УДК 539.3

Світлій пам'яті мого вчителя
В'ячеслава Володимировича Мелешка

Ю. В. Токовий

ЗВЕДЕННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано підхід до побудови аналітичного розв'язку тривимірної задачі теорії пружності для однорідного ізотропного суцільного циліндра, що стискається нормальними зовнішніми зусиллями на торцях. Бічна поверхня циліндра приймається вільною від силових навантажень. Для визначення компонент тензора напружень використано подання через гармонічні функції Дуголла. На основі методу суперпозиції задачу про визначення коефіцієнтів в отриманих виразах зведено до нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь.

1. Вступ. Завдяки широкому застосуванню у техніці, машинобудуванні та інших інженерно-технічних й енергетичних галузях елементів конструкцій у формі кругових циліндрів, підвищенню вимог до їх надійності, міцності, зниження вартості й матеріаломісткості вивчення пружної рівноваги такого класу об'єктів під дією силових чи теплових навантажень було і залишається важливою задачею механіки деформівного твердого тіла. Серед таких задач особливі складнощі становить проблема побудови аналітичних розв'язків задач теорії пружності та термопружності для циліндрів скінченної довжини. У багатьох випадках, з огляду на осьову симетрію навантаження чи закріплення, загальні тривимірні задачі для кругових циліндрів зводяться до двовимірних осесиметричних задач, які виявляються значно простішими з точки зору побудови їх аналітичних розв'язків. На сьогодні відомі різноманітні підходи до побудови розв'язків осесиметричних задач теорії пружності та термопружності для безмежно видовжених та скінченних циліндрів (див. [3–7, 9]). Натомість задачі про визначення пружної рівноваги скінченного циліндра у тривимірному випадку вивчено значно гірше.

Відомі на сьогодні розв'язки тривимірних задач для скінченного циліндра здебільшого мають наближений характер і побудовані з використанням загальних розв'язків для безмежних тіл [6, 8, 13, 14, 18]. У роботах [10–12] запропоновано підхід до побудови розв'язку тривимірної задачі теорії пружності для суцільного й порожнистого циліндрів скінченної довжини, навантажених по бічних поверхнях і з вільними від силових навантажень торцями. Компоненти вектора напружень запропоновано у вигляді суми двох складових. З використанням гармонічних функцій Дуґолла (J. Dougall [13]) перша з них задається у вигляді подвійних рядів Фур'є за осьовою та коловою координатами, залежні від радіальної координати коефіцієнти яких тотожно задовольняють рівняння Ляме і дозволяють виконати крайові умови на бічних поверхнях. Для компенсації першої складової розв'язку на торцях циліндра використовується друга складова, яку для кожної компоненти вектора переміщень штучно підібрано у вигляді поліномів від радіальної та осьової змінної, помножених на одну з гармонік Фур'є за коловою координатою. Кожен з таких поліномів містить шість вільних сталих, три з яких використовують, щоб задовольнити рівняння Ляме, а решту – щоб забезпечити виконання заданих крайових умов на торцях циліндра. Такий підхід є цікавим з точки зору інженерної механіки, оскільки дозволяє відносно просто прогнозувати тривимірний напружений стан скінченного циліндра. Однак його застосування для інших класів задач, зокрема, коли торці циліндра є закріпленими або навантаженими, є проблематичним, оскільки поліноміальний розподіл напружень не дає можливості адекватно оцінити згасання напруженого стану з віддаленням від торця, а отже, дослідити вплив самозрівноважених торцевих навантажень.

Вплив торців на тривимірний напружений стан пружного суцільного циліндра розглянуто у роботі [22] з використанням методу однорідних розв'язків. Сформульована задача стосується вивчення напруженого стану циліндра з вільною від силових навантажень бічною поверхнею, торці якого зазнають планарного зсуву (переміщення на торцях пропорційні першій гармоніці ряду Фур'є за коловою координатою). Оскільки однорідні розв'язки задачі виражаються через комплексні неортогональні власні функції, для знаходження сталих коефіцієнтів, які забезпечували би виконання крайових умов, застосовано стандартний для методу однорідних розв'язків підхід, що полягає у застосуванні так званої біортогональної системи. У результаті задачу зведено до безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення сталих коефіцієнтів, яку розв'язано за допомогою методу Гальоркіна з використанням методики діагонально-домінантних розв'язків [17]. У роботі [23] тим же способом досліджено напружений стан циліндра із защемленим торцем. У роботі [15] за допомогою аналогічного підходу досліджено розподіли самозрівноважених напружень біля торця пружно-пластичного циліндра.

У роботі [20] на основі подання розв'язку Еллiотта (H. A. Elliott [16]) і Лоджа (A. S. Lodge [19]) та підходу [21] отримано вирази для потенціальних гармонічних функцій, через які виражаються компоненти тензора напружень тривимірної задачі для суцільного скінченного циліндра. Однак самі вирази для напружень, а також числові приклади для тривимірного випадку, на жаль, не наведено. При цьому найскладнішим питанням цього подання, на наш погляд, є вибір власних значень відповідних систем функцій, від яких, в кінцевому рахунку, залежить ефективність задоволення крайових умов.

