

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ТІЛА З ДВОМА КОМПЛАНАРНИМИ ТЕПЛОАКТИВНИМИ КРУГОВИМИ ТРІЩИНАМИ

Розв'язано задачу стаціонарної теплопровідності і термопружності для безмежного тіла з двома однаковими компланарними теплоактивними круговими тріщинами, на яких задано температуру або тепловий потік. За допомогою гармонічних потенціалів простого і подвійного шарів задачі зведено до сингулярних інтегральних рівнянь з регулярними ядрами. Якщо віддаль між центрами тріщин більша, ніж сума їх радіусів, то регулярні ядра замінено виводженими і тоді одержано точні розв'язки рівнянь, праві частини яких є поліномами другого степеня. Визначено компоненти тензора напружень і коефіцієнти інтенсивності напружень.

У зв'язку з тим, що багато елементів сучасних конструкцій і інженерних споруд працюють в умовах нерівномірного нагрівання, при оцінці їх міцності необхідно враховувати температурні напруження. Наявність у тілі концентраторів типу тріщин зумовлює локальне зростання температурних градієнтів в їх околі, що викликає значне збільшення температурних напружень. Ці напруження разом з механічними від зовнішніх сил можуть призвести до руйнування конструкції. Тому в таких випадках для аналізу міцності конструкцій суттєве значення мають температурні задачі теорії тріщин, про що свідчить низка публікацій на цю тему [13, 16–18].

Більшість досліджень напружено-деформованого стану тіл з круговими теплоактивними тріщинами, на яких задано температуру або тепловий потік, виконані в осесиметричній постановці методом інтегрального перетворення Ганкеля і дуальних інтегральних рівнянь для безмежного тіла [9, 14, 15]. У роботі [10] методом малого параметра наближено розв'язано задачі теплопровідності та термопружності для безмежного тіла з двома компланарними круговими тріщинами, на поверхнях яких задано температуру або тепловий потік, симетричний відносно площини розташування. У працях [1, 6] методом інтегральних рівнянь досліджено задачу термопружності для безмежного тіла з компланарною системою кругових тріщин.

Загальний метод розв'язування просторових задач для безмежного тіла з плоскими тріщинами, на поверхнях яких задано різні теплові та силові навантаження, наведено у монографії [3]. Задачі теплопровідності і термопружності зведено до розв'язування двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою гармонічних потенціалів простого та подвійного шарів. При цьому густини потенціалів мають простий фізичний сенс: у випадку задач теплопровідності – це густини джерел і диполів тепла на місці розташування тріщин, а у випадку задач термопружності – це стрибки зміщень протилежних поверхонь тріщин. У статті [4] цим методом визначено температурне поле і напружений стан тіла, в якому на круговій області, зокрема тріщині, задано температуру або тепловий потік, що описуються поліномами третього, а в осесиметричному випадку – четвертого степеня. Осесиметричні задачі теплопровідності для тіла з теплоактивною круговою тріщиною в роботі [5] зведено до інтегральних рівнянь та одержано точні розв'язки, коли їх праві частини є поліномами довільного степеня, за якими визначено компоненти тензора напружень і вектора переміщень та коефіцієнти інтенсивності напружень.

Ця робота присвячена розв'язуванню методом гармонічних потенціалів простого та подвійного шарів задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для безмежного тіла з двома компланарними теплоактивними круговими тріщинами, коли праві частини одержаних двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь є поліномами другого степеня.

Визначення температурного поля. Розглянемо безмежне тіло з двома компланарними круговими тріщинами радіуса a , на яких задано температуру або тепловий потік. Початок декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ розмістимо в центрі однієї з тріщин S , спрямувавши вісь Ox_3 перпендикулярно до області S . Вісь Ox_2 проходить через центри тріщин, віддаль між якими $2h$ (рис. 1).

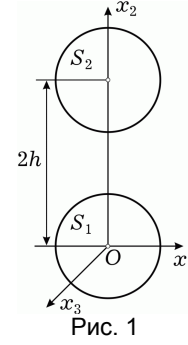


Рис. 1

Стационарне температурне поле, зумовлене тепловиділенням, подамо через гармонічний потенціал простого шару з густиною $w(x_1, x_2)$, який описує потужність теплових джерел в області S [4]:

$$T(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) \left[\frac{1}{R(x^*, \xi)} + \frac{1}{R_1(x^*, \xi)} \right] d_\xi S, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad (1)$$

$$R(x^*, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}, \quad R_1(x^*, \xi) = \sqrt{\omega_1^2(x, \xi) + x_3^2},$$

$$\omega_1^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2 - 2h)^2, \quad x^* = (x_1, x_2, x_3), \quad (2)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності. Задаючи різні вирази для функції $w(\xi)$, із подання (1) знаходимо значення температури в довільній точці тіла.

Введемо безрозмірні величини

$$y_i = \frac{x_i}{a}, \quad \eta_i = \frac{\xi_i}{a}, \quad \varepsilon = \frac{a}{h}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

і запишемо розподіл температури в площині області S :

$$T(y) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S w(\eta) \left[\frac{1}{R(y, \eta)} + \frac{1}{R_1(y, \eta)} \right] d_\eta S, \quad y = (y_1, y_2, 0). \quad (4)$$

Якщо в області тепловиділення S відома температура $T(y)$, то інтегральне рівняння (4) служить для визначення потужності відповідних джерел тепла.

