УДК 539.3

О. Д. Шамровський, Г. В. Меркотан

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВ'ЯЗАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПРО ПОШИРЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ХВИЛЬ В ПІВПРОСТОРІ

Досліджується зумовлений тепловим ударом чи силовим навантаженням вплив зв'язаності полів деформації і температури при скінченній швидкості поширення тепла на динамічні температурні напруження в півпросторі за узагальненого теплообміну з його поверхні. Розв'язок узагальненої зв'язаної динамічної задачі термопружності отримано на основі теорії інваріантно-групових властивостей диференціальних рівнянь. Наведено результати числових розрахунків для конкретного прикладу.

Вступ і постановка задачі. Явище термопружності відіграє велику роль в багатьох задачах науки та техніки, пов'язаних з вивченням процесів деформації і нагріву різних тіл. Рівняння термопружності описують розподіл температури в тілі і його деформації, які викликані неоднорідністю температурного поля або прикладеними силами.

При описі термопружності часто використовують квазістаціонарне наближення, у якому відкидають вплив деформації на температуру, а в рівняннях руху відкидають члени з другою часовою змінною. У цьому випадку задачі теплопровідності і пружності розв'язують фактично окремо [2, 3].

Для чисельного розв'язування статичних і динамічних задач теорії пружності давно й успішно застосовують метод скінченних елементів [6, 15]. У працях [4, 5, 9] при розв'язанні задач використовують метод скінченних різниць. У ряді робіт (див., наприклад, [1, 8, 16]) розглядаються застосування різницевих схем до динамічних задач теорії пружності. У роботі [13] наведено приклади застосування чисельних методів наближення до задач класичної та узагальненої термопружності та їх аналіз. Точний розв'язок у замкнутій формі зв'язаної динамічної задачі термопружності для півпростору з граничними умовами першого роду за допомогою перетворення Лапласа одержано в [11], досліджено напруження в околі фронту біжучої пружної хвилі. Тривимірну задачу узагальненої термопружності для півпростору при тепловому ударі і заданих напруженнях на поверхні розв'язано в [14] з використанням інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є і подальшого їх чисельного обернення. Про нові підходи до побудови моделей зв'язаної термопружності і узагальненої термопружності за допомогою методики використання похідних дробового порядку як за часом, так і за просторовими змінними серед численної сучасної бібліографії див., наприклад, [12].

Пропонована робота присвячена розв'язанню динамічної зв'язаної задачі термопружності з урахуванням скінченності швидкості поширення тепла в одновимірному випадку. Подібна задача розв'язана в [7] за допомогою методу інтегрального перетворення Лапласа, однак знаходження там оригіналів ускладнюється громіздкістю виразів для отриманих трансформант шуканих величин. Для розв'язання сформульованої задачі застосуємо метод асимптотико-групового аналізу [10, 17], запропонований О. Д. Шамровським. За допомогою цього методу вдалося виконати якісний аналіз руху плоскої механічної і теплової хвиль. Метод асимптотико-групового аналізу є достатньо ефективним, розв'язок шукається як інваріантно-груповий і доведений до наглядного графічного результату.

Поширення механічних і теплових хвиль у півпросторі описується системою рівнянь, яка включає відповідно рівняння руху, співвідношення між напруженням і деформацією, густину ентропії, густину теплового потоку і рівняння теплопровідності, що враховує скінченність швидкості поширення тепла:

$$\sigma_x = \rho u_{tt} ,$$

$$\sigma = (\lambda + 2\mu) u_x - k\rho S ,$$

$$S = \eta^{-1}(T - T_0) + k\eta^{-1} u_x ,$$

$$-q_x = \rho T_0 S_t ,$$

$$\tau q_t + q = -kT . \qquad (1)$$

Тут σ – напруження; u – переміщення вздовж осі x; S – ентропія на одиницю маси; T – температура; T_0 – початкова температура в півпросторі; $k = T_0(3\lambda + 2\mu)\alpha_T c^{-1}\rho^{-1}$; α_T – коефіцієнт лінійного розширення; ρ – густина; $\eta = T_0 c^{-1}$; q – тепловий потік; λ, μ – адіабатичні коефіцієнти Ляме; τ – час релаксації теплового потоку.

