

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВТОМНОГО РУЙНУВАННЯ ПЛАСТИН З ТРІЩИНАМИ ЗА БЛОЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Сформульовано математичну модель для дослідження втомного руйнування тонкостінних елементів конструкцій (пластин) із тріщинами за блочного навантаження. Досліджено вплив форми і структури блоків навантаження на залишкову довговічність пластини.

Вступ. Створення кількісної теорії втомного руйнування матеріалів має велике значення для розробки методів прогнозування ресурсу (залишкового ресурсу) елементів конструкцій. В основі такої теорії, як правило, лежать математичні моделі процесів втомного руйнування матеріалів і методи їх реалізації. На сьогодні теорія втомності достатньо добре розвинута для випадків регулярного (синусоїдального) навантаження (див., наприклад, [5, 10]). Проте в інженерній практиці часто зустрічаються різночастотні і блочні навантаження. Зокрема, в кораблях, літаках, деталях газотурбінних двигунів, трубопроводах, залізничних та автодорожніх мостах, компресорних лопатках елементи конструкцій піддаються дії блочних навантажень. Теоретичні аспекти (математичні моделі) тут розроблено ще недостатньо [8–12], а експериментальні дослідження через значні технічні труднощі проведено в малому об'ємі, що не дає можливості встановити залежності для визначення залишкового ресурсу конструкцій, елементи яких містять дефекти типу тріщин.

Силові і деформаційні підходи для побудови теорії втомного руйнування для таких випадків є малоефективними. На наш погляд, тут більш надійним і результативним може бути енергетичний підхід, який дає можливість враховувати зміну циклу навантаження, передісторію деформування пластини і поширення тріщини. Зокрема, такий енергетичний підхід був розроблений авторами [3, 4] для визначення залишкового ресурсу елементів конструкцій з тріщинами під нециклічними змінними в часі навантаженнями.

У пропонованій роботі математичну модель на основі енергетичного підходу [3, 4] узагальнюємо для випадку блочного навантаження пластин з тріщинами.

Застосування енергетичного підходу для пластини з тріщиною. Розглянемо безмежну пластину, послаблену прямолінійною тріщиною довжини $2\ell_0$. Вважаємо, що така пластина в нескінченно віддалених точках піддана дії рівномірно розподілених зусиль F , які направлені перпендикулярно до лінії розміщення тріщини і змінюються з часом t як блочні навантаження (див. рис. 1). При цьому приймаємо, що тріщина макроскопічна, а напружено-деформований стан симетричний і описується в околі її вершини тільки коефіцієнтом інтенсивності напружень K_I .

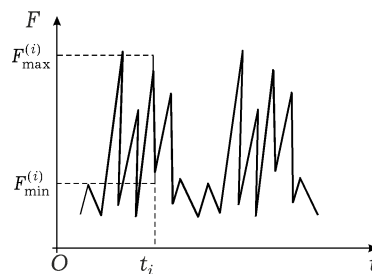


Рис. 1

Задача полягає у визначенні кількості блоків навантаження $N_1 = N_{1*}$, коли в результаті втомного руйнування тріщина підросте до критичного розміру $\ell = \ell_*$ і пластина зруйнується. Вважаючи процес росту тріщини неперервним, енергетичний баланс цього процесу для кожного моменту часу t матиме вигляд [2-4]

$$A = W + \Gamma + Q + K. \quad (1)$$

Тут A – робота зовнішніх сил; W – енергія деформування пластини після просування тріщини на величину $\Delta \ell_c$, яку подамо як

$$W = W_s + W_p^{(1)}(\ell) + W_p^{(2)}(t) - W_p^{(3)}(t), \quad (2)$$

де W_s – пружна складова W ; $W_p^{(1)}(\ell)$ – частина роботи пластичних деформацій в зоні передруйнування, що залежить тільки від довжини тріщини ℓ ; $W_p^{(2)}(t)$ – частина роботи пластичних деформацій від зовнішніх зусиль, яка виділяється при постійній довжині тріщини під час інкубаційного періоду підготовки її стрибка $\Delta \ell_c$ і залежить тільки від часу t (кількості блоків навантаження $N_1 = tT^{-1}$); T – час тривання блоку навантаження; $W_p^{(3)}(t)$ – робота пластичних деформацій під час розвантаження тіла і стиску зони передруйнування, яка залежить тільки від t і генерується самим тілом; Γ – енергія руйнування тіла, яка залежить тільки від довжини тріщини; Q – величина виділеної теплової енергії при руйнуванні тіла, яку вважаємо відносно малою величиною і нею будемо нехтувати при обчисленнях; K – кінетична енергія, яка в розглядуваному випадку буде також малою величиною.