Регулярне ядро $R_1^{-1}(y, \eta)$, яке враховує взаємодію тріщин між собою, замінимо виродженим:

$$R_1^{-1}(y, \eta) \approx \frac{\varepsilon}{2} \left[1 + 0.3\varepsilon(y_2 + \eta_2) - 0.3\varepsilon^2 \frac{(y_1 - \eta_1)^2 + (y_2 + \eta_2)^2}{4} \right]. \quad (5)$$

Інтегральне рівняння (4) має при довільному значенні $T(y)$ необмежений на контурі області S розв'язок [3], який можна записати у вигляді

$$w(\eta) = \frac{\psi(\eta)}{\sqrt{L(\eta)}}, \quad L(\eta) = 1 - \eta_1^2 - \eta_2^2, \quad (6)$$

де $\psi(\eta)$ – обмежена функція. При певному значенні функції $T(y)$ розв'язок може бути і обмеженим [4].

Якщо функція $T(y)$ у рівнянні (4) є поліномом степеня n , то $\psi(\eta)$ також є поліномом такого ж степеня і тоді можна одержати точний розв'язок цього рівняння. Наведемо розв'язок рівняння (4), коли $T(y)$ і $\psi(\eta)$ описуються поліномами другого степеня:

$$T(y) = \sum_{i,j=0}^2 t_{ij} y_1^i y_2^j, \quad \psi(\eta) = \sum_{i,j=0}^2 b_{ij} \eta_1^i \eta_2^j, \quad i + j \leq 2. \quad (7)$$

Підставимо ці вирази у рівняння (4) і обчислимо інтеграли

$$I_{ij}(y) = \iint_S \frac{\eta_1^i \eta_2^j}{\sqrt{L(\eta)} R(y, \eta)} d_\eta S \quad \text{при } i + j \leq 2 \quad \text{та} \quad K_{ij} = \iint_S \frac{\eta_1^i \eta_2^j}{\sqrt{L(\eta)}} d_\eta S : (8)$$

$$I_{00}(y) = \pi^2, \quad I_{11}(y) = \frac{3}{8} \pi^2 y_1 y_2, \quad I_{10}(y) = \frac{1}{2} \pi^2 y_1, \quad I_{01}(y) = \frac{1}{2} \pi^2 y_2,$$

$$I_{20}(y) = \frac{1}{16} \pi^2 (4 + 5y_1^2 - y_2^2), \quad I_{02}(y) = \frac{1}{16} \pi^2 (4 - y_1^2 + 5y_2^2),$$

$$K_{00} = 2\pi, \quad K_{20} = K_{02} = 2\pi/3, \quad K_{22} = 2\pi/15, \quad K_{40} = K_{04} = 2\pi/5. \quad (9)$$

Підставимо співвідношення (5)–(7) у рівняння (4), використаємо інтеграли (8), (9) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях y_1 та y_2 . В результаті одержимо систему алгебричних рівнянь

$$10 \delta_1 b_{00} + \varepsilon^2 b_{01} + 10 \delta_2 b_{20} + 10 \delta_2 b_{02} = 40 \lambda t_{00},$$

$$3\pi b_{11} = 32 \lambda t_{11},$$

$$\delta_3 b_{10} = 80 \lambda t_{10},$$

$$6 \varepsilon^2 b_{00} + \delta_6 b_{01} + 2\varepsilon^2 b_{20} + 2\varepsilon^2 b_{02} = 80 \lambda t_{01},$$

$$-3 \varepsilon^3 b_{00} + 40 \delta_4 b_{20} - 40 \delta_5 b_{02} = 160 \lambda t_{20},$$

$$-3 \varepsilon^3 b_{00} - 40 \delta_5 b_{20} + 40 \delta_4 b_{02} = 160 \lambda t_{02}, \quad (10)$$

де

$$\delta_1 = \pi + \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{20} \right), \quad \delta_2 = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^3}{50} \right), \quad \delta_3 = 10\pi + \varepsilon^3,$$

$$\delta_4 = \frac{5}{16} \pi - \frac{\varepsilon^3}{40}, \quad \delta_5 = \frac{\pi}{16} + \frac{\varepsilon^3}{40}, \quad \delta_6 = 10\pi - \varepsilon^3. \quad (11)$$

Якщо задано інтенсивність теплових джерел $w(\eta)$, тобто відомі b_{ij} , то з системи (10) визначаємо t_{ij} , підставивши які у формулу (7), знаходимо температуру в площині $x_3 = 0$.