Розв'язуючи систему (1) відносно напруження і температури, отримаємо наступну лінеаризовану систему рівнянь:

$$\left(\lambda + 2\mu - \frac{k^2\rho}{\eta}\right)\sigma_{xx} - \frac{k\rho^2}{\eta} T_{tt} = \rho\sigma_{tt} ,$$

$$\left(\lambda + 2\mu - \frac{k^2\rho}{\eta}\right)T_{xx} - \frac{\rho T_0}{\eta}(\tau\sigma_{tt} + \sigma_t) = \frac{\rho T_0(\lambda + 2\mu)}{k\eta}(\tau T_{tt} + T_t) .$$

Перейшовши у цій системі до безрозмірних змінних

$$\bar{x} = \frac{xa}{\beta\eta}, \qquad \bar{t} = \frac{a^2 t}{\beta\eta}, \qquad \bar{T} = \frac{T}{a\sqrt{\eta}}, \qquad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\rho a^2}, \qquad \beta = \frac{k}{\rho T_0},$$

$$\bar{a}^2 = \frac{\lambda + \mu}{\rho}, \qquad \tau_0 = \frac{\bar{a}}{a_T}, \qquad \delta = \frac{k}{\bar{a}\sqrt{\eta}}, \qquad a_T = \frac{k}{\sqrt{\rho c\tau}} ,$$

і опускаючи надалі риски над безрозмірними координатами, отримаємо задачу поширення нестаціонарної термопружної хвилі:

$$\frac{1}{1-\delta^2}\sigma_{tt} + \frac{\delta}{1-\delta^2}T_{tt} = \sigma_{xx} ,$$

$$\frac{\delta\tau_0}{1-\delta^2}\sigma_{tt} + \frac{\tau_0}{1-\delta^2}T_{tt} = T_{xx} - \frac{\delta}{1-\delta^2}\sigma_t - \frac{1}{1-\delta^2}T_t . \qquad (2)$$

Діапазон зміни параметрів τ_0 і δ для металів $0.1 \div 0.5$ [7].

На границі півпростору миттєво прикладені або температура, або напруження.

Зведення системи до хвильових рівнянь за допомогою ортогональних перетворень. Запишемо рівняння (2) для випадку відкинутих перших похідних:

$$\frac{1}{1-\delta^2}\sigma_{tt} + \frac{\delta}{1-\delta^2}T_{tt} = \sigma_{xx} ,$$

$$\frac{\delta\tau_0}{1-\delta^2}\sigma_{tt} + \frac{\tau_0}{1-\delta^2}T_{tt} = T_{xx} . \qquad (3)$$

Увівши позначення

$$a_{11} = \frac{1}{1-\delta^2}, \; a_{12} = \frac{\delta}{1-\delta^2}, \; a_{21} = \frac{\delta\tau_0}{1-\delta^2}, \; a_{22} = \frac{\tau_0}{1-\delta^2}, \; \partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \; \partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

перепишемо систему (3) у вигляді

$$\partial_t^2(a_{11}\sigma + a_{12}T) = \partial_x^2\sigma ,$$

$$\partial_t^2(a_{21}\sigma + a_{22}T) = \partial_x^2 T . \qquad (4)$$

Введемо в розгляд такі матрицю і вектор:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} \sigma \\ T \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В матричній формі система (4) набуде вигляду

$$\partial_t^2 AX = \partial_x^2 X . \tag{6}$$

Власні вектори матриці A є стовпчиками матриці

$$U = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix},$$

а власні числа обчислюються за формулами

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}.$$

Виконаємо перетворення

$$X = UY, \qquad Y = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де f, g – нові шукані функції. Враховуючи рівність

$$U^{-1}AU = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

отримуємо матричне рівняння

$$\partial_x^2 \Lambda Y = \partial_t^2 Y ,$$

яке запишемо в розгорнутій формі у вигляді двох скалярних рівнянь

$$\lambda_1 \partial_t^2 f = \partial_x^2 f ,$$

$$\lambda_2 \partial_t^2 g = \partial_x^2 g .$$

Ввівши позначення

$$\lambda_1 = \frac{1}{a_1^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{a_2^2}, \tag{8}$$

