальної поверхні, природно прийняти, що густина на цій поверхні дорівнює нулеві ($\rho = 0$). У такому наближенні густина тіла у глибину півпростору зростає від нульового поверхневого значення до деякого значення ρ_* .

Зазначимо, що неідеальну форму поверхні враховують при побудові математичних моделей контактної взаємодії твердих тіл [11, 22]. При цьому розрізняють фізичну неоднорідність приповерхневих шарів і геометричну неоднорідність поверхонь тіл (відхилення реальної границі тіла від її ідеальної форми).

У праці [7] показано, що розв'язки крайових задач та ефекти, які описують моделі, побудовані за локально градієнтного підходу в термомеханіці, суттєво залежать від граничних умов. Граничною ж умовою, яка враховує фізичну та геометричну неоднорідність поверхні за цього підходу є умова для густини або для вектора зміщення маси.

Ця робота є розвитком праці [7] і метою її є вивчення за локально градієнтного підходу в термомеханіці розмірних ефектів у тонких волокнах, у тому числі поверхневих напружень і хімічного потенціалу, а також силового навантаження, що призводить до крихкого руйнування тіла.

1. Формулювання задачі. Розглянемо пружне деформівне тверде тіло, яке взаємодіє із зовнішнім середовищем. Основну увагу зосередимо на вивченні ефектів, пов'язаних з приповерхневою неоднорідністю. За початковий (відліковий) стан тіла приймаємо стан, який відповідає стану необмеженого середовища, вільного від зовнішнього навантаження, у якому приповерхнева неоднорідність відсутня. Ключова система рівнянь моделі пружного тіла за локально градієнтного підходу, записана відносно тензора напружень $\hat{\sigma}$ та вектора зміщення маси Π_M , має вигляд [8]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\sigma} &= 0, \\ \nabla \times \left\langle \nabla \times \left\{ \hat{\sigma} - \frac{1}{3K} \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) \sigma + 2G\beta(\nabla \cdot \Pi_M) \right] \hat{I} \right\} \right\rangle &= 0, \\ 3(\beta^2 - \alpha K) \nabla(\nabla \cdot \Pi_M) + 3K\gamma \Pi_M - \beta \nabla \sigma &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\sigma = \hat{\sigma} \cdot \hat{I}$; \hat{I} – одиничний тензор; K , G – модулі об'ємного стиску та зсуву; α , β , γ – характеристики матеріалу; ∇ – диференціальний оператор Гамільтона; « \times » – символ векторного добутку.

При формулюванні крайових задач систему рівнянь (1) слід доповнити відповідними граничними умовами та при необхідності – умовами обмеженості розв'язку. Природною граничною умовою для вектора Π_M є умова

$$\nabla \cdot \Pi_M \Big|_{\partial V} = \rho_a,$$

де $\rho_a = (\rho - \rho_*) \Big|_{\partial V}$ – задане поверхнєве значення збурення густини; ρ_* – густина безмежного середовища, матеріал якого ідентичний матеріалу тіла. Якщо прийняти, що поверхня тіла проходить через найбільшу висоту профілю реальної поверхні, то $\rho = 0$ і $\rho_a = -\rho_*$.

Використовуючи (1), запишемо систему рівнянь, яка описує рівноважний осесиметричний стан необмеженого суцільного ізотропного деформівного кругового циліндра, віднесеного до циліндричної системи координат (r, φ, z) , вісь Oz якої співпадає з віссю циліндра. Вважаємо, що поверхня циліндра $r = R_0$ вільна від силового навантаження і на ній задано постійне значення збурення густини ρ_a . На безмежності циліндр навантажений зусиллями інтенсивності σ_a ($\sigma_a \geq 0$). За такої зовнішньої дії рівноважний стан тіла залежить лише від координати r і описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ r \frac{d^2\sigma_{\varphi\varphi}}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} - \frac{d\sigma_{rr}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{K - 2/3G}{3K} \sigma + \frac{2G\beta}{3K} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right] \right\}, \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left[\frac{K - 2/3G}{3K} \sigma + \frac{2G\beta}{3K} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right], \\ \frac{d^2\Pi_{Mr}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Pi_{Mr}}{dr} - \left(\frac{K\gamma}{\alpha K - \beta^2} + \frac{1}{r^2} \right) \Pi_{Mr} &+ \frac{\beta}{3(\alpha K - \beta^2)} \frac{d\sigma}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} – компоненти тензора напружень $\hat{\sigma}$; Π_{Mr} – компонента вектора зміщення маси $\mathbf{\Pi}_M$ ($\mathbf{\Pi}_M = (\Pi_{Mr}, 0, 0)$).