Якщо відома температура тіла, тобто t_{ij} , то для визначення інтенсивності теплових джерел $w(\eta)$ розв'язуємо систему рівнянь (10) і знаходимо коефіцієнти b_{ij} :

$$b_{00} = \frac{4\lambda \delta_{10} [\delta_8 t_{00} - \delta_2 (t_{20} + t_{02})] - 2\lambda \varepsilon^2 \delta_8 t_{01} / 5 + \lambda \varepsilon^4 (t_{20} + t_{02}) / 25}{\delta_1 \delta_8 \delta_{10} + \delta_7 - \varepsilon^2 \delta_9 / 10},$$

$$b_{01} = \frac{20\lambda \delta_8 t_{01} - 2\lambda \varepsilon^2 (t_{20} + t_{02}) - 5\delta_9 b_{00}}{5\delta_{10} \delta_8}, \quad b_{10} = \frac{80\lambda}{\delta_3} t_{10},$$

$$b_{11} = \frac{32\lambda}{3\pi} t_{11}, \quad b_{20} = \left(\frac{2\lambda}{\delta_8} + \frac{16\lambda}{3\pi} \right) t_{20} + \left(\frac{2\lambda}{\delta_8} - \frac{16\lambda}{3\pi} \right) t_{02} + \frac{3\varepsilon^3}{40\delta_8} b_{00},$$

$$b_{02} = \left(\frac{2\lambda}{\delta_8} - \frac{16\lambda}{3\pi} \right) t_{20} + \left(\frac{2\lambda}{\delta_8} + \frac{16\lambda}{3\pi} \right) t_{02} + \frac{3\varepsilon^3}{40\delta_8} b_{00}, \quad (12)$$

де

$$\delta_7 = \frac{3\varepsilon^3}{20} \delta_2 \delta_{10}, \quad \delta_8 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon^3}{20}, \quad \delta_9 = \frac{3\varepsilon^2}{10} \delta_8 + \frac{3\varepsilon^5}{200}, \quad \delta_{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon^3}{20}. \quad (13)$$

У виразах (12) δ_1 , δ_2 і δ_3 задаються співвідношеннями (11).

Підставивши коефіцієнти b_{ij} , визначені співвідношеннями (12), у вираз (7), за формулою (6) знаходимо інтенсивності теплових джерел $w(y)$.

Приклад 1. Нехай

$$T(y) = t_{00} + t_{20}y_1^2 + t_{02}y_2^2. \quad (14)$$

Згідно з формулами (12) $b_{10} = b_{11} = 0$, тому потужність джерел тепла

$$w(\eta) = \frac{1}{\sqrt{L(\eta)}} (b_{00} + b_{01}\eta_2 + b_{20}\eta_1^2 + b_{02}\eta_2^2),$$

де

$$\begin{aligned} b_{00} &= \frac{4\lambda\delta_{10}[\delta_8 t_{00} - \delta_2(t_{20} + t_{02})] + \lambda\varepsilon^4(t_{20} + t_{02})/25}{\delta_1\delta_8\delta_{10} + \delta_7 - \varepsilon^2\delta_9/10}, \\ b_{01} &= \frac{-2\lambda\varepsilon^2(t_{20} + t_{02}) - 5\delta_9 b_{00}}{5\delta_{10}\delta_8}, \\ b_{20} &= \left(\frac{2\lambda}{\delta_8} + \frac{16\lambda}{3\pi}\right)t_{20} + \left(\frac{2\lambda}{\delta_8} - \frac{16\lambda}{3\pi}\right)t_{02} + \frac{3\varepsilon^3}{40\delta_8} b_{00}, \\ b_{02} &= \left(\frac{2\lambda}{\delta_8} - \frac{16\lambda}{3\pi}\right)t_{20} + \left(\frac{2\lambda}{\delta_8} + \frac{16\lambda}{3\pi}\right)t_{02} + \frac{3\varepsilon^3}{40\delta_8} b_{00}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут $\delta_1, \delta_2, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}$ задаються виразами (11) і (13).

Приклад 2. Нехай

$$w(\eta) = \frac{1}{\sqrt{L(\eta)}} (b_{00} + b_{20}\eta_1^2 + b_{02}\eta_2^2).$$

Тоді температуру в площині $x_3 = 0$ визначаємо так:

$$T(y) = t_{00} + t_{01}y_2 + t_{20}y_1^2 + t_{02}y_2^2,$$

де

$$\begin{aligned} t_{00} &= \frac{\delta_1 b_{00} + \delta_2 b_{20} + \delta_2 b_{02}}{4\lambda}, & t_{01} &= \frac{3\varepsilon^2 b_{00} + \varepsilon^2 b_{20} + \varepsilon^2 b_{02}}{40\lambda}, \\ t_{20} &= \frac{-3\varepsilon^3 b_{00} + 40\delta_4 b_{20} - 40\delta_5 b_{02}}{160\lambda}, & t_{02} &= \frac{-3\varepsilon^3 b_{00} - 40\delta_5 b_{20} + 40\delta_4 b_{02}}{160\lambda}. \end{aligned}$$

Тут δ_1, δ_2 і δ_4 і δ_5 задаються співвідношеннями (11).