Використовуючи подання розв'язку через три гармонічні функції, в [1, 2] запропоновано підхід до побудови розв'язку тривимірної задачі теорії пружності для циліндра скінченної довжини із крайовими умовами в термінах переміщень. На основі методу суперпозиції за схемою Ляме задачу визначення коефіцієнтів розвинень переміщень у подвійні ряди за осьовою та радіальною координатами зведено до нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь. Однак отримані системи виявляються доволі складними через не зовсім вдалий, на наш погляд, вибір власних значень фундаментальної системи функцій від радіальної координати. Значну увагу у цих роботах присвячено вивченню питання плеоназмів (зайвих з точки зору загальності елементів розв'язку).

Метою пропонованої роботи є розвиток відносно простого у практичному застосуванні та адекватного методу побудови аналітичного розв'язку тривимірної задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченної довжини. Для знаходження компонент тензора напружень використано подання через гармонічні функції Дуґолла [13, 14]. Отримані вирази для напружень містять достатню кількість ступенів свободи (вільних сталих) для задоволення крайових умов на повній поверхні циліндра. Для визначення цих сталих на основі крайових умов отримано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь, яку розв'язано методом простої редукції.

2. Постановка задачі. Розглянемо тривимірну задачу теорії пружності в напруженнях для суцільного ізотропного циліндра скінченної довжини $\mathfrak{C} = \{0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -h \le z \le h\}$. Тут r, θ, z − система безрозмірних циліндричних координат, a, h − безрозмірні параметри. За відсутності масових сил ця задача описується [6] рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \tag{1}$$

та суцільності в напруженнях

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = 0\,,$$

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\sigma_r - \frac{4}{r^2}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta)\right) + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} = 0\,,$$

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\sigma_\theta + \frac{4}{r^2}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} = 0\,,$$

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\tau_{\theta z} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2}\tau_{\theta z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta \partial z} = 0\,,$$

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\tau_{rz} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2}\tau_{rz}\right) + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} = 0\,,$$

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\tau_{r\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{4}{r^2}\tau_{r\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right) = 0\,. \tag{2}$$

Тут σ_j, τ_{ij} − компоненти тензора напружень, $\{i,j\} = \{r,\theta,z\}$, $i \ne j$; ν − коефіцієнт Пуассона; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ − оператор Лапласа в циліндричній системі координат. На торцях циліндра $\mathfrak{C}$ задано однакові нормальні зовнішні навантаження:

$$\sigma_z(r,\theta,\pm h) = g(r,\theta), \qquad \tau_{rz}(r,\theta,\pm h) = 0, \qquad \tau_{\theta z}(r,\theta,\pm h) = 0\,, \tag{3}$$

а бічна поверхня є вільною від силових навантажень:

$$\sigma_r(a,\theta,z) = 0, \qquad \tau_{r\theta}(a,\theta,z) = 0, \qquad \tau_{rz}(a,\theta,z) = 0\,. \tag{4}$$

Для спрощення викладу припускаємо, що зусилля $g(r,\theta)$ є парною функцією кутової координати. Очевидно, що за такого навантаження циліндр перебуває у стані статичної рівноваги.

3. Побудова розв'язку. Для визначення компонент тензора напружень використаємо метод суперпозиції. З цією метою подамо їх у вигляді

$$f = f_0 + f^I + f^{II}\,, \tag{5}$$

де через f позначено будь-яку з компонент тензора напружень, нижнім індексом «0» позначено елементарну складову напружень, а верхніми індексами «I» та «II» − складові напружень, які дають змогу задовольнити крайові умови відповідно на бічній поверхні та торцях циліндра.

Для визначення складових «I» напружень застосуємо подання Дуґолла [14, с. 900], яке з урахуванням фізичних співвідношень [6] запишемо для напружень:

$$\frac{\sigma_r^I}{G} = 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi^I) - 2\nu\varphi^I\right) + 2\frac{\partial^2 \omega^I}{\partial r^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^I}{\partial \theta}\right),$$

$$\frac{\sigma_\theta^I}{G} = 2(1-2\nu)\frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 \omega^I}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \omega^I}{\partial r} - 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^I}{\partial \theta}\right),$$

$$\frac{\sigma_z^I}{G} = -4(2-\nu)\frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} - 2r\frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial r \partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \omega^I}{\partial z^2}\,,$$

$$\frac{\tau^I_{rz}}{G} = \frac{\partial}{\partial z}\left(2r\frac{\partial^2\varphi^I}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi^I}{\partial\theta^2} - 4(1-\nu)\frac{\partial\varphi^I}{\partial r}\right) + 2\frac{\partial^2\omega^I}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi^I}{\partial\theta\partial z},$$

$$\frac{\tau^I_{r\theta}}{G} = \frac{\partial^3\varphi^I}{\partial\theta\partial z^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega^I}{\partial\theta}\right) - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi^I}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi^I}{\partial\theta^2},$$

$$\frac{\tau^I_{\theta z}}{G} = \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}\left(\frac{2\omega^I}{r} - \frac{\partial\varphi^I}{\partial r} - 4\frac{1-\nu}{r}\varphi^I\right) - \frac{\partial^2\psi^I}{\partial r\partial z}. \tag{6}$$