Граничні умови сформульованої задачі такі:

$$\sigma_{rr}|_{r=R_0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Pi_{Mr}) \Big|_{r=R_0} = \rho_a. \quad (4)$$

Умови (3), (4) необхідно доповнити умовами обмеженості розв'язку на осі циліндра

$$\begin{aligned} |\Pi_{Mr}(r)| < \infty, \\ |\sigma_{rr}(r)| < \infty, \quad |\sigma_{\varphi\varphi}(r)| < \infty, \quad |\sigma_{zz}(r)| < \infty, \quad r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5)$$

а також умовою, яка відповідає навантаженню тіла на безмежності зусиллями інтенсивності σ_a :

$$\frac{1}{\pi R_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \sigma_{zz} r dr d\varphi = \sigma_a. \quad (6)$$

2. Рівноважний стан суцільного циліндра. Розв'язок задачі (2)–(6) є таким:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{(K + 4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[\frac{I_1(\xi r)}{\xi r} - \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{(K + 4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[I_0(\xi r) - \frac{I_1(\xi r)}{\xi r} - \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{zz}(r) &= \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_a}{(K + 4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[I_0(\xi r) - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Pi_{Mr}(r) = \frac{\rho_a}{\xi I_0(\xi R_0)} I_1(\xi r). \quad (8)$$

Тут $I_0(\xi r)$, $I_1(\xi r)$ – модифіковані функції Бесселя відповідно нульового та першого порядків; $\xi = \sqrt{\frac{\gamma(K + 4/3G)}{\alpha(K + 4/3G) - \beta^2}}$.

Аналіз формул (7) показує, що величина $1/\xi$ є характерним розміром приповерхневої неоднорідності. Напруження σ_{rr} дорівнюють нулеві на поверхні циліндра і монотонно зменшуються, досягаючи мінімальних значень на осі циліндра $r = 0$. Напруження $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} найбільші на поверхні $r = R_0$, де вони є розтягуючими:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}(R_0) &= \frac{2G\beta\rho_a}{(K + 4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[I_0(\xi R_0) - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{zz}(R_0) &= \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_a}{(K + 4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[I_0(\xi R_0) - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

У вільному від силового навантаження ($\sigma_a = 0$) циліндрі $\sigma_{\varphi\varphi}(R_0) = \sigma_{zz}(R_0)$, а з віддаленням від поверхні циліндра $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} монотонно зменшуються, досягаючи найменшого значення на осі циліндра:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}(0) &= \frac{G\beta\rho_a}{(K + 4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[1 - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{zz}(0) &= \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_a}{(K + 4/3G)I_0(\xi R_0)} \left[1 - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right]. \end{aligned}$$

Напруження залежать від радіуса циліндра, тобто їм властивий розмірний ефект. При $R_0 \rightarrow \infty$ напруження прямують до значень відповідних напружень у півпросторі. Це й ілюструють криві на рис. 2, де наведено залежності відносних напружень $\sigma_{\varphi\varphi}/\sigma_0$ ($\sigma_0 = 2G\beta\rho_a/(K + 4/3G)$) на поверхні та осі циліндра (відповідно суцільна та штрихова лінії) від радіуса (параметра ξR_0).