Визначення напружено-деформованого стану тіла. Напруження в тілі на місці розташування тріщин, зумовлені джерелами тепла інтенсивності $w(x_1, x_2)$, знайдемо за допомогою термопружного потенціалу переміщень. Для цього розглянемо спочатку одне зосереджене джерело тепла, розміщене в точці ξ^* (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Тоді

$$\Phi(x^*, \xi^*) = AR(x^*, \xi^*), \quad A = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{4\pi\lambda} \alpha_t w(\xi^*), \quad (16)$$

$$R = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2},$$

де α_t і ν – коефіцієнти лінійного температурного розширення і Пуассона. Напруження знаходимо за формулою

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \Delta \Phi \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (17)$$

де G – модуль зсуву, Δ – оператор Лапласа, δ_{ij} – символ Кронекера. Із використанням виразів (16) і (17) маємо

$$\sigma_{ij} = -2GAR^{-1} [\delta_{ij} + (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)R^{-2}]. \quad (18)$$

З формули (18) визначаємо напруження, зумовлені джерелами тепла, розташованими по компланарних областях:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(x^*) &= -DT(x^*) - \frac{D}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{|x^* - \xi|^3} d_\xi S - \\ &\quad - \frac{D}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{R_1^3(x^*, \xi)} d_\xi S, \\ \sigma_{22}(x^*) &= -DT(x^*) - \frac{D}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{|x^* - \xi|^3} d_\xi S - \\ &\quad - \frac{D}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) \frac{(x_2 + \xi_2 - 2h)^2}{R_2^3(x^*, \xi)} d_\xi S, \\ \sigma_{33}(x^*) &= -DT(x^*) - \frac{Dx_3^2}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)}{|x^* - \xi|^3} d_\xi S - \frac{Dx_3^2}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)}{R_2^3(x^*, \xi)} d_\xi S, \quad (19)\end{aligned}$$

де $D = \frac{G\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}$.

Напруження (19) використаємо при дослідженні напружено-деформованого стану тіла з двома компланарними тріщинами, до поверхонь яких прикладено зусилля $N(x) = -\sigma_{33}(x)$. Тоді задача про визначення функцій $4\pi\alpha_3(x) = u_3^-(x) - u_3^+(x)$, що характеризують розкриття тріщин, зводиться до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння, яке при $x_3 = 0$ в безрозмірних координатах (3) має вигляд

$$\iint_S \alpha_3(\eta) \left[\frac{1}{R^3(y, \eta)} + \frac{1}{R_1^3(y, \eta)} \right] d_\eta S = p(y), \quad (20)$$

де $R(y, \eta)$ і $R_1(y, \eta)$ задаємо виразами (2), а $p(y) = \frac{1-\nu}{G} N(y)$. Тут $N(y) = -DT(y)$.

Розв'язок рівняння (20), обмежений на контурі області S , є таким [8]:

$$\alpha_3(\eta) = \sqrt{L(\eta)} \varphi_3(\eta), \quad L(\eta) = 1 - \eta_1^2 - \eta_2^2. \quad (21)$$

Якщо права частина рівняння (20) є поліноміальною функцією, то $\varphi_3(\eta)$ також є поліноміальною функцією. Нехай

$$p(y) = \sum_{i,j=0}^2 p_{ij} y_1^i y_2^j, \quad \varphi_3(\eta) = \sum_{i,j=0}^2 c_{ij} \eta_1^i \eta_2^j, \quad i+j \leq 2. \quad (22)$$

Підставимо вирази (21) і (22) у рівняння (20), замінивши при цьому його регулярне ядро виродженим

$$R_1^{-3}(y, \eta) \approx \frac{\varepsilon^3}{8} \left[1 + C\varepsilon(y_2 + \eta_2) - \varepsilon^2 \frac{A(y_1 - \eta_1)^2 + B(y_2 + \eta_2)^2}{4} \right]. \quad (23)$$

Коефіцієнти A , B , C знаходимо з умови найкращої апроксимації виродженого ядра, для якої $A = -3.5$, $B = -4.0$, $C = 6.0$.

Обчислимо сингулярні інтеграли [3]

$$J_{ij}(y) = \iint_S \frac{\sqrt{L(\eta)} \eta_1^i \eta_2^j}{R^3(y, \eta)} d_\eta S \quad \text{при} \quad i+j \leq 2: \quad (24)$$

$$J_{00} = -\pi^2, \quad J_{10}(y) = -\frac{3}{2} \pi^2 y_1,$$

$$J_{11}(y) = -\frac{15}{8} \pi^2 y_1 y_2, \quad J_{01}(y) = -\frac{3}{2} \pi^2 y_2,$$

$$J_{20}(y) = \frac{1}{16} \pi^2 (4 - 33y_1^2 - 3y_2^2), \quad J_{02}(y) = \frac{1}{16} \pi^2 (4 - 3y_1^2 - 33y_2^2),$$

та інтеграли

$$L_{ij} = \iint_S \sqrt{L(\eta)} \eta_1^i \eta_2^j d_\eta S : \quad (25)$$

$$L_{00} = \frac{2}{3} \pi, \quad L_{20} = L_{02} = \frac{2}{15} \pi, \quad L_{22} = \frac{2}{105} \pi, \quad L_{40} = L_{04} = \frac{2}{35} \pi.$$