Тут G − модуль зсуву, а функції $\varphi^I(r,\theta,z)$, $\omega^I(r,\theta,z)$, $\psi^I(r,\theta,z)$ є гармонічними, тобто задовольняють рівняння

$$\nabla^2\varphi^I = 0, \qquad \nabla^2\omega^I = 0, \qquad \nabla^2\psi^I = 0. \tag{7}$$

Прийнявши до уваги симетричний спосіб навантаження циліндра, розвинемо гармонічні функції $\varphi^I(r,\theta,z)$, $\omega^I(r,\theta,z)$, $\psi^I(r,\theta,z)$ у ряди Фур'є за повними тригонометричними системами за коловою та осьовою координатами. Відокремивши таким чином змінні у рівняннях (7), знаходимо вирази для функцій Дуґолла у наступному вигляді:

$$\begin{Bmatrix}\varphi^I\\ \omega^I\\ \psi^I\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}A^I_0\\ C^I_0\\ 0\end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}B^I_n\\ D^I_n\\ 0\end{Bmatrix}\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}\cos k_n z + \sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}A^I_m\cos m\theta\\ C^I_m\cos m\theta\\ E^I_m\sin m\theta\end{Bmatrix} r^m +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}B^I_{nm}\cos m\theta\\ D^I_{nm}\cos m\theta\\ F^I_{nm}\sin m\theta\end{Bmatrix}\frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)}\cos k_n z, \tag{8}$$

де $k_n = n\pi/h$; I_m, $m = 0,1,2,\ldots$, − модифіковані функції Бесселя першого роду порядку m; A^I_0, C^I_0, A^I_m, C^I_m, E^I_m, B^I_n, D^I_n, B^I_{nm}, D^I_{nm}, F^I_{nm} − невідомі коефіцієнти. Підставивши вирази (8) у формули (6), знайдемо компоненти тензора напружень (для скорочення запису тут не наводимо виразу для колової складової, оскільки ці напруження не задіяні у крайових умовах):

$$\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}\sigma^I_r\\ \sigma^I_z\end{Bmatrix} = 2\sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)(C^I_m + E^I_m)r^{m-2}\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}\cos m\theta +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}\sigma^I_{r,n}\\ \sigma^I_{z,n}\end{Bmatrix}\cos k_n z + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}\sigma^I_{r,nm}\\ \sigma^I_{z,nm}\end{Bmatrix}\cos m\theta\cos k_n z,$$

$$\frac{\tau^I_{rz}}{G} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau^I_{rz,n}\sin k_n z + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tau^I_{rz,nm}\cos m\theta\sin k_n z,$$

$$\frac{\tau^I_{\theta z}}{G} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tau^I_{\theta z,nm}\sin m\theta\sin k_n z,$$

$$\frac{\tau^I_{r\theta}}{G} = -2\sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)(C^I_m + E^I_m)r^{m-2}\sin m\theta +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tau^I_{\theta z,nm}\sin m\theta\cos k_n z. \tag{9}$$

Вирази для коефіцієнтів розвинень (9) наведено у ***Додатку* А**.

Для визначення складових «II» розв'язку (5) скористаємося поданням Дуґолла [13, с. 141]:

$$\frac{\sigma_r^{II}}{G} = 2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left((3-4\nu)\varphi^{II} + 2z\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + \omega^{II}\right) - 8\nu\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} + 4\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{\psi^{II}}{r}\right),$$

$$\frac{\sigma_\theta^{II}}{G} = \frac{\partial}{\partial r}\left((8\nu - 6)\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial r} - 4\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\psi^{II}}{r}\right)\right) - 6\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{4z}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial r}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\partial \omega^{II}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial \theta^2}\right),$$

$$\frac{\sigma_z^{II}}{G} = 4z\frac{\partial^3 \varphi^{II}}{\partial z^3} + 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\omega^{II} - \varphi^{II}),$$

$$\frac{\tau_{rz}^{II}}{G} = 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + 2z\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2}\right) + 2\frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial \theta \partial z},$$

$$\frac{\tau_{r\theta}^{II}}{G} = 2\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left((3-4\nu)\frac{\varphi^{II}}{r} + \frac{2z}{r}\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + \frac{\omega^{II}}{r}\right) - 4\frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial z^2},$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^{II}}{G} = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + 2z\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial \theta \partial z} - 2\frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial r \partial z}, \qquad (10)$$

де $\varphi^{II}, \omega^{II}, \psi^{II}$ – гармонічні функції. Враховуючи необхідність задоволення напруженнями (10) крайових умов на торцях циліндра, знаходимо

$$\begin{Bmatrix} \varphi^{II} \\ \omega^{II} \\ \psi^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0^{II} \\ C_0^{II} \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} B_0^{II} \\ D_0^{II} \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_{0j}^{II} \\ C_{0j}^{II} \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_{mj}^{II} \cos m\theta \\ C_{mj}^{II} \cos m\theta \\ E_{mj}^{II} \sin m\theta \end{Bmatrix} \frac{\operatorname{ch} \mu_{mj} z}{\operatorname{sh} \mu_{mj} h} \frac{J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)}. \qquad (11)$$

