

**АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ЧИННИКАМИ
ОБМЕЖЕНИХ ТІЛ ІЗ ТРІЩИНАМИ ТА ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

Для розв'язування задач антиплатоскої деформації зосередженими чинниками обмежених тіл із тонкостінними дефектами запропоновано два підходи. Перший – числовий на основі методу граничних елементів, у якому для врахування дії гвинтових дислокацій розвинуто підхід Вольтерра, а для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень введено спеціальні кінцеві граничні елементи. Другий – аналітично-числовий метод прямого повного вирізування, в якому обмежені тіла моделюються за допомогою простору із системою контактуючих між собою неоднорідностей, причому в точках контакту діють певні наперед невідомі зосереджені сили та дислокації, що дає можливість істотно підвищити точність розрахунків за невеликого розміру результуючої системи рівнянь. Розглянуто конкретні числові приклади для квадратного в перерізі тіла (бруса) зі стрічковою тріщиною чи жорстким включенням за дії зосереджених сил і гвинтових дислокацій.

Вступ. Тонкі неоднорідності будови матеріалу є надзвичайно поширеним типом конструкційних і технологічних дефектів. При їхньому моделюванні найчастіше розглядають неоднорідності двох типів: тріщину та абсолютно жорстке плівкове включення. У теорії тонких дефектів [9] з'ясовано, що обидва типи дефектів породжують у своїх вершинах кореневу особливість поля напружень. Коефіцієнти при цій особливості – узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН), визнані засадничими параметрами критеріїв руйнування тіл із тріщинами [6] та абсолютно жорсткими включеннями [10, 11].

У більшості робіт, огляд яких можна знайти у монографії [9], дослідження тонкостінних дефектів проводилися для безмежних і півбезмежних областей, шару та пакету двох шарів (можливо підкріплених півбезмежними областями). Проте, з огляду на скінченні розміри реальних об'єктів, важливо дослідити вплив відносних розмірів дефекту та тіла на напружений стан останнього та краще вивчити крайові ефекти. Оскільки визначення напруженого стану обмежених тіл є досить складним і громіздким із погляду математичного моделювання завданням, то більшість результатів для таких задач отримано за допомогою прямих числових методів, зокрема, методу граничних елементів [12, 16]. Інші підходи використовують, наприклад, перетворення Фур'є [17] чи застосовують так званий «метод прямого неповного вирізування», коли скінченне призматичне тіло «вирізується» з необмеженого середовища за допомогою двох відокремлених ламаних тріщин [7].

Усі згадані числові методи використовувалися при вивченні напруженого стану тіл із неоднорідностями за дії розподіленого навантаження. Проте при дослідженні реальних задач часто доводиться мати справу із неоднорідно розподіленим навантаженням чи дією інтенсивних силових чинників, зосереджених на відносно малих ділянках. Тому важливою позитивною рисою ефективності числового чи аналітично-числового підходу є висока точність результатів, отриманих при дослідженні навантаження, зумовленого дією зосереджених сил, що породжують істотні градієнти механічних полів. Важливим при розв'язуванні задач наномеханіки та цікавим у математичному плані є також випадок урахування дії гвинтових дислокацій.

У цій роботі розроблено два підходи аналізу антиплатоскої деформації зосередженими чинниками скінчених тіл: 1°) числовий – на основі прямого методу граничних елементів (МГЕ), 2°) аналітично-числовий спосіб розв'язування задачі на основі методу прямого повного вирізування (МППВ). Окрім доволі універсального характеру та зручності кожного з них, одночасне використання обох підходів також дає можливість взаємної верифікації отриманих даних.

1. Формулювання задачі. Розглянемо антиплоску деформацію ізотропного призматичного тіла, що містить розташований уздовж осі абсцис стрічковий дефект L завдовжки $2a$. Модуль зсуву матеріалу тіла дорівнює G . Нехай переріз S тіла площиною xOy , перпендикулярною до твірної поверхні, має форму квадрата зі стороною $2H$ (рис. 1). Зовнішнє навантаження задане зосередженими чинниками, що діють у точках $z^{k*} = x^{k*} + iy^{k*}$, – силами P_k і гвинтовими дислокаціями $b_k, k=1, \dots, N$.

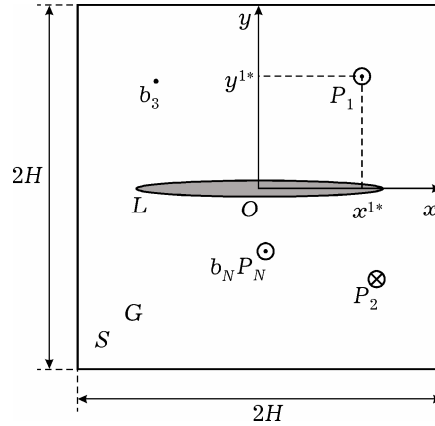


Рис. 1

Виходячи із принципу спряження континуумів різної вимірності [9], тонка неоднорідність вилучається з розгляду як геометричний об'єкт, а контактні напруження і переміщення переносяться на відповідні береги її серединної поверхні L .

При цьому межу тіла вважаємо вільною від навантаження, а на дефекті можуть бути задані або вектор напружень (тріщина), або вектор сумісного переміщення берегів (абсолютно жорстке включення).