Оскільки виконується умова (1) балансу енергії, то звідси випливає, що буде виконуватися і умова балансу швидкостей зміни складових енергій:

$$\frac{\partial}{\partial N_1} [\Gamma - (A - W_s - W_p^{(1)})] \cdot \frac{d\ell}{dN_1} - \frac{\partial W_p^{(3)}}{\partial N_1} = 0. \quad (3)$$

Із рівняння (3) знайдемо величину швидкості поширення тріщини $V = \frac{d\ell}{dN_1}$:

$$\frac{d\ell}{dN_1} = \frac{\partial W_p^{(3)}}{\partial N_1} \left(\frac{\partial}{\partial N_1} [\Gamma - (A - W_s - W_p^{(1)})] \right)^{-1}. \quad (4)$$

На основі результатів робіт [2-4] рівняння (4) можна записати ще так:

$$\frac{d\ell}{dN_1} = W_c (\gamma_c - \gamma_t)^{-1} \quad (5)$$

за початкових і кінцевих умов

$$N_1 = 0, \quad \ell(0) = \ell_0; \quad N_1 = N_{1*}, \quad \ell(N_{1*}) = \ell_*, \quad \gamma_t(\ell_*) = \gamma_c. \quad (6)$$

Тут $W_c = \frac{\partial W_p^{(3)}}{\partial N_1} = \sum_{i=1}^{N_2} W_c^{(i)}$ – робота пластичних деформацій розтягу у зоні передруйнування біля вершин тріщини за час одного блоку, які генерує саме тіло [2-4]; $W_c^{(i)}$ – робота пластичних деформацій розтягу W_c для i -го піку навантаження в блоці (рис. 1); N_2 – кількість піків навантаження в блоці; γ_c – питома енергія руйнування під час поширення втомної тріщини; γ_t – питома енергія пластичного деформування в зоні передруйнування біля вершини тріщини, яка залежить тільки від її довжини ℓ .

Використовуючи результати робіт [1-4], величини W_c , γ_c , γ_t у рівнянні (5) визначимо так:

$$W_c = 0.25\alpha_0\pi^2\ell^2E^{-2}\sigma_t^{-1}\sum_{i=1}^{N_2}(1-R_i)^4(F_{i\max}^4 - F_{th}^4), \quad (7)$$

$$\gamma_c = K_{fc}^2E^{-1}, \quad \gamma_t = \pi\ell E^{-1}F_s^2, \quad F_s = \max_i F_i.$$

Тут N_2 – кількість ділянок в блочному навантаженні $F(t)$ зі своїм максимумом $F_{i\max}$ і мінімумом $F_{i\min}$ (рис. 1); $R_i = F_{i\min}F_{i\max}^{-1}$; α_0 – константа матеріалу, яка визначається із експерименту; $F_{s\max}$ – максимальне значення навантаження $F(t)$ в блоці; F_{th} – величина зовнішнього навантаження, за якого не буде розкриття тріщини ($K_{th} = F_{th}\sqrt{\pi\ell}$). Інтегруючи рівняння (5) за умов (6), (7) і приймаючи, що $K_{th} \rightarrow 0$, для визначення $N_1 = N_{1*}$ отримаємо формулу

$$N_1^* = A \cdot \left[K_{fc}^2 \left(\frac{1}{\ell_0} - \frac{1}{\ell_*} \right) - F_{s\max}^2 \pi \ln \left(\frac{\ell_*}{\ell} \right) \right], \quad (8)$$

$$A = \frac{4\sigma_t E}{\pi\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{N_2} (F_{i\max} - F_{i\min})^4 \right]^{-1}.$$

Пластина із системою тріщин. Розглянемо пластину, послаблену системою m макроскопічних тріщин та піддану дії змінних в часі зусиль, точки прикладання яких достатньо віддалені від контурів тріщини і які характеризуються силовим параметром P . Нехай конфігурація пластини і геометричне розміщення тріщин визначаються лінійними параметрами a_1, \dots, \dots, a_n , а геометрична конфігурація кожної тріщини – параметрами b_1, \dots, b_m . Прийmemo параметри такими, що при $a_j \rightarrow \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$, отримаємо необмежену пластину, послаблену однією тріщиною конфігурації b_i .

Вважаємо, що зміна зовнішніх навантажень носить блочний характер, тобто кількість блоків визначається числом N_1 , а величина зусиль P в кожному блоці визначається функцією

$$P = F(s), \quad 1 \leq s \leq N_2. \quad (9)$$

В e -й вершині кожної тріщини L_i виберемо локальну систему координат $O_i^{(e)}\rho_i^{(e)}\theta_i^{(e)}$ (рис. 2) і позначимо через $\Delta\ell_i^{(e)}$ приріст i -ї тріщини відповідно на її кінцях ($e = 1, 2$).