перейдемо до стандартної форми хвильових рівнянь:

$$a_1^2 \partial_x^2 f - \partial_t^2 f = 0 ,$$

$$a_2^2 \partial_x^2 g - \partial_t^2 g = 0 . \tag{9}$$

Таким чином, замість системи (3) двох зв'язаних рівнянь одержали систему (9) двох незалежних рівнянь. Розв'язавши рівняння (9) відносно функцій f і g, до вихідних шуканих функцій повертаємось за допомогою перетворення (7), яке в розгорнутій формі має вигляд

$$\sigma = a_{12} f + a_{12} g ,$$

$$T = (\lambda_1 - a_{11}) f + (\lambda_2 - a_{11}) g . \tag{10}$$

Повертаючись до рівнянь (2), розглянемо, окрім матриці A, також матрицю

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}.$$

Це дозволяє переписати рівняння (2) у такій матричній формі:

$$\partial_t^2 AX = \partial_x^2 X + \partial_t BX . \tag{11}$$

Підставивши в (11) перетворення (7), отримаємо

$$\partial_t^2 AUY = \partial_x^2 UY + \partial_t BUY .$$

Помноживши цей вираз зліва на U^{-1} і ввівши позначення

$$D = U^{-1} BU ,$$

запишемо (11) в іншому вигляді:

$$\partial_t^2 \Lambda Y = \partial_x^2 Y + \partial_t DY . \tag{11'}$$

Обчислимо матрицю D:

$$U^{-1}B = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & -\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\dfrac{a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix},$$

$$D = U^{-1}BU = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\dfrac{a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

де

$$d_{11} = -d_{21} = \frac{(a_{12})^2 + a_{11}(\lambda_1 - a_{11})}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

$$d_{12} = -d_{22} = \frac{(a_{12})^2 + a_{11}(\lambda_2 - a_{11})}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

У розгорнутому вигляді матричне рівняння (11′) запишемо у вигляді таких двох рівнянь:

$$\lambda_1 \partial_t^2 f = \partial_x^2 f + d_{11}\partial_t f + d_{12}\partial_t g,$$
$$\lambda_2 \partial_t^2 f = \partial_x^2 f + d_{21}\partial_t f + d_{22}\partial_t g.$$

З урахуванням позначень (8) остаточно маємо

$$a_1^2\partial_x^2 f - \partial_t^2 f = d_1\partial_t f + d_2\partial_t g,$$
$$a_2^2\partial_x^2 g - \partial_t^2 g = -d_1\partial_t f - d_2\partial_t g, \qquad (12)$$

де $d_1 = -a_1^2 d_{11}$, $d_2 = -a_2^2 d_{12}$.

Після розв'язання рівнянь (12) знову повертаємось до початкових шуканих функцій за допомогою перетворень (10).

Перший варіант розв'язання рівнянь. Розглянемо процедуру розв'язання рівнянь (12) з використанням методу асимптотико-групового аналізу [10]. Будемо шукати розв'язок у вигляді рядів

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i, \qquad g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i, \qquad (13)$$

члени яких задовольняють рекурентну систему рівнянь

$$a_1^2\partial_x^2 f_i - \partial_t^2 f_i = d_1\partial_t f_{i-1} + d_2\partial_t g_{i-1},$$
$$a_2^2\partial_x^2 g_i - \partial_t^2 g_i = -d_1\partial_t f_{i-1} - d_2\partial_t g_{i-1}, \qquad i = 1, 2 \ldots. \qquad (14)$$

