УДК 539.3

І. Ю. Подільчук

ПРО МАКСИМАЛЬНУ ПОХИБКУ ПРИ АПРОКСИМАЦІЇ НЕРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ВІД РЕЗОЛЬВЕНТНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

При побудові розв'язків задач лінійної теорії в'язкопружності виникає потреба у розшифруванні нераціональних функцій від резольвентних інтегральних операторів. У цій роботі отримано спосіб обчислення максимальної похибки за допомогою методу операторних ланцюгових дробів, що дозволяє оцінювати точність побудови розв'язків задач в'язкопружності. Наведено приклад обчислення похибки.

Для дослідження механічної поведінки конструкцій із композитних матеріалів при довготривалому навантаженні запропоновано різні підходи із [8–12, 16, 18]. Розв'язання широкого кола задач лінійної в'язкопружності, зокрема, квазістатичних задач для анізотропних матеріалів, на основі принципу Вольтерра зводиться до проблеми розшифрування нераціональних функцій від інтегральних резольвентних операторів [13, 14, 17, 18, 19]. Одним з способів розшифрування є метод операторних ланцюгових дробів [3–5, 15].

1. Основні формули перетворення та властивості резольвентних інтегральних операторів. Інтегральний оператор

$$R^*(\beta,t)g(t) = \int_0^t R(t-\tau,\beta)g(\tau)\,d\tau \tag{1}$$

є резольвентним, якщо існує такий оператор $P^*(t)$, що справджується рівність

$$[1-\beta P^*(t)]^{-1} = 1+\beta R^*(\beta,t). \tag{2}$$

Для резольвентних інтегральних операторів Вольтерра виконуються співвідношення обернення і розщеплення [1]

$$[1-\lambda R^*(\beta,t)]^{-1} = 1+\lambda R^*(\beta+\lambda,t), \tag{3}$$

$$R^*(\beta,t)R^*(\gamma,t) = \frac{R^*(\beta,t)}{\beta-\gamma}+\frac{R^*(\gamma,t)}{\gamma-\beta}. \tag{4}$$

Формула обернення для суми резольвентних операторів має вигляд [1]

$$\left[1-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j R^*(\beta_j)\right]^{-1} = 1+\sum_{j=1}^{n}\tilde\lambda_j R^*(\tilde\beta_j), \tag{5}$$

де $\tilde\beta_j$ – корені алгебраїчного рівняння

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\tilde\beta-\beta_k} = -1, \tag{6}$$

$\tilde\lambda_j$ – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde\lambda_j}{\tilde\beta_j-\beta_k} = 1, \qquad j=1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

Для резольвентних інтегральних операторів виконуються теореми [6].

Теорема 1. *Резольвентний оператор* $R^*(\beta,t)$ *вигляду* (1) *є обмеженим у всіх своїх регулярних точках і має місце границя*

$$\left\| R^*(\beta,t)\right\| \underset{t\to\infty}{\to} -\frac{1}{\beta}. \tag{8}$$

Відмітимо, що регулярними є всі точки оператора (1), крім $\beta = 0$. Сингулярність у цій точці можна усунути: оскільки $R^* \to 0$ при $\beta \to 0$, то покладають $R^*(0,t) = 0$.

Теорема 2. *Резольвентний оператор* $R^*(\beta,t)$ *вигляду* (1) *є додатно визначеним при* $\beta < 0$, *від'ємно визначеним при* $\beta > 0$ *і прямує до нуля при* $\beta \to \infty$. *Оператор* $R^*(\beta,t)$ *є монотонно зростаючим відносно свого параметра* β, *тобто для всіх* $\beta_1,\beta_2 : \beta_1 < \beta_2 \Rightarrow \left\|R^*(\beta_1,t)\right\| < \left\|R^*(\beta_2,t)\right\|$.