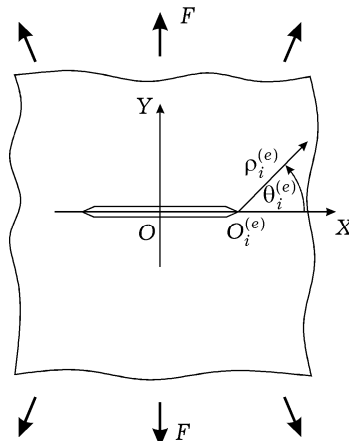


Рис. 2

Задача полягає в тому, щоб визначити таку кількість блоків навантаження $N_1 = N_1^*$, після досягнення якої довжина однієї з тріщин L_k досягне критичного значення $\ell_k = \ell_{k*}$ і пластина зруйнується.

Для реалізації такої задачі зробимо узагальнення на випадок наведеного вище енергетичного підходу, а також скористаємося відомою [3, 4] гіпотезою, що поширення втомних тріщин буде проходити в напрямку максимально можливих їх швидкостей. У результаті цього задачу зведемо до розв'язання такої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\ell_i^{(e)}}{dN_1} = \frac{W_i^{(e)}}{\gamma_{ic} - \gamma_{it}}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_i^{(e)}} \left[\frac{W_i^{(i)}}{\gamma_{ic}^{(e)} - \gamma_{it}^{(e)}} \right]_{\theta_i^{(e)} = \theta_{it}^{(e)}} = 0 \quad (10)$$

за початкових

$$N_1 = 0, \quad \ell_i^{(e)}(0) = \ell_{i0}^{(e)} \quad (11)$$

та кінцевих умов

$$N_1 = N_1^*, \quad \ell_k^{(e)}(N_1^*) = \ell_{k*}^{(e)}, \quad \gamma_{kt}^{(e)}(\ell_{k*}^{(e)}) = \gamma_{kc}^{(e)}, \quad (12)$$

$$\max_i [\gamma_{it}^{(e)}(\ell_{i*}^{(e)})(\gamma_{ic}^{(e)})^{-1}] = \gamma_{kt}^{(e)}(\ell_{k*}^{(e)})(\gamma_{kc}^{(e)})^{-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad e = 1, 2.$$

Тут $W_i^{(e)} = \sum_{s=1}^{N_2} W_i^{(e,s)}$ – робота пластичних деформацій розтягу у зоні передруйнування біля вершин тріщини L_i , які генерує саме тіло [4]; $W_i^{(e,s)}$ – робота пластичних деформацій розтягу $W_i^{(e)}$ для s -го піку навантаження в блоці; $\gamma_{ic}^{(e)}$ – густина енергії руйнування матеріалу біля вершин тріщини L_i ; $\gamma_{it}^{(e)}$ – густина дисипації енергії пластичних деформацій у зоні передруйнування біля вершин тріщини L_i за максимум навантаження; $\theta_{it}^{(e)}$ – значення кутів $\theta_i^{(e)}$, що визначають напрямки поширення кінців L_i тріщини; $\ell_{i*}^{(e)}$ – критичне підростання e -го кінця тріщини L_i при руйнуванні пластини. Згідно з [3, 4] ці величини визначатимемо наближено так:

$$\begin{aligned} W_i^{(e,s)}(\ell) &= \int_0^{\ell_{ip}^{(e,s)}} (\delta_{iI\theta}^{(e,s)}(x)\sigma_{i0t}^{(e,s)} + \delta_{iII\theta}^{(e,s)}(x)\tau_{i0t}^{(e,s)}) dx - \gamma_{ith}^{(e,s)}, \\ \delta_{it}^{(e)} &= \frac{(K_{iI\theta}^{(e)})^2}{2E\sigma_{i0t}^{(e)}}, \quad \gamma_{ic}^{(e)} = \delta_{ic}^{(e)}\sigma_{i0c}^{(e)} = \frac{K_{iIc}^2}{E}, \\ \gamma_{it}^{(e)}(\ell) &= \delta_{it}^{(e)}\sigma_{it}^{(e)} = \delta_{it}^{(e)}\sigma_{i0t}^{(e)} + \delta_{iII\theta}^{(e)}\tau_{i0t}^{(e)}, \\ \delta_{iII\theta}^{(e)} &= \frac{(K_{iII\theta}^{(e)})^2}{2E\tau_{i0t}^{(e)}}, \quad \ell_{ip}^{(e)} = \frac{(K_{iII\theta}^{(e)})^2}{4(\sigma_{i0t}^{(e)})^2}, \quad \ell_{ip}^{(e)} = \frac{(K_{iII\theta}^{(e)})^2}{4(\tau_{i0t}^{(e)})^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут $\gamma_{ith}^{(e)}$ – величина роботи пластичних деформацій в зоні передруйнування біля e -ї вершини i -ї тріщини, яка не викликає її розкриття; $\delta_{it}^{(e)}(x)$ – розкриття в зоні передруйнування біля вершини e тріщини L_i ; $\delta_{iI\theta}^{(e)}$, $\delta_{iII\theta}^{(e)}$ – проекції $\delta_{it}^{(e)}(x)$ на напрямні орти полярної системи координат $O_i^{(e)}\rho_i^{(e)}\theta_i^{(e)}$ (рис. 2); $\sigma_{it}^{(e)}$ – усереднені напруження в зоні передруйнування біля e -ї