Підставивши вирази (22) з урахуванням (23)–(25) у рівняння (20) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях y_1 та y_2 , одержимо систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta_1 c_{00} + \Delta_2 c_{01} + \Delta_3 c_{20} + \Delta_4 c_{02} &= p_{00}, \\ \Delta_5 c_{10} &= p_{10}, \\ 5\Delta_2 c_{00} + \Delta_6 c_{01} + \Delta_2 (c_{20} + c_{02}) &= p_{01}, \\ -15\pi^2 c_{11}/8 &= p_{11}, \\ \Delta_7 A c_{00} + \Delta_8 c_{20} + \Delta_9 c_{02} &= p_{20}, \\ \Delta_7 B c_{00} + \Delta_{10} c_{20} + \Delta_{11} c_{02} &= p_{02}, \end{aligned} \quad (26)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\pi^2 + \frac{\varepsilon^3 \pi}{12} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{20} (A + B)\right), \quad \Delta_2 = \frac{\varepsilon^4 \pi}{60} C, \\ \Delta_3 &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi \varepsilon^3}{60} - \frac{\pi \varepsilon^5}{560} \left(A + \frac{B}{3}\right), \quad \Delta_4 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi \varepsilon^3}{60} - \frac{\pi \varepsilon^5}{560} \left(\frac{A}{3} + B\right), \\ \Delta_5 &= -\frac{3}{2} \pi^2 + \frac{\pi \varepsilon^5}{120} A, \quad \Delta_6 = -\frac{3}{2} \pi^2 + \frac{\pi \varepsilon^5}{120} B, \\ \Delta_7 &= -\frac{\varepsilon^5 \pi}{48}, \quad \Delta_8 = -\frac{33}{16} \pi^2 - \frac{\pi \varepsilon^5}{240} A, \quad \Delta_9 = -\frac{3\pi^2}{16} - \frac{\pi \varepsilon^5}{240} A, \\ \Delta_{10} &= -\frac{3\pi^2}{16} - \frac{\pi \varepsilon^5}{240} B, \quad \Delta_{11} = -\frac{33}{16} \pi^2 - \frac{\pi \varepsilon^5}{240} B. \end{aligned} \quad (27)$$

Після розв'язання системи рівнянь (26) знаходимо коефіцієнти c_{ij} :

$$\begin{aligned} c_{00} &= \frac{1}{\Delta_{00}} p_{00} - \frac{\Delta_{01}}{\Delta_{00}} p_{01} - \frac{\Delta_{20}}{\Delta_{00}} p_{20} - \frac{\Delta_{02}}{\Delta_{00}} p_{02}, \quad c_{10} = \frac{1}{\Delta_5} p_{10}, \quad c_{11} = -\frac{8}{15\pi^2} p_{11}, \\ c_{01} &= \frac{1}{\Delta_6} p_{01} - \frac{\Delta_2}{\Delta_6 \Delta_{12}} p_{20} - \frac{\Delta_2}{\Delta_6 \Delta_{12}} p_{02} - \frac{\Delta_2 \Delta_7 (A + B) - 5\Delta_2 \Delta_{12}}{\Delta_6 \Delta_{12}} c_{00}, \\ c_{20} &= \frac{\Delta_{12} - \Delta_9}{\Delta_{12} (\Delta_8 - \Delta_9)} p_{20} - \frac{\Delta_9}{\Delta_{12} (\Delta_8 - \Delta_9)} p_{02} + \frac{\Delta_7 \Delta_9 (A + B) - \Delta_7 \Delta_{12} A}{\Delta_{12} (\Delta_8 - \Delta_9)} c_{00}, \\ c_{02} &= \frac{\Delta_8 - \Delta_{12}}{\Delta_{12} (\Delta_8 - \Delta_9)} p_{20} + \frac{\Delta_8}{\Delta_{12} (\Delta_8 - \Delta_9)} p_{02} - \frac{\Delta_7 \Delta_8 (A + B) - \Delta_7 \Delta_{12} A}{\Delta_{12} (\Delta_8 - \Delta_9)} c_{00}, \end{aligned} \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{00} &= \Delta_1 + \frac{\Delta_2^2 \Delta_7 (A + B) - 5\Delta_2^2 \Delta_{12}}{\Delta_6 \Delta_{12}} + \\ &+ \frac{\Delta_7 (A + B) (\Delta_3 \Delta_9 - \Delta_4 \Delta_8) + \Delta_7 \Delta_{12} A (\Delta_4 - \Delta_3)}{\Delta_{12} (\Delta_8 - \Delta_9)}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{20} = \frac{\Delta_3(\Delta_{12} - \Delta_9) + \Delta_4(\Delta_8 - \Delta_{12})}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} - \frac{\Delta_2^2}{\Delta_6\Delta_{12}}, \quad \Delta_{01} = \frac{\Delta_2}{\Delta_6},$$

$$\Delta_{02} = \frac{\Delta_4\Delta_8 - \Delta_3\Delta_9}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} - \frac{\Delta_2^2}{\Delta_6\Delta_{12}}, \quad \Delta_{12} = -\frac{9\pi^2}{4} - \frac{\pi\varepsilon^5}{240}(A+B), \quad (29)$$

а $\Delta_i, i = 1, \dots, 4, \Delta_j, j = 6, \dots, 9$, задаються виразами (27).

Стрибок переміщень поверхонь тріщин визначаємо за формулою (21) з урахуванням співвідношень (22) і (28).