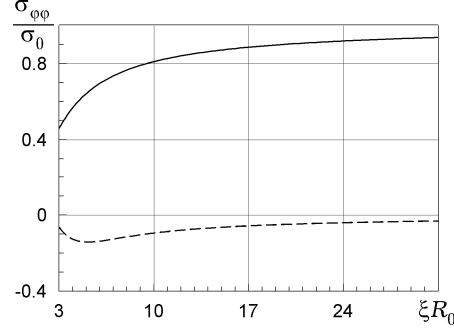


Рис. 2

Для циліндрів малих (порівняно з областю приповерхневої неоднорідності) радіусів (тонких волокон) неоднорідність у розподілі напружень істотна в усій області тіла, тоді як для циліндрів великих радіусів напруження відрізняються від нуля лише у вузькій приповерхневій області, за межею якої вони практично дорівнюють нулеві.

Використовуючи рівняння стану

$$\eta - \eta_* = -\frac{\alpha K - \beta^2}{K} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_M - \frac{\beta}{3K} \sigma,$$

за відомими компонентами тензора напружень σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} (7) і вектора зміщення маси $\mathbf{\Pi}_{Mr}$ (8) для збурення хімічного потенціалу відносно початкового значення одержуємо

$$\eta(r) - \eta_* = -\frac{\rho_a}{3K(K + 4/3G)I_0(\xi R_0)} \left\{ 3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2]I_0(\xi r) - 8G\beta^2 \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right\} - \frac{\beta}{3K} \sigma_a. \quad (10)$$

Для поверхневого значення хімічного потенціалу у тілі вільному від зовнішнього силового навантаження запишемо

$$\eta(R_0) - \eta_* = -\frac{\rho_a}{3K(K + 4/3G)I_0(\chi R_0)} \left\{ 3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2]I_0(\chi R_0) - 8G\beta^2 \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right\}. \quad (11)$$

Бачимо, що поверхневому значенню хімічного потенціалу властивий розмірний ефект (залежить від радіуса циліндра). Це значення залежить також від інтенсивності зовнішнього силового навантаження σ_a , що є природним, оскільки збурення хімічного потенціалу, як згадувалось раніше, можна ототожнити зі збуренням енергії зв'язку. Зі збільшенням радіуса вільного від силового навантаження циліндра величина $\eta(R_0) - \eta_*$ прямує до поверхневого значення збурення хімічного потенціалу у півпросторі:

$$\eta_h - \eta_* = -\left(\alpha - \frac{\beta^2}{K + 4/3G} \right) \rho_a.$$

Якщо прийняти $\rho_a = -\rho_*$, то

$$\eta_h - \eta_* = \left(\alpha - \frac{\beta^2}{K + 4/3G} \right) \rho_*.$$

З формул (10), (11) випливає, що у цьому випадку значення хімічного потенціалу на поверхні циліндра однозначно визначається його фізичними і геометричними характеристиками, а також параметрами зовнішнього навантаження. На рис. 3 показано залежності поверхневого значення відносного хімічного потенціалу $H_s = (\eta - \eta_*)/(\eta_h - \eta_*)$ від радіуса циліндра (параметра ξR_0) для $a = 0.1, 0.3, 0.5$ (тут $a = 8G\beta^2/\{3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2]\}$).