Тут μ_{mj} – корені рівняння $\left.\frac{dJ_m(\mu r)}{dr}\right|_{r=a} = 0$; $\lambda_j \equiv \mu_{0j}$; A_0^{II}, B_0^{II}, C_0^{II}, D_0^{II}, A_{0j}^{II}, C_{0j}^{II}, A_{mj}^{II}, C_{mj}^{II}, E_{mj}^{II} – невідомі коефіцієнти; J_m – функції Бесселя першого роду m-го порядку. Коефіцієнти μ_{mj}, $m, j = 1, 2, \ldots$, забезпечують виконання рівності

$$\mu_{mj} a J_{m\pm1}(\mu_{mj} a) = m J_m(\mu_{mj} a). \qquad (12)$$

Підстановкою (11) у (10) знаходимо

$$\frac{\sigma_r^{II}}{G} = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sigma_{r,j}^{II,1}(z)\frac{\lambda_j}{r}\frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} - \sigma_{r,j}^{II,2}(z)\frac{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sigma_{r,mj}^{II,1}(z)\frac{\mu_{mj}^2 J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} + \right.$$

$$\left. + \sigma_{r,mj}^{II,2}(z)\frac{\mu_{mj}}{r}\frac{J_{m+1}(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)}\right]\cos m\theta,$$

$$\frac{\sigma_z^{II}}{G} = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{z,j}^{II}(z) \frac{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{r,mj}^{II}(z) \frac{\mu_{mj}^2 J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} \cos m\theta ,$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^{II}}{G} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[-\tau_{\theta z,mj}^{II,1}(z) \frac{m\mu_{mj} J_m(\mu_{mj} r)}{r J_m(\mu_{mj} a)} + \right.$$

$$\left. + \tau_{\theta z,mj}^{II,2}(z) \frac{\mu_{mj}^2 J_{m+1}(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} \right] \sin m\theta ,$$

$$\frac{\tau_{rz}^{II}}{G} = -\sum_{j=1}^{\infty} \tau_{rz,j}^{II}(z) \frac{\lambda_j^2 J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\tau_{rz,mj}^{II,1}(z) \frac{m\mu_{mj} J_m(\mu_{mj} r)}{r J_m(\mu_{mj} a)} - \right.$$

$$\left. - \tau_{rz,mj}^{II,2}(z) \frac{\mu_{mj}^2 J_m(\mu_{mj} r)}{r J_m(\mu_{mj} a)} \right] \cos m\theta ,$$

$$\frac{\tau_{r\theta}^{II}}{G} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[-\tau_{r\theta,mj}^{II,1}(z) \frac{J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} + \tau_{r\theta,mj}^{II,2}(z) \frac{\mu_{mj} J_{m+1}(\mu_{mj} r)}{r J_m(\mu_{mj} a)} \right] \sin m\theta , \quad (13)$$

коефіцієнти яких наведено у ***Додатку* А**.

Елементарні частини напружень, що відповідають навантаженням (3), (4), нескладно знайти у вигляді

$$\sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = \tau_{rz}^0 = \tau_{\theta z}^0 = \tau_{r\theta}^0 = 0, \qquad \sigma_z^0 = \sigma_0 = \text{const} . \quad (14)$$

Можна переконатися, що частини напружень у вигляді (5), (9), (13), (14), які не залежать від колової координати, співпадають з точністю до позначення констант із розв'язком осесиметричної задачі для скінченного циліндра [7], отриманими за допомогою бігармонічної функції Лява. Тому надалі обмежимося вивченням лише залежних від колової координати напружень.

Задовольняючи однорідну крайову умову (3) на торцях циліндра для залежної від колової координати складової дотичних напружень τ_{rz}, поданої у вигляді (5), з урахуванням (9), (13) отримуємо наступне співвідношення між коефіцієнтами:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[(A_{mj}^{II}(1 + 2\mu_{mj} h \operatorname{cth} \mu_{mj} h) + C_{mj}^{II}) \mu_{mj} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m\mu_{mj}}{r} E_{mj}^{II} \frac{J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} \right] = 0 . \quad (15)$$

Аналогічно, задовольнивши крайову умову (3) для $\tau_{\theta z}$, отримаємо рівність

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[(A_{mj}^{II}(1 + 2\mu_{mj} h \operatorname{cth} \mu_{mj} h) + C_{mj}^{II}) \frac{m\mu_{mj}}{r} \frac{J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} + \right.$$

$$\left. + \mu_{mj} E_{mj}^{II} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} \right) \right] = 0 . \quad (16)$$

Розглянувши суму та різницю формул (15) і (16), нескладно виявити наступні співвідношення:

$$E_{mj}^{II} = 0, \qquad C_{mj}^{II} = -A_{mj}^{II}(1 + 2\mu_{mj} h \operatorname{cth} \mu_{mj} h) . \quad (17)$$

Задоволення крайової умови (4) для напружень τ_{rz} на бічній поверхні циліндра з урахуванням (17) забезпечує виконання наступного співвідношення:

$$m\ell_{nm}F_{nm}^{I} = ((m^2 + 2k_n^2a^2)\ell_{nm} + 4(1-\nu)\gamma_{nm})B_{nm}^{I} - 2\gamma_{nm}D_{nm}^{I}\,, \qquad (18)$$

де позначено $\gamma_{nm} = m\ell_{nm} + k_na$ і $\ell_{nm} = I_m(k_na)/I_{m+1}(k_na)$.