Приклад 3. Нехай до поверхонь тріщин прикладено навантаження

$$p(y) = \frac{(1-\nu)D}{G} T(y), \quad (30)$$

де $T(y)$ визначається співвідношенням (14). Тоді

$$p(y) = \frac{(1-\nu)D}{G} (t_{00} + t_{20}y_1^2 + t_{02}y_2^2) = p_{00} + p_{20}y_1^2 + p_{02}y_2^2, \quad (31)$$

і розкриття тріщини $\alpha_3(\eta)$ знаходимо за формулою

$$\alpha_3(\eta) = \sqrt{L(\eta)} (c_{00} + c_{01}\eta_2 + c_{20}\eta_1^2 + c_{02}\eta_2^2), \quad (32)$$

де

$$c_{00} = \frac{1}{\Delta_{00}} p_{00} - \frac{\Delta_{20}}{\Delta_{00}} p_{20} - \frac{\Delta_{02}}{\Delta_{00}} p_{02}, \quad p_{ij} = \frac{(1-\nu)D}{G} t_{ij},$$

$$c_{01} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_6\Delta_{12}} p_{20} - \frac{\Delta_2}{\Delta_6\Delta_{12}} p_{02} - \frac{\Delta_2\Delta_7(A+B) - 5\Delta_2\Delta_{12}}{\Delta_6\Delta_{12}} c_{00},$$

$$c_{20} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_9}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} p_{20} - \frac{\Delta_9}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} p_{02} + \frac{\Delta_7\Delta_9(A+B) - \Delta_7\Delta_{12}A}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} c_{00},$$

$$c_{02} = \frac{\Delta_8 - \Delta_{12}}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} p_{20} + \frac{\Delta_8}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} p_{02} - \frac{\Delta_7\Delta_8(A+B) - \Delta_7\Delta_{12}A}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} c_{00}, \quad (33)$$

а $\Delta_{00}, \Delta_{20}, \Delta_{02}, \Delta_2, \Delta_j, j = 6, \dots, 9, \Delta_{12}$ задаються виразами (27), (29).

Якщо на тріщинах задано стале навантаження

$$p(y) = \frac{(1-\nu)D}{G} t_{00}, \quad (34)$$

то $\alpha_3(\eta)$ знаходимо за формулою (32), у якій

$$c_{00} = \frac{1}{\Delta_{00}} p_{00},$$

$$c_{01} = -\frac{\Delta_2\Delta_7(A+B) - 5\Delta_2\Delta_{12}}{\Delta_6\Delta_{12}\Delta_{00}} p_{00},$$

$$c_{20} = \frac{\Delta_7\Delta_9(A+B) - \Delta_7\Delta_{12}A}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)\Delta_{00}} p_{00},$$

$$c_{02} = -\frac{\Delta_7\Delta_8(A+B) - \Delta_7\Delta_{12}A}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)\Delta_{00}} p_{00}. \quad (35)$$

Якщо у поданнях (31) і (33) покласти $p_{20} = p_{02} = kp_{00}$, де $k = \text{const}$, а у формулі (32) $\eta_1 = \rho \cos \theta$ і $\eta_2 = \rho \sin \theta$, то прикладені навантаження до поверхонь тріщин і їх розкриття відповідно набудуть вигляду

$$p(r) = p_{00}(1 + kr^2), \quad (36)$$

$$\alpha_3(\eta) = \sqrt{1 - \rho^2} (c_{00} + c_{01}\rho \sin \theta + c_{20}\rho^2 \cos^2 \theta + c_{02}\rho^2 \sin^2 \theta),$$

де

$$\begin{aligned}
c_{00} &= \frac{1 - k(\Delta_{20} + \Delta_{02})}{\Delta_{00}} p_{00}, \\
c_{01} &= -\frac{2k\Delta_2}{\Delta_6\Delta_{12}} p_{00} - \frac{\Delta_2\Delta_7(A+B) - 5\Delta_2\Delta_{12}}{\Delta_6\Delta_{12}} c_{00}, \\
c_{20} &= \frac{(\Delta_{12} - 2\Delta_9)k}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} p_{00} + \frac{\Delta_7\Delta_9(A+B) - \Delta_7\Delta_{12}A}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} c_{00}, \\
c_{02} &= \frac{(2\Delta_8 - \Delta_{12})k}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} p_{00} - \frac{\Delta_7\Delta_8(A+B) - \Delta_7\Delta_{12}A}{\Delta_{12}(\Delta_8 - \Delta_9)} c_{00},
\end{aligned} \tag{37}$$

а $\Delta_{00}, \Delta_{20}, \Delta_{02}, \Delta_2, \Delta_j, j = 6, \dots, 9, \Delta_{12}$ задаються виразами (27), (29).

Коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) $K_1(a, \theta)$ в околі кругових тріщин має вигляд [3]

$$K_1(\theta, a) = -\frac{2G\pi\sqrt{\pi a}}{(1-\nu)} \varphi_3(\theta), \tag{38}$$

$$\varphi_3(\theta) = c_{00} + c_{10} \cos \theta + c_{01} \sin \theta + c_{11} \sin \theta \cos \theta + c_{20} \cos^2 \theta + c_{02} \sin^2 \theta,$$

де θ – кутова координата точки контуру тріщини, c_{ij} визначаються співвідношеннями (28).