2. Розв'язування задачі за схемою прямого методу граничних елементів. За вихідне інтегральне співвідношення методу виберемо тотожність Сомільяни [2] для антиплоскої деформації тіла із внутрішнім розрізом Γ_C :

$$\begin{aligned}
 w(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\partial S} [W(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
 & + \int_{\Gamma_C} [W(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\Sigma t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
 & + \iint_S W(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})f(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (1)
 \end{aligned}$$

де $w(\boldsymbol{\xi})$ – переміщення точки $\boldsymbol{\xi}$ тіла; $t(\mathbf{x})$ – поверхневі напруження; $f(\mathbf{x})$ – розподіл об'ємних сил у тілі; $\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$, $\Sigma(\cdot) = (\cdot)^+ + (\cdot)^-$; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_C^+ та Γ_C^- , утворених математичним розрізом $\Gamma_C \sim L$. Ядра W і T [2] зручно подати у вигляді дійсної та уявної частин функції комплексного аргументу $Z(\mathbf{x}) = x_1 + ix_2$, де x_1, x_2 – проекції вектора \mathbf{x} відповідно на осі $Ox_1 \sim Ox_2$ та $Ox_2 \sim Oy$ прямокутної системи координат $Ox_1x_2 \sim Oxy$; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Після відповідних перетворень матимемо

$$W(\mathbf{x}) = \frac{-1}{2\pi G} \operatorname{Re}[\ln Z(\mathbf{x})], \quad T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{n_2 - in_1}{Z(\mathbf{x})} \right]. \quad (2)$$

Тут n_1, n_2 – компоненти одиничного вектора нормалі \mathbf{n} до межі ∂S тіла.

За дії на тіло зосереджених сил функція $f(\mathbf{x})$ матиме вигляд

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n P_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k*}), \quad (3)$$

де P_k – величина k -ї зосередженої сили; $\mathbf{x}^{k*} \sim z^{k*}$ – точка її прикладання. З урахуванням правил інтегрування узагальнених функцій останній доданок в (1) набуде вигляду

$$\iint_S W(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) f(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n P_k W(\mathbf{x}^{k*} - \boldsymbol{\xi}). \quad (4)$$

Для врахування дії дислокацій розглянемо в тілі додатковий розріз Γ_b із заданим на ньому стрибком переміщень Δw , що дорівнює проекції b її вектора Бюргерса на вісь $x_3 \sim z$ (дислокація Вольтерра [1]). Зважаючи на те, що при переході через поверхню Γ_b відсутній стрибок напружень, тобто $\Delta \sigma_{3n} = (\sigma_{3j}^+ - \sigma_{3j}^-) n_j^+ = \sigma_{3j}^+ n_j^+ + \sigma_{3j}^- n_j^- = \Sigma t = 0$, то доданком, що враховує у формулі (1) дію дислокацій, буде вираз

$$w^b(\boldsymbol{\xi}) = -b \int_{\Gamma_b} T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (5)$$

З огляду на те, що $dZ = dx_1 + idx_2 = -n_2 d\Gamma + in_1 d\Gamma = -(n_2 - in_1) d\Gamma$, з урахуванням (2) отримаємо

$$w^b(\boldsymbol{\xi}) = \frac{b}{2\pi} \operatorname{Im} \left[\int_{\Gamma_b} \frac{dZ(\mathbf{x})}{Z(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right] = bB(\mathbf{x}^{b1}, \mathbf{x}^{b2}, \boldsymbol{\xi}),$$

$$B(\mathbf{x}^{b1}, \mathbf{x}^{b2}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[\ln \frac{Z(\mathbf{x}^{b1} - \boldsymbol{\xi})}{Z(\mathbf{x}^{b2} - \boldsymbol{\xi})} \right], \quad (6)$$

де \mathbf{x}^{b1} і \mathbf{x}^{b2} – координати кінця і початку розрізу Γ_b . Зазначимо, що якщо для необмеженого тіла розріз закінчується в безмежно віддаленій точці і вона якось точніше не окреслюється, то для тіла скінченних розмірів це має значення.

З урахуванням (4) і (6) тотожність Сомільяни (1) для тіла, що перебуває під дією зосереджених сил і гвинтових дислокацій, набуде вигляду

$$w(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\partial S} [W(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) +$$

$$+ \int_{\Gamma_C} [W(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \Sigma t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n P_k W(\mathbf{x}^{k*} - \boldsymbol{\xi}) + \sum_{k=1}^n b_k B(\mathbf{x}_k^{b1}, \mathbf{x}_k^{b2}, \boldsymbol{\xi}). \quad (7)$$

Диференціюючи (7) за ξ_j і домножуючи на модуль зсуву G , отримаємо інтегральне подання компонент тензора напружень

$$\sigma_{3j}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\partial S} [D_j(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) t(\mathbf{x}) - S_j(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) +$$

$$+ \int_{\Gamma_C} [D_j(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \Sigma t(\mathbf{x}) - S_j(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n P_k D_j(\mathbf{x}^{k*} - \boldsymbol{\xi}) + \sum_{k=1}^n b_k H_j(\mathbf{x}_k^{b1}, \mathbf{x}_k^{b2}, \boldsymbol{\xi}), \quad (8)$$

де

$$D_j(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = G \frac{\partial}{\partial \xi_j} W(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad S_j(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = G \frac{\partial}{\partial \xi_j} T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad H_j = G \frac{\partial}{\partial \xi_j} B.$$

Інтегральні співвідношення задачі отримаємо спрямувавши точку $\boldsymbol{\xi}$ області S до межі ∂S тіла або до математичного розрізу Γ_C . З урахуванням формул Сохоцького – Племелі [2] з подань (7) і (8) отримаємо таку систему рівнянь

– коли точка колокації \mathbf{y} розташована на межі ∂S тіла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\partial S} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\partial S} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma_C^+} [W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \sum_{k=1}^n P_k W(\mathbf{x}^{k*} - \mathbf{y}) + \sum_{k=1}^n b_k B(\mathbf{x}_k^{b1}, \mathbf{x}_k^{b2}, \mathbf{y}); \end{aligned} \quad (9')$$