2. Апроксимація нераціональних функцій від резольвентних операторів ланцюговими дробами. Функції від резольвентних інтегральних операторів розшифровують за допомогою методу операторних ланцюгових дробів [3–5, 15]. Їх апроксимують n-ми підхідними дробами вигляду

$$g[\lambda R^*(\beta)] = F_n = c_0 + \cfrac{c_1\lambda R^*(\beta)}{1 + \cfrac{c_2\lambda R^*(\beta)}{1 + \ddots + c_n\lambda R^*(\beta)}}. \tag{9}$$

Теорема 3 [**4**]. *Нехай*:

1°) $R^*(\lambda,t)$ *– резольвентний інтегральний оператор;*

2°) $c_i > 0,\ i = 0,\ldots,\infty$;

3°) $\lambda > 0$;

4°) E *– простір додатних функцій* g;

5°) *простір* E *є строго нормованим, тобто*

$$\forall\alpha_1,\ \alpha_2 > 0 \Rightarrow \left\|\alpha_1 R^*(\beta) + \alpha_2 R^*(\beta)\right\|_E = \alpha_1\left\|R^*(\beta)\right\|_E + \alpha_2\left\|R^*(\beta)\right\|_E; \tag{10}$$

6°) *оператор* $R^*(\lambda,t)$ *є обмеженим в часі і* $\exists A(\beta): \left\|R^*(\beta,t)\right\| \le A(\beta)$.

Тоді:

i) *послідовність* $\{F_{2k}g\}_{k=0}^{\infty}$ *монотонно зростає і є обмеженою зверху функцією* $[c_0 + c_1\lambda A(\beta)]g$;

ii) *послідовність* $\{F_{2k+1}g\}_{k=0}^{\infty}$ *монотонно спадає і є обмеженою знизу функцією* $c_0 g$.

Наслідок 1 (*теореми* 3). *Послідовності* $\{\|F_{2k}\|g\}_{k=0}^{\infty}$ *та* $\{\|F_{2k+1}\|g\}_{k=0}^{\infty}$ *збігаються, а, значить, збіжною є і послідовність* $\{\|F_n\|g\}_{n=0}^{\infty}$.

Наслідок 2 (*теореми* 3). *Виконується оцінка*

$$F_{2k_1}[\lambda R^*(\beta)] \le F[\lambda R^*(\beta)] \le F_{2k_2+1}[\lambda R^*(\beta)], \qquad k_1,k_2 = 0,\ldots,\infty. \tag{11}$$

Розклад ірраціональної функції має вигляд

$$\sqrt{1+\lambda R^*(\beta)} = 1 + \cfrac{0.5\lambda R^*(\beta)}{1 + \cfrac{0.25\lambda R^*(\beta)}{1 + \cfrac{0.25\lambda R^*(\beta)}{1 + \ddots + 0.25\lambda R^*(\beta)}}}. \tag{12}$$

Для трьох перших апроксимацій маємо

$$\sqrt{1+\lambda R^*(\beta)}^{(1)} = 1 + 0.5\lambda R^*(\beta),$$

$$\sqrt{1+\lambda R^*(\beta)}^{(2)} = 1 + \frac{0.5\lambda R^*(\beta)}{1+0.25\lambda R^*(\beta)} = 1 + 0.5\lambda R^*(\beta - 0.25\lambda)\,,$$

$$\sqrt{1+\lambda R^*(\beta)}^{(3)} = 1 + \frac{0.5\lambda R^*(\beta)}{1+\dfrac{0.25\lambda R^*(\beta)}{1+0.25\lambda R^*(\beta)}} = 1 + \frac{0.5\lambda R^*(\beta)}{1+0.25\lambda R^*(\beta-0.25\lambda)} =$$

$$= 1 + 0.25\lambda R^*(\beta) + 0.25\lambda R^*(\beta - 0.5\lambda)\,. \tag{13}$$

При практичному розв'язанні задач вже апроксимація третім підхідним дробом дає достатньо добрий результат. Раніше точність апроксимацій ірраціональних функцій оцінювали порівнянням результатів апроксимацій n-м і $(n-1)$-м підхідними дробами, оскільки з оцінки (11) бачимо, що точний розв'язок знаходиться між двома сусідніми наближеннями на всьому часовому проміжку. Таким чином, справджується оцінка

$$\|F - F_n\| \le \|F_n - F_{n-1}\|. \tag{14}$$

Нерівність (14) пропонується як спосіб оцінки похибки також в монографії [2].