Якщо на тріщині задано навантаження (30), (34) або (36), то $K_1(a, \theta)$ знаходимо за формулою (38), в якій

$$\varphi_3(\theta) = c_{00} + c_{01} \sin \theta + c_{20} \cos^2 \theta + c_{02} \sin^2 \theta, \tag{39}$$

а коефіцієнти c_{ij} задаються виразами (33), (35) або (37) відповідно.

Зауважимо, що для однієї тріщини при осесиметричному навантаженні (36) згідно з [7, 12] КІН $K_1(a)$ має вигляд

$$\begin{aligned}
K_1(a) &= -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{rp(r) dr}{\sqrt{1-r^2}} = -\frac{2p_{00}\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{r(1+kr^2) dr}{\sqrt{1-r^2}} = \\
&= \frac{2p_{00}\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2}{3}k\right).
\end{aligned} \tag{40}$$

З цієї формули випливає, що при $k = -\frac{3}{2}$ КІН $K_1 = 0$, а при $k > -\frac{3}{2}$ КІН $K_1 > 0$.

Числові результати та аналіз. Результати досліджень подано для однієї компланарної теплоактивної тріщини, оскільки обидві тріщини знаходяться в однакових умовах. Обчислення виконано для значень віддалей між центрами тріщин $\varepsilon = a/h = 0.25, 0.5, 0.66, 0.8, 0.83$.

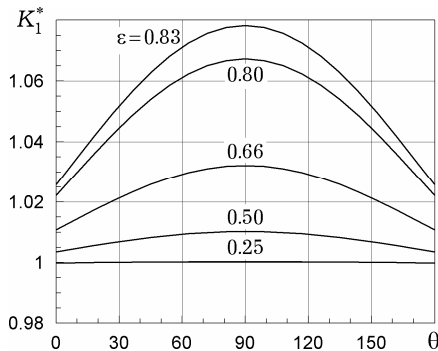


Рис. 2

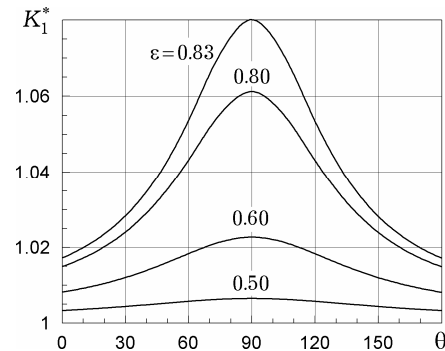


Рис. 3

На рис. 2 – рис. 5 наведено залежності нормованих значень КІН $K_1^* = K_1/K_1^\infty$ від кутової координати точки контуру тріщини θ для різних випадків задання на тріщині температури у вигляді (14): $T(y) = t_{00}$ (рис. 2 і рис. 3), $T(y) = t_{00}(1 - y_1^2 - y_2^2)$ (рис. 4) і $T(y) = t_{00}(1 + y_1^2 + y_2^2)$ (рис. 5). (Тут $K_1^\infty = 2Dt_{00}\sqrt{a/\pi}$ – це КІН для кругової тріщини в безмежному тілі, на якій підтримується стала температура $T = -t_{00}$.) Для порівняння на рис. 3 подано криві КІН, обчислені аналітично-числовим методом [2].

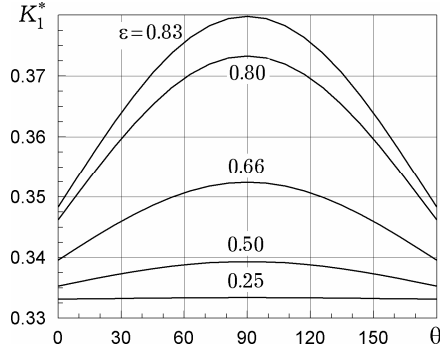


Рис. 4

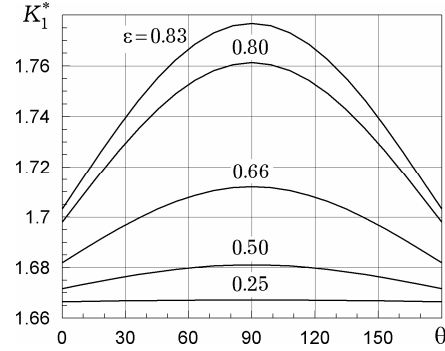


Рис. 5

У табл. 1 наведено значення КІН $K_1^* = K_1/K_1^\infty$ при різних віддалях між центрами тріщин $\varepsilon = a/h$ для значень кутової координати точки контуру тріщини $\theta = 0$ і $\theta = \pi/2$, обчислені за формулами (38) з урахуванням виразів (39) і (35), аналітично-числовим методом [2] та методом масових сил [11] для двох кругових тріщин, поверхні яких вільні від навантажень, а на безмежності тіло розтягується однорідними зусиллями $\sigma_3^\infty = Dt_{00}$, оскільки в роботі [3] показано, що в безмежному тілі з компланарними тріщинами дія заданої на них температури рівносильна дії силового навантаження. Наведені у табл. 1 дані та графіки на рисунках свідчать, що одержані різними методами результати добре узгоджуються між собою.