Задовольняючи однорідні крайові умови (4) для напружень $\tau_{r\theta}$ з урахуванням (12), (17) та формул (**В**1) і (**В**2) ***Додатку* В**, отримуємо рівності

$$(m-1)a^m(C_m^I + E_m^I) + \frac{4\nu}{h}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_{mj}^{II}}{\mu_{mj}} = 0\,,$$

$$m\ell_{nm}k_n^2a^2B_{nm}^I - 2m(\gamma_{nm} - \ell_{nm})D_{nm}^I - ((2m^2 + k_n^2a^2)\ell_{nm} - 2\gamma_{nm})F_{nm}^I +$$

$$+16m\frac{(-1)^n}{h}\sum_{j=1}^{\infty}\mu_{mj}A_{mj}^{II}\frac{k_n^2(1-\nu) - \nu\mu_{mj}^2}{(k_n^2 + \mu_{mj}^2)^2} = 0\,. \qquad (19)$$

Аналогічно, задоволення крайових умов (4) для радіальних напружень σ_r вимагає виконання наступних рівностей:

$$(m-1)a^m(C_m^I + E_m^I) - \frac{4\nu m}{h}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_{mj}^{II}}{\mu_{mj}} = 0\,,$$

$$m(\gamma_{nm} - \ell_{nm})F_{nm}^I + ((m^2 + k_n^2a^2)\ell_{nm} - \gamma_{nm})D_{nm}^I -$$

$$- k_n^2a^2(\gamma_{nm} + (1-2\nu)\ell_{nm})B_{nm}^I +$$

$$+\frac{8(-1)^n}{h}\sum_{j=1}^{\infty}\mu_{mj}A_{mj}^{II}\frac{m^2(k_n^2 - \nu(k_n^2 + \mu_{mj}^2)) - k_n^2a^2\mu_{mj}^2}{(k_n^2 + \mu_{mj}^2)^2} = 0\,. \qquad (20)$$

З перших рівнянь (19) і (20) випливають рівності

$$C_m^I + E_m^I = 0, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_{mj}^{II}}{\mu_{mj}} = 0\,, \qquad (21)$$

друга з яких повинна виконуватися тотожно внаслідок виконання умови рівноваги зовнішніх навантажень (3), (4).

Нарешті, задовольняючи крайові умови (3) для осьових напружень σ_z з урахуванням формул (**В**3) і (**В**4), отримуємо наступне рівняння:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^n k_n^2}{(\mu_{mj}^2a^2 - m^2)(k_n^2 + \mu_{mj}^2)^2}\Big[\{(2(1-\nu)\gamma_{nm} +$$

$$+ (m^2 + k_n^2a^2)\ell_{nm})(k_n^2 + \mu_{mj}^2) + 2\gamma_{nm}\mu_{mj}^2\}B_{nm}^I -$$

$$- \gamma_{nm}(k_n^2 + \mu_{mj}^2)D_{nm}^I\Big] - \Delta_{mj}A_{mj}^{II} = \frac{g_{mj}}{4\mu_{mj}^2}\,, \qquad (22)$$

де

$$\Delta_{mj} = \operatorname{cth}\mu_{mj}h + \frac{\mu_{mj}h}{\operatorname{sh}^2\mu_{mj}h}\,,$$

$$g_{mj} = \frac{2\mu_{mj}^2}{\pi(\mu_{mj}^2a^2 - m^2)J_m(\mu_{mj}a)}\int_0^a\int_0^{2\pi} rg(r,\theta)J_m(\mu_{mj}r)\cos m\theta\,dr\,d\theta\,.$$

Таким чином, визначення напруженого стану суцільного скінченного циліндра $\mathfrak{C}$, навантаженого зусиллями (3), (4), зводиться до відшукання наборів вільних сталих B^{I}_{nm}, D^{I}_{nm}, $n = 1, 2, \ldots$, A^{II}_{mj}, $j = 1, 2, \ldots$, на основі нескінченних систем рівнянь (19), (20), (22) для кожного $m = 1, 2, \ldots$ з урахуванням рівностей (17), (18). Найпростішим способом розв'язання такої системи рівнянь є метод простої редукції, який полягає у розв'язанні скінченної системи рівнянь, отриманої з вихідної нескінченної системи шляхом відкидання членів і рівнянь для номерів $n > N$, $j > J$, де N та J – значення відповідних індексів, які підбираємо з числового експерименту. Розглянемо застосування цього підходу для числового прикладу.

Числовий приклад та обговорення. Розглянемо приклад розрахунку напруженого стану циліндра $\mathfrak{C}$, виготовленого з матеріалу з $\nu = 1/3$, при $a = h = 1$ за навантаження

$$g(r, \theta) = \bar{g} r^2 \cos 4\theta, \tag{23}$$

де $\bar{g}$ – сталий параметр розмірності напружень.

На рис. 1 наведено розподіл осьових напружень, обчислених при $N = J = 100$ для $\theta = 0$. Як бачимо, напруження відносно добре задовольняють крайові умови і згасають з віддаленням від торців внаслідок рівності нулеві головних вектора та моменту зовнішніх зусиль (23).