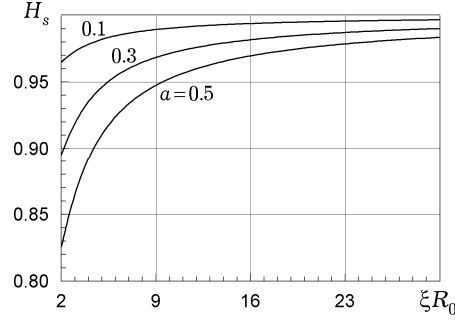


Рис. 3

Якщо на поверхні циліндра замість умови (4) вибрати умову на хімічний потенціал у вигляді $\eta = \eta_a$ (де $\eta_a = \text{const}$), то розв'язок такої задачі має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \frac{6KG\beta}{I_0(\xi R_0)B(\xi R_0)} \left(\eta_* - \eta_a - \frac{\beta}{3K} \sigma_a \right) \left[\frac{I_1(\xi r)}{\xi r} - \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) &= \frac{6KG\beta}{I_0(\xi R_0)B(\xi R_0)} \left(\eta_* - \eta_a - \frac{\beta}{3K} \sigma_a \right) \left[I_0(\xi r) - \frac{I_1(\xi r)}{\xi r} - \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \\ \sigma_{zz}(r) &= \sigma_a + \frac{6KG\beta}{I_0(\xi R_0)B(\xi R_0)} \left(\eta_* - \eta_a - \frac{\beta}{3K} \sigma_a \right) \left[I_0(\xi r) - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$M_{Mr}(r) = \frac{3K(K + 4/3G)}{\xi I_0(\xi R_0)B(\xi R_0)} \left(\eta_* - \eta_a - \frac{\beta}{3K} \sigma_a \right) I_1(\xi r), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \eta(r) - \eta_* &= -\frac{1}{I_0(\xi R_0)B(\xi R_0)} \left(\eta_* - \eta_a - \frac{\beta}{3K} \sigma_a \right) \{ 3K[\alpha(K + 4/3G) - \\ &\quad - \beta^2] \xi R_0 I_0(\xi r) - 8G\beta^2 I_1(\xi R_0) \} - \frac{\beta}{3K} \sigma_a. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут $B(\xi R_0) = 3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2] - 8G\beta^2 \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0 I_0(\xi R_0)}$.

З порівняння розв'язків (7), (8), (10) і (12)–(14) випливає, що у випадку задання на поверхні $r = R_0$ циліндра густини ρ_a одержаний розв'язок є значно простішим. При цьому істотно змінюється залежність розглядуваних полів від радіуса циліндра, тобто змінюється характер розмірних ефектів. Формули (12)–(14) слід трактувати як такі, що описують розподіл полів у циліндрі при заданому значенні хімічного потенціалу на поверхні тіла. Однак, враховуючи залежність поверхневого значення хімічного потенціалу від фізичних і геометричних характеристик тіла, вивчення розмірних та інших ефектів на їх основі може призвести до помилкових висновків. Проілюструємо це на прикладі розмірного ефекту міцності циліндра.

3. Розмірний ефект міцності циліндра. У випадку розтягуючого силового навантаження ($\sigma_a > 0$) найбільшими напруженнями є поверхневі напруження $\sigma_{zz}(R_0)$, що описуються формулою (9). Для розрахунку міцності циліндра використаємо критерій першої класичної теорії міцності [10], а також методику, наведену у праці [5]. Тоді на основі співвідношення (9), отримуємо значення інтенсивності зовнішнього силового навантаження σ_a^{cr} , що призводить до руйнування циліндра

$$\sigma_a^{cr} = \sigma_p - \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left(1 - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0 I_0(\xi R_0)} \right), \quad (15)$$

де σ_p – теоретична межа міцності. Зі збільшенням радіуса циліндра значення σ_a^{cr} прямує до сталої величини σ_+ :

$$\sigma_+ = \sigma_p - \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G}, \quad (16)$$

яка відповідає інтенсивності силового навантаження, що призводить до руйнування товстих тіл.

Якщо прийняти $\rho_a = -\rho_*$, то

$$\sigma_+ = \sigma_p + \frac{2G\beta\rho_*}{K + 4/3G}.$$

Використовуючи (16), співвідношення (15) перетворюємо до вигляду

$$\sigma_a^{cr} = \sigma_+ + \frac{4G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \frac{I_1(\xi R_0)}{\xi R_0 I_0(\xi R_0)}. \quad (17)$$

Праву частину співвідношення (17) можна трактувати як таку, що описує вплив розмірів циліндра на його міцність (розмірний ефект межі міцності). Бачимо, що зі збільшенням радіуса циліндра величина прикладеного силового навантаження, яке призводить до його руйнування, зменшується, прямує до σ_+ . Це й ілюструють графіки на рис. 4, на якому показано залежність σ_a^{cr}/σ_+ від радіуса циліндра (параметра ξR_0) для значень $b = 0.2, 0.8, 1.6$ (де $b = 4G\beta\rho_a/(K + 4/3G)\sigma_+$).