– коли точка \mathbf{y} розташована на серединній поверхні Γ_C щілини чи включення:

$$\begin{aligned} & \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ & = \frac{\Sigma w(\mathbf{y})}{2} - \int_{\partial S} [W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \sum_{k=1}^n P_k W(\mathbf{x}^{k*} - \mathbf{y}) - \sum_{k=1}^n b_k B(\mathbf{x}_k^{b1}, \mathbf{x}_k^{b2}, \mathbf{y}), \\ & n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] = \\ & = \frac{\Delta t(\mathbf{y})}{2} - n_j^+(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} [D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) - S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - n_j^+(\mathbf{y}) \left[\sum_{k=1}^n P_k D_j(\mathbf{x}^{k*} - \mathbf{y}) + \sum_{k=1}^n b_k H_j(\mathbf{x}_k^{b1}, \mathbf{x}_k^{b2}, \mathbf{y}) \right]. \end{aligned} \quad (9'')$$

Тут символом RPV позначено величину невластивого інтегралу (Riemann principal value); CPV – головне значення інтегралу (Cauchy principal value); HPV – скінченну частину гіперсингулярного інтегралу (Hadamard principal value). Індекси у позначеннях відповідають проєкціям векторів на осі глобальної системи координат. У формулах приймаємо правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється.

При розв'язуванні рівнянь (9) слід зважати на те, що для тріщини з вільними від навантаження берегами крайові умови на Γ_C мають вигляд $\Delta t(\mathbf{y}) = 0$, $\Sigma t(\mathbf{y}) = 0 \forall \mathbf{y} \in \Gamma_C$, а для абсолютно жорсткого включення – $\Delta w(\mathbf{y}) = 0$, $\Sigma w(\mathbf{y}) = 2w_0 \forall \mathbf{y} \in \Gamma_C$, де w_0 – переміщення включення як жорсткого цілого, яке для тіла із вільними берегами може бути довільним, а коли на межі ∂S задано переміщення, w_0 потрібно вибирати так, щоб задовольнялися умови глобальної рівноваги включення.

Для числового розв'язування інтегральних рівнянь (9) застосуємо схему методу граничних елементів [13, 14]. У ній для моделювання граничних елементів, що не прилягають до торця неоднорідності, використовуємо розривні квадратичні елементи [15], що задаються лагранжевими базовими функціями

$$\varphi_1 = t \left(\frac{9}{8} t - \frac{3}{4} \right), \quad \varphi_2 = \left(1 - \frac{3}{2} t \right) \left(1 + \frac{3}{2} t \right), \quad \varphi_3 = t \left(\frac{9}{8} t + \frac{3}{4} \right), \quad -1 \leq t \leq 1,$$

для системи вузлів $t_p = [-2/3, 0, 2/3]$ тривузлового елемента.

Для підвищення точності методу та для зручності визначення УКІН при моделюванні приторцевої частини тріщини за допомогою тривузлових розривних граничних елементів вводимо такі системи базових функцій для розривів переміщень [13, 14]:

$$\Phi_p^{\Delta w} = \Phi_{p1}^{\Delta w} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta w} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta w} \rho^{3/2}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Тут $\rho = 1 \pm t$; $-1 \leq t \leq 1$ – нормована дугова координата граничного елемента; $\Phi_{pj}^{\Delta u}$ – матриці сталих, що визначаються з рівнянь

$$\Phi_p(t_p) = 1, \quad \Phi_p(t_{j \neq p}) = 0.$$

Базові функції на тривузлових граничних елементах, що прилягають безпосередньо до торців абсолютно жорсткого включення, задаємо співвідношеннями [13, 14]

$$\Phi_p^{\Sigma t} = \Phi_{p1}^{\Sigma t} \rho^{-1/2} + \Phi_{p2}^{\Sigma t} + \Phi_{p3}^{\Sigma t} \sqrt{\rho}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (11)$$

З огляду на спеціальні функції (10) і (11) появляется можливість безпосереднього визначення із високою точністю узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень за множниками при \sqrt{r} і $\frac{1}{\sqrt{r}}$ [9]:

$$K_{31} = G \sqrt{\frac{\pi}{8}} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta w(r)}{\sqrt{r}}, \quad K_{32} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \Sigma t(r),$$

де r – відстань до вершин тріщини чи абсолютно жорсткого включення.

3. Розв'язування задачі методом прямого повного вирізування. У роботі [3] для визначення напружено-деформованого стану обмежених тіл із тонкими неоднорідностями запропоновано метод прямого вирізування (МПВ). Цей метод полягає у моделюванні обмеженого тіла з неоднорідностями за допомогою простору чи кусково-однорідного простору з тріщинами та абсолютно жорсткими включеннями, що моделюють краї тіла.

У [5] для зменшення впливу взаємодії вершин моделюючих неоднорідностей на напружений стан тіла запропоновано модифікацію МПВ – так званий метод прямого повного вирізування. Коротко опишемо основну методичку розв'язування задачі за допомогою МППВ.