Доведемо, що права частина нерівності (14) досягає свого максимуму при $t \to \infty$, що дозволить визначати похибку при розв'язанні задач без обчислення двох сусідніх апроксимацій, тобто без виконання подвійної роботи, а відразу обчислювати максимальну похибку, тобто похибку при $t = \infty$, коли оператори переходять в константи, згідно з границею (8).

3. Монотонне зростання різниці між n-м і $(n-1)$-м підхідними операторними дробами у часі при зростанні резольвентного інтегрального оператора у часі.

Теорема 4. *Нехай*:

1°) $R^*(\lambda, t)$ *− резольвентний інтегральний оператор*;

2°) $R^*(\lambda, t)$ *є монотонно зростаючим у часі, тобто*

$$\forall t_1, t_2 : t_1 < t_2 \Rightarrow \left\|R^*(\beta, t_1)\right\| < \left\|R^*(\beta, t_2)\right\|; \tag{15}$$

3°) E *− простір Банаха додатних функцій* g *є строго нормованим, тобто виконується* (10);

4°) *у розкладі* (9) $c_i > 0,\ i = 0, \ldots, \infty$;

5°) $\lambda > 0,\ \beta < 0$.

Тоді для $\forall n,\ n = 1, \ldots, \infty$,

$$\forall t_1, t_2 : t_1 < t_2 \Rightarrow \|F_n(t_1) - F_{n-1}(t_1)\| < \|F_n(t_2) - F_{n-1}(t_2)\|. \tag{16}$$

Д о в е д е н н я. Порівняємо за нормою перший і другий підхідні дроби розкладу (9):

$$\|F_1\| = c_0 + c_1\lambda \left\|R^*(\beta, t)\right\|, \tag{17}$$

і

$$\|F_2\| = c_0 + \frac{c_1\lambda \left\|R^*(\beta, t)\right\|}{1 + c_2\lambda\left\|R^*(\beta, t)\right\|}. \tag{18}$$

Оскільки елемент $c_1\lambda\left\|R^*(\beta, t)\right\|$ співпадає в обох підхідних дробах, його умовно зафіксуємо. При монотонному зростанні $c_2\lambda\left\|R^*(\beta, t)\right\|$ і фіксованому $c_1\lambda\left\|R^*(\beta, t)\right\|$ норма дробу $\dfrac{c_1\lambda\left\|R^*(\beta, t)\right\|}{1 + c_2\lambda\left\|R^*(\beta, t)\right\|}$ монотонно спадає.

Таким чином, різниця $\|F_1\| - \|F_2\|$ монотонно зростає при монотонному зростанні $\left\|R^*(\beta,t)\right\|$.

Тепер порівняємо за нормою другий підхідний дріб (18) і третій підхідний дріб розкладу (9)

$$\|F_3\| = c_0 + \frac{c_1\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|}{1 + \dfrac{c_2\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|}{1 + c_3\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|}}. \tag{19}$$

Елементи $c_1\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|$ і $c_2\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|$ у цих дробах співпадають, тому знову їх умовно зафіксуємо. При монотонному зростанні $c_3\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|$ і фіксованому $c_2\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|$ дріб $\dfrac{c_2\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|}{1 + c_3\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|}$ монотонно спадає. Отже, при фіксованому $c_1\lambda\left\|R^*(\beta,t)\right\|$ дріб (19) монотонно зростає, значить, різниця $\|F_3\| - \|F_2\|$ монотонно зростає.