У першому наближенні $(i = 1)$ праві частини рівнянь (14) відсутні:

$$a_1^2\partial_x^2 f_1 - \partial_t^2 f_1 = 0,$$

$$a_2^2\partial_x^2 g_1 - \partial_t^2 g_1 = 0.$$

Будемо розшукувати розв'язок цих рівнянь у формі

$$f_1 = \begin{cases} f_{11}^1 (a_1 t - x)^\gamma, & x \le a_1 t, \\ 0, & x > a_1 t, \end{cases} \qquad g_1 = \begin{cases} g_{11}^2 (a_2 t - x)^\gamma, & x \le a_2 t, \\ 0, & x > a_2 t. \end{cases}$$

Це означає, що перше із рівнянь задає хвилю, фронт якої поширюється зі швидкістю a_1, а друге − хвилю, фронт якої поширюється зі швидкістю a_2.

Величина γ , а також коефіцієнти f_{11}^1 і g_{11}^2 є довільними.

Використовуючи методику, описану в [10], можемо записати розв'язок для довільного наближення:

$$f_i = \sum_{j=1}^{i} f_{ij}^1 x^{i-j}(a_1t - x)^{\gamma+j-1} + \sum_{j=2}^{i} f_{ij}^2 x^{i-j}(a_2t - x)^{\gamma+j-1} ,$$

$$g_i = \sum_{j=2}^{i} g_{ij}^1 x^{i-j}(a_1t - x)^{\gamma+j-1} + \sum_{j=1}^{i} g_{ij}^2 x^{i-j}(a_2t - x)^{\gamma+j-1} . \tag{15}$$

Тут вирази $a_1t - x$ визначені при $x \le a_1t$ і дорівнюють нулеві при $x > a_1t$. Аналогічно вирази $a_2t - x$ визначені при $x \le a_2t$ і дорівнюють нулеві при $x > a_2t$.

Співвідношення для знаходження коефіцієнтів сум (15) можна знайти після підстановки (15) в (14).

Другий варіант розв'язування рівнянь. Отримані результати можна безпосередньо використовувати для розв'язання крайових задач, але знайдений розв'язок можна значно покращити.

Об'єднаємо (13) і (15) і згрупуємо доданки з однаковими степенями $a_1t - x$ і $a_2t - x$. Коефіцієнтами при зазначених величинах будуть деякі функції від x. В результаті отримуємо

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^1(x)(a_1t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} f_i^2(x)(a_2t - x)^{\gamma+i-1} ,$$

$$g = \sum_{i=2}^{\infty} g_i^1(x)(a_1t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2(x)(a_2t - x)^{\gamma+i-1} . \tag{16}$$

Підставляючи (16) в (12) і розщеплюючи за однаковими степенями величин $a_1t - x$ і $a_2t - x$, отримаємо

$$\frac{df_i^1}{dx} + \frac{d_1}{2a_1} f_i^1 = \frac{1}{2a_1(\gamma + i - 1)}\left[a_1 \frac{d^2 f_{i-1}^1}{dx^2} - d_2(\gamma + i - 1)g_i^1\right], \quad i = 1, 2, \dots ,$$

$$g_i^1 = \frac{1}{(a_2^2 - a_1^2)(\gamma + i - 1)(\gamma + i - 2)}\left[-a_2^2 \frac{d^2 g_{i-2}^1}{dx^2} + 2a_2^2 \frac{dg_{i-1}^1}{dx}(\gamma + i - 2) - \right.$$

$$\left. - (d_1 f_{i-1}^1 + d_2 g_{i-1}^1)a_1(\gamma + i - 2)\right], \qquad i = 2, 3, \dots , \tag{17}$$

$$\frac{dg_i^2}{dx} - \frac{d_2}{2a_2} g_i^2 = \frac{1}{2a_2(\gamma + i - 1)}\left[a_2 \frac{d^2 g_{i-1}^2}{dx^2} + d_1 f_i^2(\gamma + i - 1)\right], \; i = 1, 2, \dots ,$$

$$f_i^2 = \frac{1}{(a_1^2 - a_2^2)(\gamma + i - 1)(\gamma + i - 2)}\left[-a_1^2 \frac{d^2 f_{i-2}^2}{dx^2} + 2a_1^2 \frac{df_{i-1}^2}{dx}(\gamma + i - 2) + \right.$$

$$\left. + (d_1 f_{i-1}^1 + d_2 g_{i-1}^1)a_1(\gamma + i - 2)\right], \qquad i = 2, 3, \dots . \tag{18}$$