вершини тріщини L_i ; σ_{fc} – їх критичне значення за циклічного навантаження, яке для ідеально пружно-пластичного матеріалу дорівнює його текучості σ_T ; $\sigma_{i0t}^{(e)}$, $\tau_{i0t}^{(e)}$ – відповідні їхні проєкції; E – модуль пружності; $K_{iI}^{(e)}$, $K_{iII}^{(e)}$ – коефіцієнти інтенсивності напружень біля e -ї вершини i -ї тріщини вздовж лінії її розміщення; $K_{iI\theta}^{(e)}$, $K_{iII\theta}^{(e)}$ – аналогічні значення уздовж напрямку під кутом θ до дотичної в e -му кінці i -ї тріщини; K_{fc} – критичне значення $K_{iI}^{(e)}$ за циклічного навантаження; $\ell_{ip}^{(e)}$ – розмір зони передруйнування біля e -ї вершини тріщини L_i .

Таким чином, розв'язок поставленої задачі дається рівняннями (10) з урахуванням співвідношень (11)–(13), а також відомих коефіцієнтів інтенсивностей напружень $K_{iI}^{(e)}$, $K_{iII}^{(e)}$. Ці коефіцієнти інтенсивності напружень, в свою чергу, визначаємо так. На основі π -теореми про розмірності величини $K_{iI}^{(e)}$, $K_{iII}^{(e)}$ біля e -ї вершини тріщини L_i конфігурації b_i можна подати у вигляді [1]

$$K_{iI}^{(e)} = K_{iI\infty}^{(e)} \Omega_{ie}^{(1)}(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(m)}),$$

$$K_{iII}^{(e)} = K_{iII\infty}^{(e)} \Omega_{ie}^{(2)}(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(m)}), \quad (14)$$

де $K_{iI\infty}^{(e)}$, $K_{iII\infty}^{(e)}$ – коефіцієнти $K_{iI}^{(e)}$, $K_{iII}^{(e)}$ у випадку необмеженого тіла із тріщиною конфігурації b_i при аналогічному навантаженні тіла; $\lambda_j^{(i)} = b_i a_j^{-1}$ – безрозмірні параметри; функції $\Omega_{ie}^{(k)}(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(m)})$ $k = 1, 2$, у співвідношенні (14) вважаємо неперервними та неперервно диференційовними. Ці функції для конкретних випадків знаходимо за допомогою відомого [1] методу граничної інтерполяції шляхом зведення такої багатопараметричної задачі до системи відповідних однопараметричних задач.

Залежність залишкової довговічності пластини від форми та структури блоків навантаження. Розглянемо нескінченну пластину, послаблену прямолінійною тріщиною початкової довжини $2\ell_0$, яка піддана дії в нескінченно віддалених точках рівномірно розподілених зусиль $F(t, \theta)$, зміна яких з часом і напрямком носить блочний характер (див. рис. 1). Задача полягає у визначенні такої кількості $N_1 = N_1^*$ блоків навантаження, після досягнення якої тріщина досягне критичної довжини $\ell = \ell_*$ і пластина зруйнується.

Розв'язок цієї задачі здійснюємо на основі сформульованої вище математичної моделі (10)–(12). В результаті цього для визначення $N_1 = N_1^*$ отримаємо таку систему рівнянь з початковими і кінцевими умовами:

$$\frac{d\ell}{dN_1} = W_c(\gamma_c - \gamma_t)^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} [W_c(\gamma_c - \gamma_t)^{-1}]_{\theta=\theta_*} = 0,$$

$$N_1 = N_1^*, \quad \ell(N_1^*) = \ell_*, \quad \gamma_t(\ell_*) = \gamma_c. \quad (15)$$