Сформульовану у п. 1 задачу для бруса квадратного перерізу із тонкою стрічковою неоднорідністю моделюємо за допомогою однорідного безмежного ізотропного простору із модулем пружності G і п'яти стрічкових включень L_j , $j = 0, \dots, 4$ (рис. 2). Довжини включень – $2a_j$, товщини – $2h_j$, модулі

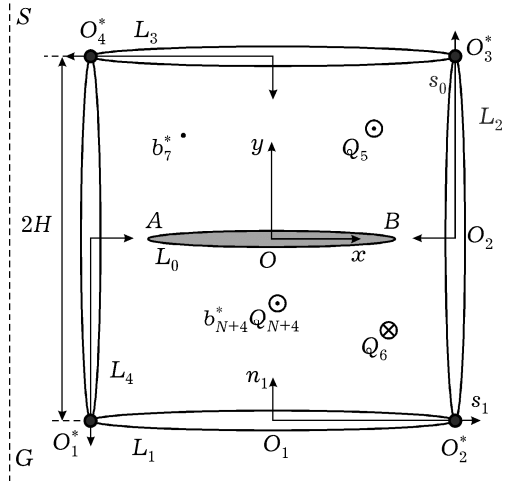


Рис. 2

пружності – G_j^{in} , кути нахилу до

осі абсцис – α_j , координати центрів – $z_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}$, $j = 0, \dots, 4$. Грані квадрата моделюємо за допомогою чотирьох стрічкових неоднорідностей L_j , $j = 1, \dots, 4$, однакової довжини (тріщин – у випадку дослідження вільних берегів квадрата, і абсолютно жорстких включень – для дослідження жорстко защемлених берегів), що контактують між собою в точках O_j^* , $j = 1, \dots, 4$. Досліджувану неоднорідність $L \sim L_0$ описуватимемо моделлю дуже податного чи дуже жорсткого включення L_0 , орієнтація, розміщення і механічні параметри якого такі ж, як і неоднорідності L вихідної задачі (див. рис. 1 і рис. 2).

У точках O_j^* контакту моделюючих включень функції стрибків суміжних неоднорідностей мають бути певним чином пов'язані між собою. Оскільки цей зв'язок заздалегідь невідомий, то для визначеності спочатку накладемо додаткові умови рівності нулевій функції стрибків у точках O_j^* , $j = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} f_{5j}(O_j^*) = f_{6j}(O_j^*) = 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\ f_{5j}(O_{j+1}^*) = f_{6j}(O_{j+1}^*) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad f_{54}(O_1^*) = f_{64}(O_1^*) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки у точках O_j^* , $j = 1, \dots, 4$, первісної задачі існує певний стрибок напружень і похідних від переміщень, то для того, щоб підправити накладене умовами (12) обмеження, додатково розмістимо у цих точках невідомі зосереджені сили Q_j і гвинтові дислокації зі складовою вектора Бюргерса b_j^* , $j = 1, \dots, 4$, які мають забезпечити згаданий стрибок. Таким чином, напружений стан модельованої задачі шукатимемо у вигляді суперпозиції розв'язків для п'яти включень в однорідному просторі за заданих ($Q_{k+4} = P_k$, $b_{k+4}^* = b_k$, $k = 1, \dots, N$) і невідомих (Q_k , b_k^* , $k = 1, \dots, 4$) зосереджених сил і дислокацій:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=0}^4 \int_{L_j'} \frac{f_{5j}(t) + iGf_{6j}(t)}{te^{ia_j} - (z - z_{0j})} dt + \sum_{j=1}^{N+4} (\sigma_{yz}^{j*} + i\sigma_{xz}^{j*}), \quad (13) \\ \sigma_{yz}^{j*} + i\sigma_{xz}^{j*} = -\frac{i}{2\pi} \frac{Q_j + iGb_j^*}{z - z^{j*}}, \quad z^{j*} = x^{j*} + iy^{j*}, \quad z = x + iy. \end{aligned}$$

Тут σ_{yz}^{j*} , σ_{xz}^{j*} – напруження від дії зосередженої сили Q_j і дислокації b_j^* у точці з координатами z^{j*} [9].

Для визначення невідомих функцій стрибків f_{5j} , f_{6j} , $j = 0, \dots, 4$, використаємо умови взаємодії матриці з включеннями [8, 9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{sz}^{j+} + \sigma_{sz}^j + \frac{G}{G_j^{\text{in}} h_j} \int_{-a_j}^{s_j} (\sigma_{nz}^{j+} - \sigma_{nz}^{j-}) dt = 2 \frac{G\sigma_{sz}^{j\text{av}}(-a_j)}{G_j^{\text{in}}}, \\ \sigma_{nz}^{j+} + \sigma_{nz}^{j-} - \frac{G_j^{\text{in}}}{h_j G} \int_{-a_j}^{s_j} (\sigma_{sz}^{j+} - \sigma_{sz}^{j-}) dt = \frac{w_j^*}{h_j}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут $\sigma_{sz}^{j\pm}$, $\sigma_{nz}^{j\pm}$ – дотичні й нормальні напруження на верхньому (+) і нижньому (-) берегах неоднорідності у її локальній системі координат $sOn \sim s_j O_j n_j$; $\sigma_{sz}^{j\text{av}}(-a_j)$, w_j^* – певні торцеві сталі лівої вершини неоднорідності, для визначення яких використовують апріорні залежності [9]

$$\begin{aligned} \sigma_{sz}^{j\text{av}}(-a_j) = \sigma_{sz}^0(-a_j) \frac{G_j^{\text{in}}}{\max(G_j^{\text{in}}, G)}, \\ w_j^* = 2h_j \sigma_{nz}^0(-a_j) \frac{G_j^{\text{in}} \min(G_j^{\text{in}}, G)}{G^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\sigma_{sz}^0(-a_j)$, $\sigma_{nz}^0(-a_j)$ – значення напружень у відповідному середовищі без включення у місці лівого торця останнього (однорідний розв'язок).