Розглянемо отримані результати більш детально. При $i = 1$ із (17) запишемо диференціальне рівняння

$$\frac{df_1^1}{dx} + \frac{d_1}{2a_1} f_1^1 = 0 ,$$

розв'язком якого є

$$f_1^1 = f_{11}^1 e^{-\alpha_1 x}, \qquad \alpha_1 = \frac{d_1}{2a_1} .$$

Коефіцієнт f_{11}^1 є константою інтегрування.

Аналогічно із (18) знайдемо

$$g_1^2 = g_{11}^2 e^{-\alpha_2 x}, \qquad \alpha_2 = -\frac{d_2}{2a_2}.$$

Знайдемо значення коефіцієнтів при $i = 2$ і дальше, узагальнюючи, бачимо, що величини $e^{-\alpha_1 x}$ і $e^{-\alpha_2 x}$ містяться в усіх доданках рядів (16), тобто для коефіцієнтів цих рядів слід записати

$$f_i^1(x) = e^{-\alpha_1 x} F_i^1(x), \qquad g_i^1(x) = e^{-\alpha_1 x} G_i^1(x),$$

$$f_i^2(x) = e^{-\alpha_2 x} F_i^2(x), \qquad g_i^2(x) = e^{-\alpha_2 x} G_i^2(x).$$

Отже, рівняння (17) і (18) запишемо як

$$\frac{dF_i^1}{dx} = \frac{1}{2(\gamma + i - 1)}\left(\alpha_1^2 F_{i-1}^1 - 2\alpha_1 \frac{dF_{i-1}^1}{dx} + \frac{d^2 F_{i-1}^1}{dx^2}\right) - \frac{d_2}{2a_1} G_i^1, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$\frac{dG_i^2}{dx} = \frac{1}{2(\gamma + i - 1)}\left(\alpha_2^2 G_{i-1}^2 - 2\alpha_2 \frac{dG_{i-1}^2}{dx} + \frac{d^2 G_{i-1}^2}{dx^2}\right) + \frac{d_1}{2a_2} F_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь шукаємо у вигляді

$$F_i^1 = \sum_{j=1}^{i} F_{ij}^1 x^{i-j}, \qquad G_i^1 = \sum_{j=2}^{i} G_{ij}^1 x^{i-j},$$

$$F_i^2 = \sum_{j=2}^{i} F_{ij}^2 x^{i-j}, \qquad G_i^2 = \sum_{j=1}^{i} G_{ij}^2 x^{i-j}. \tag{20}$$

Щоб підставити ці розв'язки в перше з рівнянь (19), спочатку обчислюємо відповідні похідні. В результаті із вказаного рівняння отримуємо співвідношення

$$F_{ij}^1 = \frac{1}{i-j}\left\{\frac{1}{2(\gamma + i - 1)}\left[\alpha_1^2 F_{i-1,j}^1 - 2\alpha_1 (i-j) F_{i-1,j-1}^1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (i-j+1)(i-j) F_{i-1,j-2}^1\right] - \frac{d_2}{2a_1} G_{i,j+1}^1\right\}.$$

Аналогічно обчислюємо G_{ij}^1, G_{ij}^2, F_{ij}^2.

Отримані співвідношення показують, що розв'язки вигляду (20) дійсно задовольняють рівняння (17), (18) і задають спосіб рекурентного знаходження коефіцієнтів розв'язку. Однак із зазначених співвідношень не можна знайти коефіцієнти F_{ii}^1 і G_{ii}^2, які є константами інтегрування. Для їх визначення необхідно використати граничні умови.