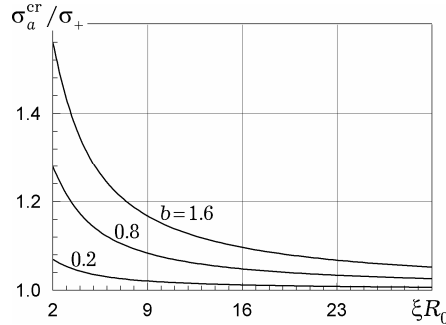


Рис. 4

У випадку задання на поверхні $r = R_0$ циліндра постійного значення хімічного потенціалу η_a для інтенсивності силового навантаження σ_a^{cr*} одержуємо

$$\sigma_a^{cr*} = \frac{\sigma_p - 6KG\beta(\eta_* - \eta_a)B_1(\xi R_0)}{1 - 2G\beta^2 B_1(\xi R_0)}.$$

Тут $B_1(\xi R_0) = \left[1 - \frac{2I_1(\xi R_0)}{\xi R_0 I_0(\xi R_0)} \right] \frac{1}{B(\xi R_0)}$.

Якщо, як і раніше, через σ_+^* позначити значення інтенсивності силового навантаження σ_a^{cr*} у товстих циліндрах, то

$$\sigma_+^* = \frac{3K\{\sigma_p[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2] - 2G\beta(\eta_* - \eta_a)\}}{3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2] - 2G\beta^2}.$$

Тоді

$$\sigma_a^{cr*} = \frac{1}{1 - 2G\beta^2 B_1(\xi R_0)} \left\{ \sigma_+^* \left[1 - \frac{2G\beta^2}{3K[\alpha(K + 4/3G) - \beta^2]} \right] + 2G\beta(\eta_* - \eta_a) \left[\frac{1}{\alpha(K + 4/3G) - \beta^2} - 3KB_1(\xi R_0) \right] \right\}. \quad (18)$$

Порівнюючи формули (17) і (18), відмітимо суттєво складнішу залежність від радіуса циліндра у (18). При цьому значення η_a у цій формулі і виразі для σ_+^* у загальному випадку є різними, оскільки η_a , як випливає з формули (11), залежить від характерного розміру тіла.

Висновки. За локально градієнтного підходу в термомеханіці на прикладі модельної задачі для суцільного пружного циліндра вивчено розмірні ефекти поверхневих напружень і збурення хімічного потенціалу (енергії зв'язку), а також інтенсивності силового навантаження, що призводить до крихкого руйнування тіла. Одержано формулу для хімічного потенціалу, який встановлюється на поверхні тіла. Показано, що це значення однозначно визначається фізичними та геометричними характеристиками тіла, а також параметрами зовнішнього навантаження. Тому задання на поверхні тіла сталого значення збурення хімічного потенціалу при вивченні приповерхневої неоднорідності за локально градієнтного підходу в термомеханіці може призвести до помилкових висновків і значних неточностей при описі розмірних ефектів.

1. Бурак Я. И., Нагірний Т. С. Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикл. механика. – 1992. – **28**, № 12. – С. 3–23.
Те саме: *Burak Ya. I., Nagirnyi T. S. Mathematical modeling of local gradient processes in inertial thermomechanical systems // Int. Appl. Mech. – 1992. – 28, No. 12. – P. 775–793.*
2. Бурак Я., Чапля Є., Нагірний Т., Чекурін В., Кондрат В., Чернуха О., Мороз Г., Червінка К. Фізико-математичне моделювання складних систем / Під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
3. ГОСТ 2789-73. – Шероховатость поверхности. Параметры и характеристики.
4. Грицина О., Нагірний Т., Червінка К. Локально-градієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – № 3. – С. 72–83.
5. Нагірний Т. С. Приповерхневі напруження у шарі. Поверхневий натяг та розмірні ефекти // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 111–115.
6. Нагірний Т. С. Термодинамічні моделі та методи у локально градієнтній термомеханіці з врахуванням поверхневих явищ: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1998. – 32 с.
7. Нагірний Т. С., Червінка К. А., Бойко З. В. До вибору крайових умов у задачах локально градієнтного підходу в термомеханіці // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 3. – С. 199–206.
8. Нагірний Т., Бойко З. Про один підхід до формулювання крайових задач нелокальної теорії пружності // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 14. – С. 95–104.
9. Нагірний Т., Грицина О. Моделювання та дослідження квазістатичних механо-дифузійних процесів із врахуванням приповерхневої неоднорідності // 4-а Укр.-Польськ. конф. «Механіка середовища, методи комп'ютерних наук та моделювання» (Львів, 24–26 червня 2004). – Львів: СПОЛОМ, 2004. – Т. 1. – С. 159–174.
10. Панасюк В. В., Андрейків А. Е., Партон В. С. Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 1.)