Перейдемо у (13) до локальної для j -го включення, $j = 0, \dots, 4$, системи координат $s_j O_j n_j$:

$$\begin{aligned}\sigma_{nz}^j + i\sigma_{sz}^j &= [\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}] \exp(i\alpha_j), \\ z = x + iy &= \tilde{z}_j \exp(i\alpha_j) + z_{0j} = (s_j + in_j) \exp(i\alpha_j) + z_{0j}.\end{aligned}$$

Застосувавши до результату такого перетворення формулу Сохоцького – Племелі [2], отримаємо вирази для залежності напружень і переміщень на верхньому і нижньому берегах стрічкових неоднорідностей від невідомих функцій стрибків $f_{5j}, f_{6j}, j = 0, \dots, 4$:

$$\begin{aligned}\sigma_{nz}^{j\pm}(s_j) + i\sigma_{sz}^{j\pm}(s_j) &= \mp \frac{1}{2} [f_{5j}(s_j) + iGf_{6j}(s_j)] + \frac{i}{2\pi} \int_{L_j'} \frac{f_{5j}(t) + iGf_{6j}(t)}{t - s_j} dt + \\ &+ (\tilde{\sigma}_{nz}^j + i\tilde{\sigma}_{sz}^j) + \sum_{p=1}^4 (\sigma_{nz}^{jp*} + i\sigma_{sz}^{jp*}), \quad j = 0, \dots, 4, \\ \tilde{\sigma}_{nz}^j + i\tilde{\sigma}_{sz}^j &= \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^4 \int_{L_k'} \frac{f_{5k}(t) + iGf_{6k}(t)}{t \exp(i\alpha_k) - (s_p \exp(i\alpha_j) + z_{0j} - z_{0k})} \exp(i\alpha_j) dt, \\ \sigma_{nz}^{jp*} + i\sigma_{sz}^{jp*} &= [\sigma_{yz}^{p*} + i\sigma_{xz}^{p*}] \exp(i\alpha_j).\end{aligned}\tag{16}$$

Підставляючи (16) в умови взаємодії матриці з включеннями (14), отримаємо десять сингулярних інтегральних рівнянь стосовно десяти невідомих функцій стрибків $f_{5j}, f_{6j}, j = 0, \dots, 4$, та восьми невідомих сталих Q_j і b_j^* , $j = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{L_j'} \frac{f_{5j}(t)}{t - s_j} dt - \frac{G}{G_j^{\text{in}} h_j} \int_{-a_j}^{s_j} f_{5j} dt + 2\tilde{\sigma}_{sz}^j + 2 \sum_{p=1}^4 \sigma_{sz}^{jp*} &= 2 \frac{G\sigma_{sz}^{j\text{av}}(-a_j)}{G_j^{\text{in}}}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{L_j'} \frac{f_{6j}(t)}{t - s_j} dt - \frac{G_j^{\text{in}}}{Gh_j} \int_{-a_j}^{s_j} f_{6j} dt - \frac{2}{G} \tilde{\sigma}_{nz}^j - \frac{2}{G} \sum_{p=1}^4 \sigma_{nz}^{jp*} &= -\frac{w_j^*}{Gh_j}, \quad j = 0, \dots, 4.\end{aligned}\tag{17}$$

Дві додаткові умови глобальної рівноваги досліджуваної неоднорідності L_0 і однозначності переміщень при обході навколо неї

$$\int_{-a_0}^{a_0} f_{50}(t) dt = 0, \quad \int_{-a_0}^{a_0} f_{60}(t) dt = 0\tag{18}$$

разом із шістьнадцятьма умовами (12) дають можливість вважати отриману систему сингулярних інтегральних рівнянь (17) повною. Розв'язок (12), (17), (18) шукатимемо на основі методу колокацій [9], вважаючи, як і у загальній схемі відокремлених включень, що функції стрибків мають кореневі особливості на кінцях L_j .

Узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень визначатимемо через знайдені функції стрибків за формулами [1, 9]

$$\begin{aligned}K_{32}^A - iK_{31}^A &= (p_5^A + iGp_6^A)\sqrt{\pi/2}, \quad p_j^A = \lim_{t \rightarrow -a_0} [\sqrt{a_0 + t} f_{j0}(-a_0)], \\ K_{32}^B - iK_{31}^B &= -(p_5^B + iGp_6^B)\sqrt{\pi/2}, \quad p_j^B = \lim_{t \rightarrow a_0} [\sqrt{a_0 - t} f_{j0}(a_0)], \quad j = 5, 6.\end{aligned}$$

Тут верхні індекси «A» і «B» стосуються відповідно лівої і правої вершини неоднорідності.

4. Числовий аналіз прикладів. Розглянемо за допомогою двох розроблених підходів задачі для тіла з тріщиною і жорстким включенням.

Тріщина за дії зосереджених сил. Розглянемо квадратне в плані тіло зі стороною $2H$, всередині якого розташована центральна тріщина довжини $2a$, серединна поверхня якої паралельна до однієї зі сторін квадрата. Тіло перебуває під дією двох антипаралельних зосереджених сил із модулем P , розташованих на відстані d від поверхонь тріщини (рис. 3). Для дискретизації поверхні тріщини у МГЕ-моделі використано 31-тривузловий елемент, а кожна зі сторін квадрата розбита на 35 граничних елементів.

При використанні МППВ при розв'язуванні ССІР (17), (18) методом колокацій [4, 9] брали $N_1 = 40$ членів скінченної суми розвинення в ряд кожної з функцій стрибка для $a/H \leq 0.5$, $d/a \geq 0.5$ і $N_1 = 80$ – для решти значень.