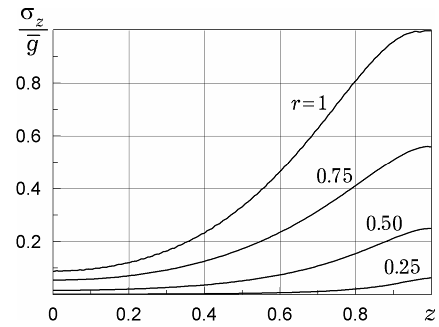

Рис. 1. Розподіл осьових напружень за осьовою координатою у циліндрі $a = h = 1$ за силового навантаження (23).

Точність, яку забезпечує використання методу простої редукції, характеризує табл. 1, у якій наведено значення осьових напружень на торці циліндра у порівнянні із точними значеннями функції $g(r, \theta) / \bar{g}$ для різних N та J. Як бачимо, цей підхід забезпечує прийнятну точність виконання крайових умов, окрім ребра циліндра, де відхилення від точного значення становить $30\,\%$ і практично не зменшується зі збільшенням значень N та J (на рис. 1 цього відхилення не видно внаслідок близькості до ребра). При цьому друга з рівностей (21) задовольняється з точністю до 10^{-3}.

Таблиця 1. Залежність точності задоволення крайових умов осьовими напруженнями $\sigma_z/\bar{g}$ від значень N та J.

	$r = 0.00$	$r = 0.25$	$r = 0.50$	$r = 0.75$	$r = 1.00$
$\theta = 0$					
$g(r, \theta) / \bar{g}$	0.0000	0.0625	0.2500	0.5625	1.0000
$N = J = 30$	0.0000	0.0562	0.2462	0.5592	0.6975
$N = J = 60$	0.0000	0.0656	0.2517	0.5569	0.6938
$N = J = 100$	0.0000	0.0645	0.2509	0.5591	0.6923
$\theta = \pi/16$					
$g(r, \theta) / \bar{g}$	0.0000	0.0442	0.1767	0.3977	0.7071
$N = J = 30$	0.0000	0.0397	0.1741	0.3955	0.4932
$N = J = 60$	0.0000	0.0464	0.1780	0.3938	0.4956
$N = J = 100$	0.0000	0.0456	0.1774	0.3953	0.4996

Висновки. У роботі розглянуто застосування методу суперпозиції до побудови розв'язку тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра за нормального навантаження торців. Із використанням гармонічних функцій Дуґолла знайдено вирази для напружень, які тотожно задовольняють вихідні рівняння задачі і містять достатню кількість вільних сталих для задоволення крайових умов на торцях і бічній поверхні циліндра. Для визначення цих сталих отримано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь, яку розв'язано з використанням алгоритму простої редукції. Застосування цього алгоритму дозволяє знайти адекватний розв'язок усередині циліндра та на границі на певній відстані від ребер. Однак точність задоволення крайових умов у ребрі виявляється неприйнятною. Очевидно, це пов'язано із неадекватністю алгоритму простої редукції, замість якого мають застосовуватися більш точні підходи, зокрема, алгоритм удосконаленої редукції [7]. Розвиток такого підходу буде метою подальших досліджень.

***Додаток* А**

$$\sigma^I_{r,n} = 2k_n^2\left[(D_n^I - (1-2\nu)B_n^I)\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} - \frac{D_n^I + k_n^2 r^2 B_n^I}{k_n r}\frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)}\right],$$

$$\sigma^I_{r,nm} = \frac{2}{r^2}\left[(m(m-1)(F^I_{nm} + D^I_{nm}) + k_n^2 r^2 D^I_{nm} - \right.$$

$$- k_n^2 r^2 (m+1-2\nu)B^I_{nm})\frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} +$$

$$\left. + k_n r(mF^I_{nm} - D^I_{nm} - k_n^2 r^2 B^I_{nm})\frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)}\right],$$

$$\sigma^I_{z,n} = 2k_n^2\left[\left(2(2-\nu)\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} + k_n r\frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)}\right)B_n^I - \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}D_n^I\right],$$

$$\sigma^I_{z,nm} = 2k_n^2\left[\left((m+4-2\nu)\frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} + k_n r\frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)}\right)B^I_{nm} - \right.$$

$$\left. - \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)}D^I_{nm}\right],$$

$$\tau^I_{rz,n} = 2k_n^2\left[B_n^I k_n r\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} - (D_n^I - 2(1-\nu)B_n^I)\frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)}\right],$$

$$\tau^I_{rz,nm} = k_n^2\left[\left(2k_n r B^I_{nm} + ((m+4-4\nu)B^I_{nm} - F^I_{nm} - 2D^I_{nm})\frac{m}{k_n r}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} - 2(D^I_{nm} - 2(1-\nu)B^I_{nm})\frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)}\right],$$

$$\tau^I_{\theta z,nm} = k_n^2\left[(2D^I_{nm} - (m+4-4\nu)B^I_{nm} + F^I_{nm})\frac{m}{k_n r}\frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} + \right.$$