Оскільки згідно з теоремою 2 оператор $R^*(\beta,t)$ є додатно визначеним при $\beta < 0$ і з умови ***4***° теореми випливає, що підхідні дроби F_n також є додатно визначеними, то

$$\big\|\|F_1\| - \|F_2\|\big\| = \big\|\|F_2\| - \|F_1\|\big\| = \|F_2 - F_1\|,$$

$$\big\|\|F_3\| - \|F_2\|\big\| = \|F_3 - F_2\|. \tag{20}$$

Аналогічно доводимо монотонне зростання різниці $\|F_n - F_{n-1}\|$ для $\forall n = 4,\ldots,\infty$. Теорему доведено. ♦

Наслідок 1 (*теореми* 4). *Максимальне значення різниці підхідних дробів* $\|F_n - F_{n-1}\|$ *досягається при* $t \to \infty$. *Оскільки згідно з теоремою* 1 $\left\|R^*(\beta,t)\right\| \underset{t\to\infty}{\to} -1/\beta$, *то справджується оцінка*

$$\left\|F_n[\lambda R^*(\beta,t)] - F_{n-1}[\lambda R^*(\beta,t)]\right\| < \left\|F_n[\lambda R^*(\beta,\infty)] - F_{n-1}[\lambda R^*(\beta,\infty)]\right\| =$$

$$= \left\|F_n[-\lambda/\beta] - F_{n-1}[-\lambda/\beta]\right\|. \tag{21}$$

Наслідок 2 (*теореми* 4). *Монотонне зростання різниці*

$$\left\|F_n[\lambda R^*(\beta,t)] - F_{n-1}[\lambda R^*(\beta,t)]\right\|$$

є прямо пропорційним монотонному зростанню в часі аргументу розкладу $\lambda R^*(\beta,t)$.

4. Формули обчислення похибки апроксимацій нераціональних операторних функцій ланцюговими дробами. З нерівності (14), а також з теорем 3 і 4 випливає:

$$\left\|F[\lambda R^*(\beta,t)] - F_n[\lambda R^*(\beta,t)]\right\| < \left\|F[\lambda R^*(\beta,\infty)] - F_n[\lambda R^*(\beta,\infty)]\right\| =$$

$$= \left|F[-\lambda/\beta] - F_n[-\lambda/\beta]\right|. \tag{22}$$

Оператор $R^*(\beta,t)$ при $t = \infty$ перетворюється на константу $-1/\beta$ і саме при $t = \infty$ різниця $\|F_n - F\|$ досягає свого максимального значення. Таким чином, похибку методу операторних ланцюгових дробів можемо отримувати порівнянням точного значення нераціональної функції від $-1/\beta$, замість оператора (сучасні комп'ютерні технології дозволяють такі обчислення з великою точністю, похибку заокруглення не беремо до уваги), і значенням підхідного дробу апроксимації, яку вибрали для розв'язання задачі, теж замінюючи оператори на $-1/\beta$.

Наприклад, для апроксимацій (13) похибки апроксимацій мають вигляд

$$r_1 = \left|\sqrt{1-\lambda/\beta} - 1 + 0.5\lambda/\beta\right|,$$

$$r_2 = \left|\sqrt{1-\lambda/\beta} - 1 + 0.5\lambda/(\beta - 0.25\lambda)\right|,$$

$$r_3 = \left|\sqrt{1-\lambda/\beta} - 1 + 0.25\lambda/\beta + 0.25\lambda/(\beta - 0.5\lambda)\right|. \qquad (23)$$

Так само можна оцінювати похибки параметрів задачі в'язкопружності. Якщо результатом розшифрування операторної функції $\sigma\left[R^*(\beta_i, t)\Big|_{i=1}^{n}\right]$ є сума операторів $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j R^*(\beta_j, t)$, то похибку розшифрування всієї функції, що виникає в результаті апроксимації нераціональних підфункцій функції σ, обчислюємо підстановкою замість операторів $R^*(\beta_i, t)$, $R^*(\beta_j, t)$ відповідних сталих $-1/\beta_i$, $-1/\beta_j$:

$$r = \left\|\sigma\left[R^*(\beta_i, t)\Big|_{i=1}^{n}\right] - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j R^*(\beta_j, t)\right\| < \left|\sigma\left[-1/\beta_i\Big|_{i=1}^{n}\right] + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j/\beta_j\right|. \qquad (24)$$

5. Розклад лінійної суми резольвентних операторів в добуток. Для подальшої апроксимації ірраціональної функції від лінійної суми резольвентних операторів виникає потреба розкладу цієї суми в добуток операторів.