Вплив форми блоку навантаження, перпендикулярного до лінії розміщення тріщини. Як приклад розглянемо задачу, коли пластина із тріщиною піддана дії двочастотного, ω_1 , ω_2 , навантаження:

$$F(t) = b \cdot [1 + \sin(0.5t\omega_1(1 + \eta_1)) \cos(0.5t\omega_1(1 - \eta_1))], \quad (16)$$

де $0 \leq \omega_2\omega_1^{-1} = \eta_1 \leq 1$. Тут, приймаючи для простоти обчислень, що $F_{th} = 0$,

W_c визначаємо за співвідношенням (7). Для кожного значення $\eta_1 = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ будуємо залежність $F(t)$, визначаємо період і форму зміни циклу. Розбиваємо кожен цикл з періодами T_i ($i = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$) на n ділянок з піками зміни $F(t)$ (див. рис. 1 і рис. 3, де графічно зображено зміну $F(t)$ для випадку $\eta_1 = 0.4$) і для кожної ділянки визначаємо $F_{i_{\max}}$ і $F_{i_{\min}}$. Тоді, інтегруючи (15) з урахуванням (7) і (16), отримаємо співвідношення (8).

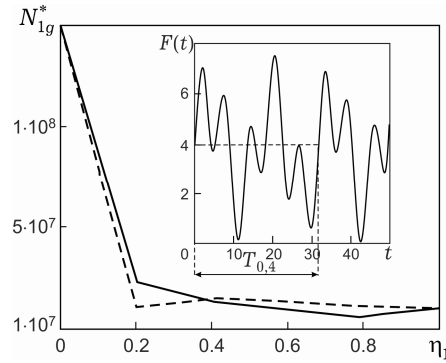


Рис. 3

Для числового аналізу формули (8) задамо параметри зовнішнього навантаження, довжини початкової тріщини і характеристики матеріалу: $\ell_0 = 0.01$ м, $K_{fc} = 85$ МПа $\sqrt{\text{м}}$. На основі цих даних і формули (8) побудовано залежність N_{1g}^* від η_1 : $N_{1g}^* = N_1^* \cdot b \cdot (7.64 \sigma_t^2)^{-1}$ (рис. 3, суцільна лінія). Як бачимо, зі збільшенням відношення частот довговічності знижується, що підтверджують експерименти [8]. Також побудовано залежність N_{1g}^* від η_1 (рис. 3, штрихова лінія), коли не враховується реальна форма циклу (синусоїдальна зміна $F(t)$ із одним піком F_{\max} в циклі), що для деяких значень η_1 може призвести до значних похибок визначення N_{1g}^* (див. рис. 3).

Вплив напрямків навантаження в блоці. Розглянемо випадок, коли розглянута вище пластина з тріщиною довжини $2\ell_0$ навантажена на нескінченності рівнорозподіленими нормальними $F_1(t)$ і зсувними $F_2(t)$ зусиллями (див. рис. 4), дія яких по чергово змінюється (блочне навантаження з блоком $F_1 + F_2$).

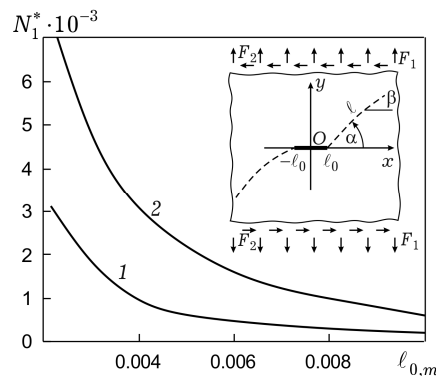


Рис. 4

У межах одного блоку ($0 \leq t \leq 2\pi\omega^{-1}$, де ω – кругова частота навантаження) зміну цих зусиль можна подати так:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= p[1 - H(t - \pi\omega^{-1})][1 + \sin 2\omega t], \\ F_2(t) &= \tau H(t - \pi\omega^{-1})[1 + \sin(2\omega t + \pi)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут p, τ – амплітуди навантажень; $H(x)$ – функція Гевісайда. Задача полягає у визначенні кількості $N_1 = N_1^*$ блоків навантаження, після досягнення якої тріщина підросте до критичної довжини $\ell = \ell_*$ і пластина зруйнується.