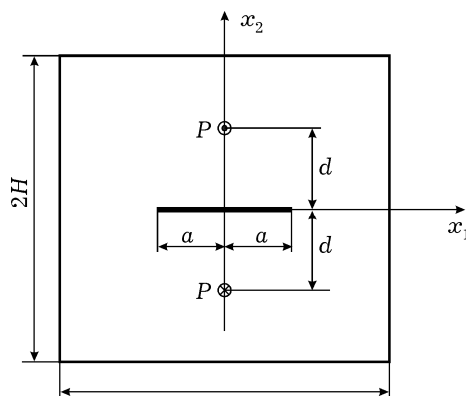


Рис. 3

Отримані методом граничних елементів і методом прямого повного вирізування результати розрахунків нормованого КІН $K_{31}^* = K_{31} \sqrt{\pi a} / P$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1

a/H d/a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	Метод
0.1	1.0038	1.0304	1.0773	1.1490	1.2539	1.4089	1.6497	МГЕ
	1.0026	1.0298	1.0768	1.1485	1.2535	1.4087	1.6495	МППВ
0.2	0.9895	1.0166	1.0642	1.1368	1.2431	1.3998	1.6427	МГЕ
	0.9885	1.0165	1.0641	1.1368	1.2432	1.4001	1.6430	МППВ
0.3	0.9670	0.9947	1.0434	1.1176	1.2260	1.3855	1.6317	МГЕ
	0.9654	0.9946	1.0433	1.1176	1.2261	1.3857	1.6320	МППВ
0.4	0.9378	0.9664	1.0166	1.0930	1.2043	1.3674	1.6180	МГЕ
	0.9359	0.9664	1.0166	1.0931	1.2044	1.3676	1.6183	МППВ
0.5	0.9041	0.9337	0.9857	1.0648	1.1796	1.3471	1.6029	МГЕ
	0.9017	0.9338	0.9858	1.0649	1.1798	1.3474	1.6032	МППВ
0.6	0.8675	0.8984	0.9526	1.0347	1.1536	1.3260	1.5875	МГЕ
	0.8648	0.8985	0.9527	1.0349	1.1538	1.3264	1.5878	МППВ
0.7	0.8296	0.8620	0.9186	1.0042	1.1275	1.3053	1.5728	МГЕ
	0.8265	0.8622	0.9188	1.0044	1.1278	1.3057	1.5732	МППВ
0.8	0.7918	0.8257	0.8849	0.9743	1.1024	1.2859	1.5595	МГЕ
	0.7882	0.8259	0.8852	0.9745	1.1027	1.2863	1.5599	МППВ
0.9	0.7547	0.7904	0.8524	0.9458	1.0790	1.2682	1.5479	МГЕ
	0.7507	0.7906	0.8527	0.9460	1.0793	1.2686	1.5483	МППВ
1.0	0.7191	0.7566	0.8216	0.9192	1.0576	1.2527	1.5382	МГЕ
	0.7146	0.7567	0.8219	0.9194	1.0579	1.2531	1.5387	МППВ

Аналіз обчислень свідчить про добру узгодженість результатів, отриманих обома методами. Збігаються 2 – 4 значущі цифри чисел, а відносне відхилення результатів не перевищує 0.7%. Із табл. 1 простежується така тенденція: збільшення розмірів тріщини, порівняно із характерним розміром тіла, зумовлює збільшення КІН; наближення зосереджених чинників до поверхні тріщини також спричиняє зростання КІН. Таке зростання є природним, оскільки основне навантаження сприймається лише невеликими ділянками тіла між його межею і кінцями тріщини.

Тріщина за дії гвинтових дислокацій. Розглянемо квадратне в плані тіло із тріщиною за дії гвинтових дислокацій величини b із протилежними за напрямом векторами Бюргерса (рис. 4). Для дискретизації моделі у МГЕ використано таке саме гранично-елементне розбиття, як і в попередньому прикладі. При моделюванні гвинтових дислокацій початок умовного розрізу Γ_b вибрали в одній з вершин квадрата так, щоб площини зсуву атомних шарів не перетинали поверхні тріщини. Кінець розрізу вибрали у відповідній точці на краю поверхні Γ_b .

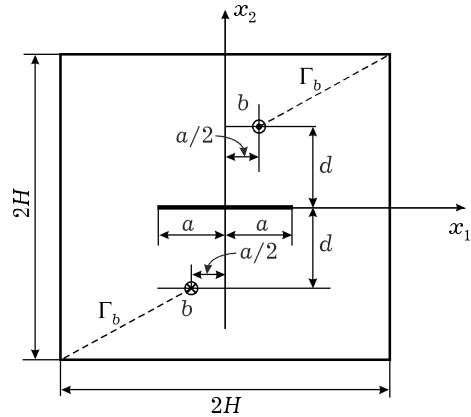


Рис. 4

Результати розрахунків методом граничних елементів і методом прямого повного вирізування нормованого КІН $K_{31}^* = K_{31} \sqrt{\pi a} / (bG)$ подано в табл. 2.