$$\left. + (F^I_{nm} - mB^I_{nm})\frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)}\right],$$

$$\tau^{I}_{r\theta,nm} = k_n^2 m B^I_{nm} \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} - 2mD^I_{nm}\left(\frac{k_n}{r}\frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} + \frac{m-1}{r^2}\frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)}\right) -$$

$$- F^I_{nm}\left(\frac{k_n^2 r^2 + 2m(m-1)}{r^2}\frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} - \frac{2k_n}{r}\frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)}\right),$$

$$\sigma^{II,1}_{r,j}(z) = 2(C^{II}_{0j} + (3-4\nu)A^{II}_{0j})\frac{\operatorname{ch}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h} + 4\lambda_j z A^{II}_{0j}\frac{\operatorname{sh}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h},$$

$$\sigma^{II,2}_{r,j}(z) = 2(C^{II}_{0j} + 3A^{II}_{0j})\frac{\operatorname{ch}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h} + 4\lambda_j z A^{II}_{0j}\frac{\operatorname{sh}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h},$$

$$\sigma^{II,1}_{r,mj}(z) = 2\left(\frac{m(m-1)}{\mu^2_{mj} r^2}(2E^{II}_{mj} + (3-4\nu)A^{II}_{mj} + C^{II}_{mj}) - 3A^{II}_{mj} - C^{II}_{mj}\right)\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h} +$$

$$+ 4\mu_{mj} z A^{II}_{mj}\left(\frac{m(m-1)}{\mu^2_{mj} r^2} - 1\right)\frac{\operatorname{sh}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h},$$

$$\sigma^{II,2}_{r,mj}(z) = 2(C^{II}_{mj} - 2mE^{II}_{mj} + (3-4\nu)A^{II}_{mj})\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h} + 4\mu_{mj} z A^{II}_{mj}\frac{\operatorname{sh}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h},$$

$$\sigma^{II}_{z,j}(z) = 2(C^{II}_{0j} - A^{II}_{0j})\frac{\operatorname{ch}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h} + 4\lambda_j z A^{II}_{0j}\frac{\operatorname{sh}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h},$$

$$\sigma^{II}_{z,mj}(z) = 2(C^{II}_{mj} - A^{II}_{mj})\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h} + 4\mu_{mj} z A^{II}_{mj}\frac{\operatorname{sh}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h},$$

$$\tau^{II}_{rz,j}(z) = 2(A^{II}_{0j} + C^{II}_{0j})\frac{\operatorname{sh}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h} + 4\lambda_j z A^{II}_{0j}\frac{\operatorname{ch}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h},$$

$$\tau^{II,1}_{rz,mj}(z) = 2(A^{II}_{mj} + C^{II}_{mj} + E^{II}_{mj})\frac{\operatorname{sh}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h} + 4\mu_{mj} z A^{II}_{mj}\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h},$$

$$\tau^{II,2}_{rz,mj}(z) = 2(A^{II}_{mj} + C^{II}_{mj})\frac{\operatorname{sh}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h} + 4\mu_{mj} z A^{II}_{mj}\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h},$$

$$\tau^{II,1}_{\theta z,mj}(z) = 2(A^{II}_{mj} + C^{II}_{mj} + E^{II}_{mj})\frac{\operatorname{sh}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h} + 4\mu_{mj} z A^{II}_{mj}\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h},$$

$$\tau^{II,2}_{\theta z,mj}(z) = 2E^{II}_{mj}\frac{\operatorname{sh}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h},$$

$$\tau^{II,1}_{r\theta,mj}(z) = 2\left([C^{II}_{mj} + (3-4\nu)A^{II}_{mj} + 2E^{II}_{mj}]\frac{m(m-1)}{r^2} - \mu^2_{mj}E^{II}_{mj}\right)\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h} +$$

$$+ 4\mu_{mj} z A^{II}_{mj}\frac{m(m-1)}{r^2}\frac{\operatorname{sh}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h},$$

$$\tau^{II,2}_{r\theta,mj}(z) = 2(m(C^{II}_{mj} + (3-4\nu)A^{II}_{mj}) - 2E^{II}_{mj})\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h} +$$

$$+ 4m\mu_{mj} z A^{II}_{mj}\frac{\operatorname{sh}\mu_{mj} z}{\operatorname{sh}\mu_{mj} h}.$$

***Додаток* В**

В.1. *Розвинення функцій у ряди Фур'є за повною системою тригонометричних функцій* $1, \cos k_n z$, де $k_n = n\pi/h$, $n = 1, 2, \dots$:

$$\frac{\operatorname{ch}\lambda z}{\operatorname{sh}\lambda h} = \frac{1}{\lambda h} + \frac{2\lambda}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k_n^2+\lambda^2}\cos k_n z, \tag{В1}$$

$$z\frac{\operatorname{sh}\lambda z}{\operatorname{sh}\lambda h} + \left(\frac{1}{\lambda} - h\operatorname{cth}\lambda h\right)\frac{\operatorname{ch}\lambda z}{\operatorname{sh}\lambda h} = \frac{4}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n k_n^2}{(k_n^2+\lambda^2)^2}\cos k_n z. \tag{В2}$$