Напруження і температура на границі $x = 0$ задаємо як деякі функції часу:

$$\sigma(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i t^{\gamma + i - 1}, \qquad T(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i t^{\gamma + i - 1}$$

із заданими коефіцієнтами σ_i, T_i.

Зупинимось коротко на питанні про збіжність отриманих рядів. Ці ряди носять назву так званої прифронтової асимптотики. Це означає, що вони, у першу чергу, призначені для дослідження зони поблизу фронту хвилі. У кожен член ряду входить величина $a_i t - x$. При малих значеннях цієї величини загальний член ряду прямує до нуля, тобто виконується необхідна умова збіжності. Раніше [10] було доведено, що утримання доданків, що описують прифронтову зону, приводить до рядів Бесселя, для яких збіжність доведена.

Числові розрахунки напружень і температури виконано для таких значень параметрів: $\sigma_1 = 0$, $T_1 = 1$, $\tau_0 = 0.5$, $\delta = 0.5$ при різних $t = 0.5$, 1.0, 1.5, 2.0 і наведено на рис. 1.

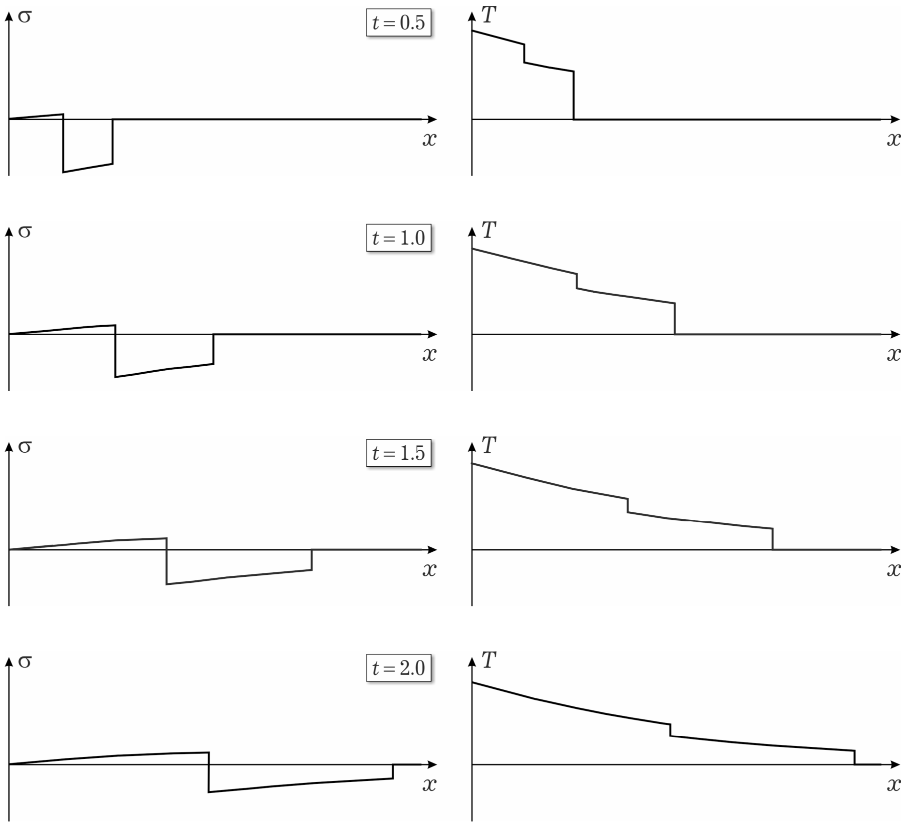

Рис. 1

Бачимо, що в півпросторі утворюються два фронти хвиль. Фронт пружної хвилі передує тепловій. Зі зменшенням тепловіддачі з поверхні півпростору динамічні температурні напруження зменшуються за експоненційним законом. Оскільки розглядаємо узагальнену динамічну задачу, тобто враховуємо скінченність поширення тепла, то в цьому випадку має сенс розглядати рух теплової і механічної хвиль тільки при малих значеннях часу.