Таблиця 2

$d/a \backslash a/H$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	Метод
0.1	-0.0747	-0.0731	-0.0705	-0.0665	-0.0611	-0.0538	-0.0440	МГЕ
	-0.0742	-0.0727	-0.0701	-0.0662	-0.0608	-0.0536	-0.0440	МППВ
0.2	-0.1371	-0.1341	-0.129	-0.1214	-0.1109	-0.0969	-0.0786	МГЕ
	-0.1360	-0.1331	-0.1280	-0.1204	-0.1100	-0.0961	-0.0779	МППВ
0.3	-0.1804	-0.1761	-0.1687	-0.1579	-0.1430	-0.1234	-0.0982	МГЕ
	-0.1793	-0.1751	-0.1677	-0.1569	-0.1421	-0.1226	-0.0975	МППВ
0.4	-0.2052	-0.1998	-0.1905	-0.1768	-0.1583	-0.1343	-0.1042	МГЕ
	-0.2044	-0.1990	-0.1897	-0.1761	-0.1576	-0.1336	-0.1037	МППВ
0.5	-0.2157	-0.2093	-0.1983	-0.1823	-0.1608	-0.1336	-0.1006	МГЕ
	-0.2152	-0.2088	-0.1978	-0.1819	-0.1605	-0.1332	-0.1003	МППВ
0.6	-0.2162	-0.2090	-0.1966	-0.1787	-0.1550	-0.1256	-0.0913	МГЕ
	-0.2160	-0.2087	-0.1963	-0.1785	-0.1549	-0.1255	-0.0912	МППВ
0.7	-0.2105	-0.2025	-0.189	-0.1696	-0.1443	-0.1137	-0.0795	МГЕ
	-0.2104	-0.2024	-0.1889	-0.1695	-0.1443	-0.1137	-0.0794	МППВ
0.8	-0.2010	-0.1925	-0.178	-0.1574	-0.1311	-0.1000	-0.0668	МГЕ
	-0.2010	-0.1925	-0.1780	-0.1574	-0.1311	-0.1001	-0.0668	МППВ
0.9	-0.1897	-0.1806	-0.1654	-0.1439	-0.1169	-0.0860	-0.0543	МГЕ
	-0.1898	-0.1807	-0.1654	-0.1440	-0.1170	-0.0860	-0.0543	МППВ
1.0	-0.1776	-0.1681	-0.1522	-0.1301	-0.1027	-0.0723	-0.0425	МГЕ
	-0.1777	-0.1682	-0.1523	-0.1302	-0.1028	-0.0723	-0.0426	МППВ

Взаємне відхилення поданих у табл. 2 даних не перевищує 1%, що свідчить про достовірність використаного фізичного підходу моделювання гвинтових дислокацій за допомогою МГЕ. За дії гвинтових дислокацій простежується лише одна чітка тенденція: збільшення відносних порівняно з характерним розміром тіла розмірів a/H тріщини зумовлює зменшення КІН. Натомість, із віддаленням дислокацій від поверхонь тріщини КІН спочатку зростає, а потім навіть поступово зменшується.

Абсолютно жорстке включення за дії гвинтових дислокацій і зосереджених сил. Розглянемо попередню задачу (рис. 4), замінивши тріщину абсолютно жорстким плівковим включенням. Початки поверхонь Γ_b , як і в попередньому прикладі, розмістимо у вершинах квадрата так, щоб лінії Γ_b не перетинали поверхні включення. Зазначимо, що коли лінія Γ_b перетинає поверхню включення, фізично реалізується зовсім інша задача:

тіло з включенням розрізали поверхнею зсуву шарів, змістили її береги на вектор Бюргера, «склеїли», а потім додатково звели розітнуті частини включення в одне ціле. У цьому ж прикладі реалізується фізично достовірніша задача, коли дислокації утворювалися в тілі, не зачіпаючи матеріал включення. Особливо досліджуємо випадок дії двох антипаралельних зосереджених сил, розташованих у тих же точках, що й гвинтові дислокації на рис. 4. Внаслідок високих градієнтів переміщень у випадку дії зосереджених сил розбиття серединної поверхні включення для МГЕ здійснено за допомогою 61 граничного елемента. У методі прямого повного вирізування розвинення функцій стрибків у скінченні суми ряду здійснено за допомогою такої ж, як і в попередніх прикладах, кількості членів.

На рис. 5 зображено отримані для абсолютно жорсткого плівкового включення нормовані значення узагальненого КІН $K_{32}^* = K_{32}\sqrt{\pi a}/(bG)$ за дії дислокацій (рис. 5а) і КІН $K_{32}^* = K_{32}\sqrt{\pi a}/P$ за дії зосереджених сил (рис. 5б). Обчислення виконано для значень $a/H = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. криві побудовано методом граничних елементів, а штрихові – методом прямого повного вирізування.

Оскільки взаємне відхилення результатів обох методів не перевищує 0.4 %, то відповідні криві (суцільні та штрихові) на рис. 5 практично збігаються. Із рис. 5а для випадку дії гвинтових дислокацій простежується тенденція, обернена до відповідної у першій задачі: збільшення відносного розміру включення зумовлює зменшення КІН; наближення дислокацій до поверхні включення також спричинює зниження КІН.

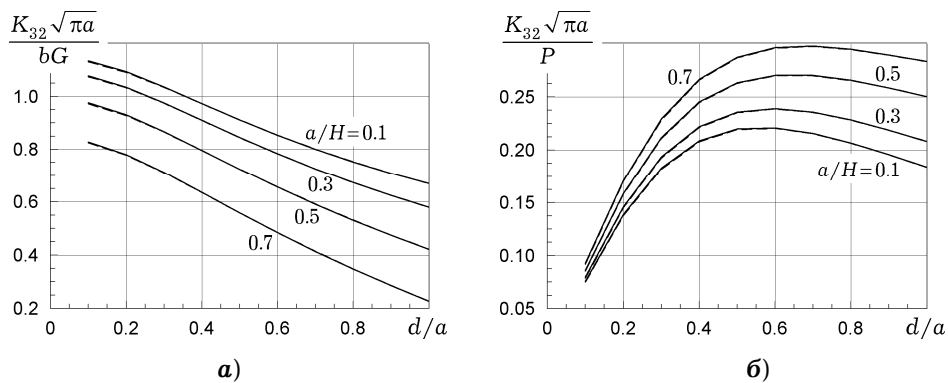


Рис. 5

За дії зосереджених сил значення УКІН K_{32} зростають зі збільшенням відносної довжини включення a/H . Зі збільшенням відстані від цих сил до поверхні неоднорідності УКІН спочатку зростають, а потім поволі зменшуються. Дійсно, коли зосереджені сили розташовані поблизу центральної частини поверхні жорсткого включення, то навантаження практично повністю сприймається невеликими ділянками неоднорідності, віддаленими від її вістря. Тому й УКІН K_{32} за малого відношення d/a є малим. Зі збільшенням відстані d неоднорідність все повніше сприймає прикладене навантаження, але до певної межі, після якої вплив зосередженого чинника на основі принципу Сен-Венана починає нівелюватися.