Розв'язок такої задачі здійснюємо за допомогою задачі (15). У цьому випадку

$$W_c = 0.25\alpha_0 E^{-2} \sigma_t^{-1} [K_{I_{p\max}}^4(\ell, \theta_*) + K_{I_{\tau\max}}^4(\ell, \theta_*) - K_{th}^4], \quad (18)$$

де $K_{I_{p\max}}(\ell, \theta_*)$, $K_{I_{\tau\max}}(\ell, \theta_*)$ – коефіцієнти інтенсивності напружень відповідно від зусиль $F_1(t)$, $F_2(t)$. Тут θ_* шукаємо на основі другого з рівнянь (15), що у випадку малих значень ℓ і $p = \tau$ дасть $\theta_* = \alpha \approx 60^\circ$, а при великих ℓ і $p = \tau$ отримуємо $\theta_* = \beta \approx 27^\circ$ (див. рис. 4). Коефіцієнти інтенсивності напружень $K_{I_{p\max}}(\ell, \theta_*)$, $K_{I_{\tau\max}}(\ell, \theta_*)$ визначаємо за інтерполяційною формулою (яка запропонована в роботі [2]) через їх граничні випадки для малих і великих значень втомної тріщини ℓ . Остаточно для обчислення $K_{I_{p\max}}(\ell, \theta_*)$, $K_{I_{\tau\max}}(\ell, \theta_*)$ отримаємо формули

$$\begin{aligned} K_{I_{p\max}}(\ell, \theta_*) &\approx p\sqrt{\pi\ell}\sqrt{0.50\lambda + 0.69}, \\ K_{I_{\tau\max}}(\ell, \theta_*) &\approx \tau\sqrt{\pi\ell}\sqrt{1.42\lambda + 0.56}, \quad \lambda = \ell_0\ell^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

На основі співвідношень (18), (19) і приймаючи, що $K_{th} = 0$, задачу (15) для визначення $N_1 = N_1^*$ у розглядуваному випадку запишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{dN_1} &= \frac{p^4\pi^2\ell^2\alpha_0(2.27\lambda^2 + 1.28\lambda + 0.79)}{4E\sigma_t[K_{fc}^2 - p^2\pi\ell(1.92\lambda + 1.25)]}, \\ N_1 &= 0, \quad \ell(0) = 0, \quad N_1 = N_1^*, \quad \ell(N_1^*) = \ell_*, \\ \ell_* &= (K_{fc}^2 - 1.92p^2\pi\ell_0)/1.25\pi p^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Інтегруючи рівняння (20) за відповідних початкових і кінцевих умов, для визначення параметра $N_1 = N_1^*$ залишкової довговічності пластини отримаємо таку формулу:

$$\begin{aligned} N_{10}^* &= \frac{\pi\alpha_0 p^2 N_1^*}{4E\sigma_t} = \int_0^1 \frac{1.25(1-\lambda)}{2.27\lambda_0^2 + 1.28\lambda\lambda_0 + 0.79\lambda^2} d\lambda, \\ \lambda &= \ell\ell_*^{-1}, \quad \lambda_0 = 1.25(\xi\ell_0^{-1} - 1.92)^{-1}, \quad \xi = K_{fc}^2\pi^{-1}p^{-2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Розглянемо тепер інший випадок цієї задачі, коли сили $F_1(t)$, $F_2(t)$ змінюються з часом синхронно. Проводячи міркування і обчислення, аналогічні до попереднього, параметр $N_1 = N_1^*$ залишкової довговічності пластини будемо визначати так:

$$N_1^* = \int_{0.71\ell_0}^{\ell_*} 4E\sigma_t p^{-4} \pi^{-2} \alpha_0^{-1} \ell^{-2} [K_{fc}^2 - p^2\pi\ell] dt, \quad \ell_* = \pi^{-1} p^{-2} K_{fc}^2. \quad (22)$$

Проінтегрувавши (22), отримаємо

$$N_1^* = 4\pi^{-1}\alpha_0^{-1}p^{-2}E\sigma_t(1.41\xi\ell_0^{-1} - 1 + \ln 0.71\ell_0\xi^{-1}). \quad (23)$$

За формулами (21) і (23) побудовано графіки залежностей $N_1^* \sim \ell_0$ (рис. 4, відповідно криві 1 і 2). Як бачимо, одночасна дія зусиль $F_1(t)$, $F_2(t)$ збільшує довговічність пластини порівняно з їх почерговою дією.

Вплив вібрації на втомне руйнування матеріалів. Поряд з високоамплітудним навантаженням елементи конструкції часто піддаються дії високочастотній і низькоамплітудній вібрації [6, 8, 9]. Деякі дослідники вважають, що вплив вібрації у зв'язку з малою її амплітудою є незначним і ним можна нехтувати. Однак таким впливом можна було б нехтувати, якби навантаження не було високоамплітудним. Таке нехтування може призвести до значних помилок, які підуть не в запас довговічності, а в небезпеку непередбачуваного руйнування. Запропонований тут підхід дає змогу розв'язувати такі задачі моделюванням сумісної дії високоамплітудного навантаження і вібрації як блочного навантаження. Продемонструємо це на прикладі такої задачі.