В.2. *Розвинення функцій у ряди Бесселя за повною системою функцій* $J_m(\mu_{mj} r)$, *де* m *– фіксований індекс* ($m = 1, 2, \dots$), μ_{mj} *– корені рівняння* $\left.\dfrac{dJ_m(\mu r)}{dr}\right|_{r=a} = 0$, $j = 1, 2, \dots$:

$$\frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} = 2\gamma_{nm}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu_{mj}^2}{(\mu_{mj}^2 a^2 - m^2)(k_n^2+\mu_{mj}^2)}\frac{J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)}, \tag{В3}$$

$$k_n r\frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} = 2k_n a(k_n a\ell_{nm} - m)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu_{mj}^2}{(\mu_{mj}^2 a^2 - m^2)(k_n^2+\mu_{mj}^2)}\frac{J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} -$$

$$- 4k_n^2\gamma_{nm}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu_{mj}^2}{(\mu_{mj}^2 a^2 - m^2)(k_n^2+\mu_{mj}^2)^2}\frac{J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)}. \tag{В4}$$

Тут $\gamma_{nm} = m\ell_{nm} + k_n a$, $\ell_{nm} = I_m(k_n a)/I_{m+1}(k_n a)$.

1. *Байда Э. Н.* Общие решения теории упругости и задачи о параллелепипеде и цилиндре. – Москва–Ленинград: Госстройиздат, 1961. – 63 с.
2. *Байда Э. Н.* Некоторые пространственные задачи теории упругости. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – 232 с.
3. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Точний розв'язок осесиметричної задачі пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
4. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
5. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
6. *Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. – Москва: Высш. шк., 1975. – 526 с.
7. *Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Дж. Р.* Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 120–137.
   Те саме: *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V., Barber J. R.* Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 5. – P. 646–669.
8. *Ревенко В. П.* Знаходження тривимірного напружено-деформованого стану циліндра, навантаженого на боковій поверхні // Доп. АН України. – 2006. – № 2. – С. 41–47.
9. *Соляник-Красса К. В.* Осесимметричная задача теории упругости. – Москва: Стройиздат, 1987. – 336 с.
10. *Сумцов В. С.* До питання про граничні умови на торцях пружного циліндра // Доп. АН УРСР. – 1957. – № 5. – С. 494–497.

11. *Сумцов В. С.* Про напружений стан циліндра конечної довжини // Прикл. механіка. – 1958. – **4,** № 4. – С. 433–441.
12. *Сумцов В. С.* К вопросу о напряженном состоянии упругого цилиндра конечной длины // Тр. Харьк. политехн. ин-та. Сер. инж.-физ. – 1959. – **25,** № 3. – С. 99–119.
13. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1904. – **41**, No. 8. – P. 129–228.
14. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1914. – **49**, No. 17. – P. 895–978.
15. *Durban D., Stronge W. J.* Diffusion of self-equilibrating end loads in a stretched elastoplastic circular cylinder // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1990. – **57**, No. 4. – P. 805–809.
16. *Elliott H. A.* Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1948. – **44,** No. 4. – P. 522–533.
17. *Gerhardt T. D., Cheng S.* A diagonally dominant solution for the cylinder end problem // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1981. – **48**. – P. 876–880.
18. *Hata K.* Some remarks on the three-dimensional problems concerned with the isotropic and anisotropic elastic solids // Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Univ. – 1956. – **10,** No. 2. – P. 129–177.
19. *Lodge A. S.* The transformation to isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1955. – **8,** No. 2. – P. 211–225.
20. *Okumura I. A.* Generalization of Elliott's solution to transversely isotropic solids and its application // Struct. Eng. / Earthquake Eng. – 1987. – **4,** No. 2. – P. 401s–411s.
21. *Okumura I., Onaka T.* An expression for solutions to three-dimensional elasticity problems in cylindrical and spherical coordinates // Struct. Eng. / Earthquake Eng. – 1986. – **3**, No. 2. – P. 185–194.
22. *Robert M., Keer L. M.* An elastic circular cylinder with displacement prescribed at the ends – asymmetric case // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1987. – **40**, No. 3. – P. 365–381.
23. *Robert M., Keer L. M.* Stiffness of an elastic circular cylinder of finite length // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**, No. 3. – P. 560–565.

СВЕДЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Предложен подход к построению аналитического решения трехмерной задачи теории упругости для однородного изотропного сплошного цилиндра, сжимаемого нормальными усилиями на торцах. Боковая поверхность цилиндра принимается свободной от силовых нагрузок. Для определения компонент тензора напряжений использованы представления через гармонические функции Дуголла. На основе метода суперпозиции задача определения коэффициентов рядов сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

REDUCTION OF 3D ELASTICITY PROBLEM FOR A FINITE-LENGTH SOLID CYLINDER TO SOLUTION OF SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

This paper is aimed on development of an analytical approach to solution of the three-dimensional elasticity problem for a finite-length solid isotropic cylinder subjected to normal compressive forces applied to its ends. The lateral surface of the cylinder is assumed to be free of the force loadings. For determination of the stress-tensor components, the Dougall's representation via the harmonic potential functions is employed. By making use of the method of cross-wise superposition, the problem on determination of the coefficients in the obtained series is reduced to an infinite system of linear algebraic equations.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.01.12