Висновки. Розроблені два підходи вивчення антиплоскої деформації тіл із тріщинами та жорсткими включеннями за дії зосереджених чинників засвідчили свою високу точність та ефективність при розгляді конкретних задач. Використання підходу Вольтерра дало можливість врахувати в тождності Сомільяни наявність у тілі гвинтових дислокацій і побудувати на її основі інтегральні співвідношення методу граничних елементів для відповідних задач. Мала розбіжність між результатами, отриманими за допомо-

гою МГЕ і МППВ, у свою чергу, засвідчила високу ефективність останнього, оскільки МГЕ давно зарекомендував себе як ефективний і доволі точний числовий підхід аналізу навіть тих задач, що мають сингулярний розв'язок.

При дослідженні обмежених тіл на прикладі антиплоского деформування квадратної в перерізі призми з центральною неоднорідністю простежено такі тенденції: збільшення відносних розмірів тріщини зумовлює збільшення КІН за дії зосереджених сил; наближення зосереджених сил до поверхні тріщини також спричинює зростання КІН; збільшення відносних розмірів жорсткого включення зумовлює зменшення КІН за дії гвинтових дислокацій; наближення дислокацій до поверхні включення також спричинює зниження КІН.

1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – 945 с.
2. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
3. Васільєв К. В., Сулим Г. Т. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування // *Машинознавство*. – 2006. – № 11-12. – С. 10-17.
4. Васільєв К. В., Сулим Г. Т. Розв'язування інтегральних рівнянь задач для шаруватих середовищ із довільно орієнтованими стрічковими неоднорідностями методом колокацій // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика*. – 2009. – Вип. 15. – С. 157-169.
5. Васільєв К., Пастернак Я., Сулим Г. Антиплоска деформація квадратного в плані тіла з внутрішньою тонкою неоднорідністю // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2010. – Вип. 73. – С. 165-176.
6. Панасюк В. В. Механіка квазіхрупкого руйнування матеріалів. – Київ: Наук. думка, 1991. – 416 с.
7. Саврук М. П., Осечко А. М. Поздовжній зсув безмежного тіла із системою ламаних тріщин // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2003. – **39**, № 5. – С. 49-58.
Те саме: *Savruk M. P., Osechko A. M. Longitudinal shear of an infinite body with a system of polygonal cracks // Mater. Sci.* – 2003. – **39**, No. 5. – С. 658-671.
8. Сулим Г. Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // *Прикл. математика и механика*. – 1981. – **45**, № 2. – С. 308-318.
9. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термпружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
10. Gdoutos E. E. Failure of a composite with a rigid fiber inclusion // *Acta mech.* – 1981. – **39**, No. 3-4. – P. 251-262.
11. Gdoutos E. E. *Fracture mechanics*. – Dordrecht: Springer, 2005. – 369 p.
12. Pan E., Amadei B. Fracture mechanics analysis of 2D anisotropic media with a new formulation of the boundary element method // *Int. J. Fracture*. – 1996. – **77**. – P. 161-174.
13. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2011. – **35**, No. 4. – P. 678-690.
14. Pasternak Ia. M., Sulym H. T. Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure // *Proc. Int. Conf. «Integral Equations-2010» (25-27 August 2010, Lviv)*. – Lviv: PAIS, 2010. – P. 104-108.
15. Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1992. – **33**. – P. 1269-1287.
16. Wei-Liang Wu. Dual boundary element method applied to antiplane crack problems // *Math. Problems in Engng.* – 2009. – Article ID 132980, 10 pages, 2009. doi:10.1155/2009/132980.
17. Zhang X. S. A tearing mode crack located anywhere in a finite rectangular sheet // *Eng. Fract. Mech.* – 1989. – **33**, No. 4. – P. 509-516.

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ФАКТОРАМИ ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ И ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Для решения задач антиплоского деформирования сосредоточенными факторами ограниченных тел с тонкостенными дефектами предложено два подхода. Первый – численный на основе метода граничных элементов, в котором для учета действия винтовых дислокаций развит подход Вольтерра, а для определения коэффициентов интенсивности напряжения введены специальные концевые граничные элементы. Второй – аналитически-численный метод прямого полного вырезания, в котором ограниченные тела моделируются с помощью пространства с системой контактирующих между собой неоднородностей, причем в точках контакта действуют некоторые наперед неизвестные сосредоточенные силы и дислокации, что позволяет существенно повысить точность расчетов при небольшом размере результирующей системы уравнений. Рассмотрены конкретные числовые примеры для квадратного в плане тела (бруса) с трещиной или жестким включением при действии сосредоточенных сил и винтовых дислокаций.

ANTIPLANE DEFORMATION BY CONCENTRATED FACTORS OF FINITE SOLIDS WITH CRACKS AND RIGID INCLUSIONS

For solution of the problems on antiplane deformation of finite solids with thin-walled defects under the action of concentrated factors two approaches are proposed. The first is a numerical one based on the boundary element method, which accounts for the action of screw dislocations by extending the Volterra approach, and introduces special tip boundary elements for determination of the stress intensity factors. The second is an analytic-numeric method of direct full cutting, which models finite solids as a medium with a system of contacting inhomogeneities, and at contact points certain a priori unknown concentrated forces and dislocations are acting that allows increasing the accuracy significantly at small size of a resultant system of equations. Particular numerical examples are considered for a solid with square cross-section (a bar) with a tape-like crack or a rigid inclusion under the action of concentrated forces and screw dislocations.

¹ Луцкий нац. техн. ун-т НАН України, Луцьк,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

³ Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
29.04.11