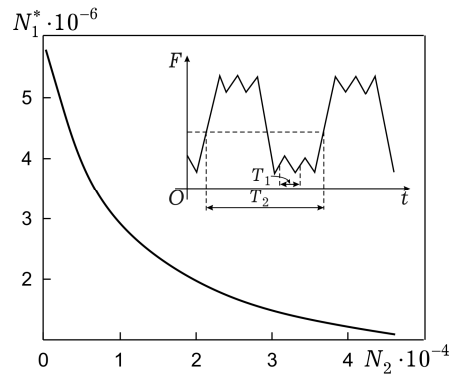


Рис. 5

Нехай безмежна пластина з системою періодичних уздовж деякої прямої тріщин однакових довжин $2\ell_0$ і віддалами $2h$ між їх центрами піддана дії блочного навантаження $F(t)$ (рис. 5), яке спрямоване перпендикулярно до лінії розміщення тріщин і описується математично так:

$$F(t) = a_1 + b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin \omega_2 t, \quad (24)$$

де ω_1 – кругова частота низькочастотної і високоамплітудної складової (основне навантаження з амплітудою b_1 і періодом T_2) навантаження; ω_2 – кругова частота високочастотної і низькоамплітудної (вібрація з амплітудою b_2 і періодом зміни T_1) складової навантаження ($N_2 = \omega_2\omega_1^{-1}$, $\omega_2 \gg \omega_1$, $b_1 \gg b_2$); a_1 – середнє значення навантаження в циклі. Задача полягає у визначенні такої кількості блоків навантаження $N_1 = N_1^*$, після досягнення якої тріщини досягнуть критичної довжини $\ell = \ell_*$ і пластина зруйнується. Ця задача аналогічна до задачі (5)–(7) і для розглядуваного випадку зводиться до розв'язання такого рівняння:

$$\frac{d\ell}{dN_1} = W_c E (K_{fc}^2 - \pi\ell(a_1 + b_1 + b_2)^2 f_1^2(\varepsilon_1))^{-1} \quad (25)$$

з початковими і кінцевими умовами

$$\begin{aligned} N_1 = 0, \quad \ell(0) = \ell_0, \\ N_1 = N_1^*, \quad \ell(N_1^*) = \ell_*, \quad \ell_* = \pi^{-1} K_{fc}^2 (a_1 + b_1 + b_2)^{-2} f_1^{-2}(\varepsilon_1). \end{aligned} \quad (26)$$

Тут величина $f_1(\varepsilon_1)$ визначається на основі [1]

$$f_1(\varepsilon_1) = 2[(1 - \varepsilon_1)[4 + (\pi^2 - 4)\varepsilon_1]]^{-1/2}, \quad \varepsilon_1 = \ell b^{-1}. \quad (27)$$

Роботу пластичних деформацій W_c у зоні передруйнування біля вершин тріщин визначаємо аналогічно до попереднього випадку:

$$W_c = 4\alpha_0 \pi^2 \ell^2 E^{-2} \sigma_t^{-1} f_1^4(\varepsilon_1) [1 + N_2(1 - R)^4] [(a_1 + b_1 + b_2)^4 - F_{th}^4],$$

$$R = 2(b_1 + b_2)(a_1 + b_1 + b_2)^{-1}. \quad (28)$$

Тоді, інтегруючи (25) з урахуванням (26)–(28), для визначення критичної величини $N_1 = N_1^*$ отримаємо наступну формулу:

$$N_1^* = \frac{\sigma_t E N_2^* (a_1 + b_1 + b_2)^{-2}}{4\alpha_0 \pi [1 + N_2(1 - R)^4]}, \quad N_2^* = \int_{\varepsilon_{10}}^{\varepsilon_{1*}} \frac{(\varepsilon_{1*} - \varepsilon_1) d\varepsilon_1}{\varepsilon_{10}^2 f_1^2(\varepsilon_1) (1 - \lambda_{th}^4)}, \quad (29)$$

де

$$\varepsilon_{10} = \frac{\ell_0}{h}, \quad \varepsilon_{1*} = \frac{\ell_*}{h}, \quad \lambda_{th} = F_{th} \frac{1}{a_1 + b_1 + b_2}.$$

Як і в попередньому випадку, для числового аналізу співвідношення (29) виберемо конкретні значення параметрів: $R = 0.9$, $F_{th} \approx 0$, $\varepsilon_{10} = 0.1$, $\varepsilon_{1*} = 0.9$, $0.25\alpha_0^{-1} \pi^{-1} \sigma_t E (a_1 + b_1 + b_2)^{-2} = 10^6$.