11. Adams G. G. Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2004. – **71**. – P. 851–856.
12. De Garmo E. Paul, Black J. T., Kohser Ronald A. Materials and processes in manufacturing. – J. Wiley, 2003. – 1154 p. – (9th ed.)
13. Eringen A. C. Nonlocal continuum field theories. – Springer Verlag, 2002. – 376 p.
14. Eringen A. C., Edelen D. G. B. On nonlocal elasticity // Int. J. Eng. Sci. – 1972. – **10**, No. 3. – P. 233–248.
15. Ghoniem N. M., Busso E. P., Kioussis N. Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview // Philos. Mag. – 2003. – **83**, No. 31–34. – P. 3475–3528.
16. Kröener E. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces // Int. J. Solids Struct. – 1967. – **3**, No. 5. – P. 731–742.
17. Lazar M., Maugin G. A. A note on line forces in gradient elasticity // Mech. Res. Commun. – 2006. – **33**, No. 5. – P. 674–680.
18. Nahirnyj T., Tchervinka K. Interface phenomena and interaction energy at the surface of electroconductive solids // Comput. Meth. Sci. Technol. – 2008. – **14(2)**. – P. 105–110.
19. Paola Di M., Failla G., Zingales M. Physically-based approach to the mechanics of strong non-local linear elasticity theory // J. Elasticity. – 2009. – **97(2)**. – P. 103–130.
20. Reddy J. N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibrations of beams // Int. J. Eng. Sci. – 2007. – **45**. – P. 288–307.
21. Santaoja K. Gradient theory from the thermomechanics point of view // Eng. Fract. Mech. – 2004. – **71**, No. 4–6. – P. 557–566.
22. Shvets R. M., Martynyak R. M., Kryshchak A. A. Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and a rigid base with disturbed surface // Int. J. Eng. Sci. – 1996. – **34**, No. 2. – P. 183–200.
23. Wang Q., Liew K. M. Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nano-structures // Phys. Lett. A. – 2007. – **363**. – P. 236–242.

ИЗУЧЕНИЕ РАЗМЕРНЫХ ЭФФЕКТОВ В ТОНКИХ ВОЛОКНАХ

На примере модельной задачи для сплошного цилиндра в рамках локально градиентного подхода в термомеханике изучены размерные эффекты в тонких волокнах. Исследована зависимость поверхностных напряжений, энергии связи, а также интенсивности силовой нагрузки, что ведет к хрупкому разрушению, от радиуса волокна. Проведено сравнение результатов с аналогичными, полученными в случае, когда на поверхности цилиндра задано постоянное значение химического потенциала (энергии связи). Указано на существенную зависимость размерных эффектов от краевых условий, а также на физическую обоснованность задания на поверхности тела плотности или дивергенции вектора локального смещения массы. Показано, что значение химического потенциала, что устанавливается на поверхности тела, однозначно определяется геометрическими и физическими характеристиками тела, а также параметрами силового нагружения.

RESEARCH OF SIZE EFFECTS IN THIN FIBRES

On the example of model problem for solid cylinder within the local gradient approach in thermomechanics, the size effects in thin fibers are studied. It is investigated a dependence of surface stresses, bonding energy and also intensity of power load that causes cylinder fracture, on fiber radius. The obtained results are compared to the corresponding ones for the case when the chemical potential constant value (the bonding energy) is set as boundary condition at the surface. It is found that size effects essentially depend on the boundary conditions and also it is indicated on the physical validity of specifying the density or the divergence of mass displacement vector at the surface of the body. It is shown that the value of the chemical potential that is established at the surface of the body, is exactly determined by geometric and physical characteristics of the solid, and also by the parameters of external load.

¹ Центр мат. моделювання

Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Зеленогур. ун-т, Зелена Ґура, Польща