Висновки. Наведений розв'язок узагальненої зв'язаної динамічної задачі термопружності з урахуванням скінченності швидкості поширення тепла свідчить про відносну простоту використання методу асимптотико-групового аналізу диференціальних рівнянь, а отже, зведення до мінімуму можливих похибок при обчисленнях. Відмітимо якісну схожість отриманих результатів з даними, описаними в [7]. У випадку узагальненої динамічної задачі термопружності характер напружень залишається таким, як і при нескінченно великому значенні тепловіддачі класичного випадку.

1. *Белужина И. Г.* Разностные схемы для решения плоской динамической задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – **9**, № 2. – С. 362–372.
2. *Гасилов В. А., Деревянко С. И., Маслянкин В. И.* К расчету напряженно-деформированного состояния среды в области сложной формы. – Москва, 1988. – 82 с. – (Препр. / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР; № 31-25).
3. *Коваленко А. Д.* Введение в термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1965. – 204 с.
4. *Молчанов И. Н.* Численные методы решения некоторых задач теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 316 с.

5. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
6. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1995. – 366 с.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
8. *Самарский А. А.* Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1965. – **5**, № 1. – С. 34–43.
9. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
   То же: *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1934. – 415 p.
10. *Шамровский А. Д.* Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости: Справ. издание. – Запорожье: Изд-во Запорож. гос. инж. акад., 1997. – 169 с.
11. *Dolotov M. V., Kill' I. D.* The coupled dynamic problem of thermoelasticity for a half-space // Appl. Math. Mech. – 1996. – **60**, No. 4. – P. 683–686.
   Те саме: *Долотов М. В., Килль И. Д.* Связанная динамическая задача термоупругости для полупространства // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, № 4. – P. 687–690.
12. *Hany H. Sherief, El-Sayed A. M. A., Abd El-Latief A. M.* Fractional order theory of thermoelasticity // Int. J. Solids Struct. – 2010. – **47**, No. 2. – P. 269–275.
13. *Kumar K. Tamma, Raju R Namburu.* Computational approaches with applications to non-classical and classical thermomechanical problems // Appl. Mech. Rev. – 1997. – **50**, No. 9. – P. 514–551.
14. *Magdy A. Ezzat, Hamdy M. Youssef.* Three-dimensional thermal shock problem of generalized thermoelastic half-space // Appl. Math. Model. – 2010. – **34**, No. 11. – P. 3608–3622.
15. *Prevost J. H., Tao D.* Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems with relaxation times // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1983. – **50**. – P. 817–822.
16. *Tehrani P. H., Hector L. G., Hetnarski R. B., Eslami M. R.* Boundary element formulation for thermal stresses during pulsed laser heating // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2001. – **68**, No. 3. – P. 480–489.
17. *Shamrovskii A. D., Andrianov I. V., Awrejcewich J.* Asymptotic-group analysis of algebraic equations // Math. Probl. Eng. – 2004. – **5**. – P. 411–451.

РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Исследуется обусловленное тепловым ударом или силовой нагрузкой влияние связанности полей деформации и температуры при конечной скорости распространения тепла на динамические температурные напряжения в полупространстве при обобщенном теплообмене на его поверхности. Решение обобщенной связанной динамической задачи термоупругости получено на основе теории инвариантно-групповых свойств дифференциальных уравнений. Приведены результаты численных расчетов для конкретного примера.

SOLUTION OF COUPLED THERMOELASTICITY PROBLEM ON DISTRIBUTION OF NON-STATIONARY WAVES IN HALF-SPACE

Influence of bondedness of deformation and temperature fields caused by a heat shock or force loading at finite speed of heat propagation on dynamic temperature stresses in a half-space under the generalized heat exchange on its surface is investigated. The solution of the generalized coupled dynamic thermoelasticity problem is obtained on the basis of the theory of invariant-group properties of the differential equations. The results of numerical calculations for a concrete example are given.

Запорізька держ. інж. акад., Запоріжжя

Одержано
20.12.10