Таблиця 1

ε K_1^*	$\theta = 0$				$\theta = \pi/2$			
	0.83	0.8	0.66	0.5	0.83	0.8	0.66	0.5
(38)	1.0258	1.0222	1.0108	1.0035	1.0782	1.0673	1.0322	1.0099
[2]	1.017	1.015	1.008	1.004	1.08	1.061	1.022	1.008
[11]	–	1.0147	–	1.0037	–	1.065	–	1.0068

Із аналізу графіків на рис. 4, 2, 5 і даних таблиці випливає, що при зближенні тріщин (параметр $\varepsilon = a/h$ збільшується), а також при збільшенні температури на їх поверхнях КІН зростає і при цьому його максимальне значення завжди знаходиться в найближчій до сусідньої тріщини точці $\theta = \pi/2$.

Висновки. Запропоновано метод розв'язування задачі термопружності для двох однакових кругових тріщин шляхом заміни регулярного ядра інтегрального рівняння (20) виродженим. Показано, що наведеними вище формулами для КІН можна користуватись, якщо віддаль $2h$ між центрами тріщин більша ніж $2.4a$. Максимальне значення КІН завжди знаходиться у найближчій до сусідньої тріщини точці.

1. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 348 с.
2. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние тела с двумя компланарными или параллельными теплоактивными трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 3–8.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 283 с.
4. *Кит Г. С.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 120–128.
Te same: *Kit H. S.* Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with heat release on a circular domain (crack) // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 2. – P. 141–153.
5. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 58–70.
Te same: *Kit H. S., Sushko O. P.* Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 561–577.
6. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
7. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 2.)
8. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.
9. *Deutch E.* The distribution of axisymmetric thermal stress in an infinite elastic medium containing a penny-shaped crack // Int. J. Eng. Sci. – 1965. – **3**, No. 5. – P. 485–490.
10. *Fu W. S.* Thermal stresses in an elastic solid weakened by two coplanar circular cracks // Int. J. Eng. Sci. – 1973. – **11**. – P. 317–330.
11. *Isida M., Hirota K., Noguchi H., Yoshida T.* Two parallel elliptic cracks in an infinite solid subjected to tension // Int. J. Fract. – 1985. – **27**, No. 1. – P. 31–48.
12. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three-dimensional crack problems. – Leyden: Nordhoff Int. Publ., 1975. – 452 p. – (Mechanics of fracture; 2).
13. *Kirilyuk V. S.* Thermostressed state of a piezoelectric body with a plane crack under symmetric thermal load // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 3. – P. 320–330.
Te same: *Кирилюк В. С.* Термонапряженное состояние пьезотермического тела с плоской трещиной при симметрических температурных воздействиях // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 3. – С. 96–108.
14. *Olesiak Z., Sneddon I. N.* The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid containing a penny-shape crack // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1960. – **4**, No. 3. – P. 238–254.
15. *Shail R.* Some thermoelastic stress distributions in an infinite solid and a thick plate containing a penny-shaped crack // Mathematika. – 1964. – **11**, No. 2. – P. 102–118.
16. *Tomlinson R. A., Olden E. J.* Thermoelasticity for the analysis of crack tip stress fields – a review // Strain. – 1999. – **35**, No. 2. – P. 49–55.
17. *Ueda S., Ikawa K.* Thermoelctromechanical interaction between two parallel cracks in a piezoelectric strip // J. Therm. Stresses. – 2008. – **31**, No. 4. – P. 311–330.
18. *Ueda S., Tani Y.* Thermal stress intensity factors for two coplanar cracks in a piezoelectric strip // J. Therm. Stresses. – 2008. – **31**, No. 5. – P. 403–415.

**ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА С ДВУМЯ КОМПЛАНАРНЫМИ
ТЕПЛОАКТИВНЫМИ КРУГОВЫМИ ТРЕЩИНАМИ**

Решена задача стационарной теплопроводности и термоупругости для бесконечного тела с двумя одинаковыми компланарными теплоактивными круговыми трещинами, на которых заданы температура или тепловой поток. С помощью гармонических потенциалов простого и двойного слоев задачи сведены к сингулярным интегральным уравнениям с регулярными ядрами. Если расстояние между центрами трещин больше, чем сумма их радиусов, то регулярные ядра заменены вырожденными и тогда получены точные решения уравнений, если их правые части есть полиномы второй степени. Определены компоненты тензора напряжений и коэффициенты интенсивности напряжений.

**THERMOELASTICITY STATE OF A SOLID WITH TWO COPLANAR
THERMALLY ACTIVE CIRCULAR CRACKS**

A problem of stationary heat conduction and thermoelasticity for an infinite solid with two identical coplanar thermally active circular cracks, on which the temperature or heat flow is given, is solved. The problems are reduced to singular integral equations with regular kernels using the harmonic potentials of simple and double layers. If the distance between the crack centers is larger than the sum of their radius then the regular kernels are substituted by the degenerated ones. Then the exact solutions of equations the right-hand parts of which are the second degree polynomials are obtained. The components of the stress tensor and stress intensity factors are defined.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.07.11