Тоді, обчислюючи інтеграл (29), знаходимо кількість блоків навантаження $N_1 = N_1^*$, після досягнення якої тріщини досягнуть критичної довжини $\ell = \ell_*$ і пластина зруйнується. На рис. 5 побудовано графік залежності $N_1^* \sim N_2$. Як бачимо, збільшення відносної частоти вібрації N_2 знижує довговічність пластини.

Висновки. На основі енергетичного підходу сформульовано математичні моделі (диференціальні рівняння з початковими і кінцевими умовами) для дослідження втомного руйнування пластин з тріщинами за блочного навантаження. При цьому досліджено вплив структури і форми блоків навантаження на залишковий ресурс пластини, де показано, що неврахування форми і структури блоків навантаження може призвести до значних похибок у бік завищення залишкового ресурсу і, таким чином, небезпеки непередбачуваного руйнування тонкостінних елементів конструкцій. Крім того, за допомогою запропонованої моделі можна досліджувати блочне навантаження, викликане накладанням на основне навантаження вібрації, яка значно знижує залишковий ресурс пластини.

1. *Андрейків А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 348 с.
2. *Андрейків А. Е., Сас Н. Б.* Диаграммы предельных напряжений для пластин с трещинами высокотемпературной ползучести // IV Междунар. симп. механики разрушения материалов и конструкций. – Польша, 30.05–02.06, 2007. – С. 15–18.
3. *Андрейків О. Є., Іваницький Я. Л., Терлецька З. О., Кім М. Б.* Оцінка довговічності труби нафтопроводу з поверхневою тріщиною під двохвісним блочним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 3. – С. 103–108.
Te same: *Andreikiv O. Ye., Ivanyts'kyi Ya. L., Terlets'ka Z. O., Kit M. B.* Evaluation of the durability of a pipe of oil pipeline with surface crack under biaxial block loading // Mater. Sci. – 2004. – **40**, No. 3. – P. 408–415.
4. *Андрейків О. Є., Кім М. Б.* Залишкова довговічність тонкостінних елементів конструкцій під двохвісним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 1. – С. 14–22.
Te same: *Andreikiv O. Ye., Kit M. B.* Residual service life of thin-walled structural elements under biaxial cyclic loading // Mater. Sci. – 2008. – **44**, No. 1. – P. 10–21.

5. Романив О. Н., Ярема С. Я., Никифорчин Г. Н., Махутов Н. А., Стадник М. М. Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1990. – 680 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 4.)
6. Романов А. Н., Гаденин М. М. Сопротивление изотермическому деформированию и разрушению при двухчастотном нагружении // Материалы Всесоюз. симп. по малоцикловой усталости при повышенных температурах. – Челябинск: Челяб. политехн. ин-т, 1974. – Вып. 2. – С. 113–127.
7. Троценко В. Т., Покровський В. В., Скоренко Ю. С. Закономерности развития усталостных трещин в конструкционных сталях при двухчастотном нагружении // Проблемы прочности. – 1985. – № 10. – С. 30–39.
8. Труфьяков В. И., Ковальчук В. С. Определение долговечности при двухчастотном нагружении (Обзор) // Проблемы прочности. – 1982. – № 9. – С. 9–15; № 10. – С. 15–20.
9. Филатов М. Я. Сопротивление усталости при сложной форме цикла изменения напряжений: (Обзор) // Завод. лаборатория. – 1968. – 34, № 3. – С. 331–336.
10. Panasyuk V. V., Andreikiv O. Ye., Ritche R. O., Darchuk O. I. Estimation of the effects of plasticity and resulting crack closure during small fatigue crack growth // Int. J. Fract. – 2001. – 107. – P. 99–115.
11. Petit J. Some critical aspects of fatigue crack propagation in metallic materials // Proc. ECF-17 (Brno, Czech Republic, Sept. 2–5, 2008). – 2008. – P. 54–77.
12. Schijve S. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art // Proc. ECF-14 (Cracow, Poland, Sept. 8–13, 2002). – 2002. – Vol. III. – P. 211–262.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ ПРИ БЛОЧНОЙ НАГРУЗКЕ

Сформулирована математическая модель для исследования усталостного разрушения тонкостенных элементов конструкций (пластин) с трещинами при блочной нагрузке. Исследовано влияние формы и структуры блоков нагрузки на остаточную долговечность пластины.

MATHEMATICAL MODELING OF FATIGUE FRACTURE OF PLATES WITH CRACKS UNDER BLOCK LOADING

A mathematical model to study fatigue fracture of thin-walled elements of constructions (plates) with cracks under block loading is formulated. The influence of a form and structure of blocks of loading on residual durability of a plate is investigated.

¹ Фіз.-мех. ін-т ім. Г. Карпенка НАН України, Львів,

Одержано

² Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів,

05.04.11