Теорема 5. *Нехай* $\lambda_i R^*(\beta_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *– лінійно незалежна послідовність резольвентних операторів, і рівняння* (6) *має* n *незалежних коренів. Тоді має місце розклад*

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R^*(\beta_i) = \prod_{i=1}^{n} [1 + (\beta_i - \beta'_i) R^*(\beta_i)], \qquad (25)$$

де β'_i *– корені рівняння* (6), *і перестановка величин* β'_i, $i = 1, \ldots, n$, *дозволяє записати розклад* (25) $n!$ *різними способами, кожен з яких є точним.*

Д о в е д е н н я. Використовуючи формулу обернення резольвентного оператора (3), подамо рівність (25) у вигляді

$$\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R^*(\beta_i)\right] \prod_{i=1}^{n} [1 - (\beta_i - \beta'_i) R^*(\beta'_i)] = 1. \qquad (26)$$

Перемножуючи дужки у рівності (26) отримуємо

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{\beta'_j - \beta_j}{\beta_j - \beta'_j}\right) R^*(\beta_i) + \sum_{i=1}^{n} (\beta'_i - \beta_i)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\beta'_i - \beta_j}\right) \times$$

$$\times \prod_{k=1, k \neq i}^{n} \left(1 + \frac{\beta'_k - \beta_k}{\beta'_i - \beta'_k}\right) R^*(\beta'_i) = 1. \qquad (27)$$

Оскільки всі коефіцієнти при операторах $R^*(\beta_i)$, $R^*(\beta'_i)$ тотожньо дорівнюють нулеві, рівність (27), а, значить, і рівність (25) є тотожностями. Рівність (27) справджується при довільному порядку величин β'_i, $i = 1, \ldots, n$, перестановка яких дає $n!$ різних розкладів (25).

Теорему доведено. ♦

6. Два способи розшифрування ірраціональних функцій від лінійної суми операторів за допомогою ланцюгових дробів і порівняння похибок апроксимації при їх застосуванні. Можливі два способи розшифрування ірраціональної функції від лінійної суми операторів. При першому способі змінною розкладу є сума операторів:

$$\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R^*(\beta_i)} =$$

$$= 1+\cfrac{0.5\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R^*(\beta_i)}{1+\cfrac{0.25\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R^*(\beta_i)}{1+\cfrac{0.25\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R^*(\beta_i)}{1+\ddots+0.25\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R^*(\beta_i)}}}. \qquad (28)$$

Другий спосіб полягає у тому, що суму операторів спочатку подаємо у вигляді добутку за формулою (25), потім апроксимацію (12) здійснюємо для кожного оператора окремо, а результати апроксимації перемножуємо:

$$\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R^*(\beta_i)} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n}[1+(\beta_i-\beta')_i R^*(\beta_i)]} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[1+\cfrac{0.5(\beta_i-\beta_i')R^*(\beta)}{1+\cfrac{0.25(\beta_i-\beta_i')R^*(\beta)}{1+\cfrac{0.25(\beta_i-\beta_i')R^*(\beta)}{1+\ddots+0.25(\beta_i-\beta_i')R^*(\beta)}}}\right]. \qquad (29)$$

З наслідку 2 теореми 4 випливає, що монотонне зростання в часі різниці $\|F_n - F_{n-1}\|$, а, значить, і різниці $\|F - F_n\|$ прямо пропорційне монотонному зростанні в часі аргументу розкладу в ланцюговий дріб. З умови монотонного зростання в часі оператора $R^*(\beta)$ випливає, що один оператор зростає в часі повільніше, ніж сума операторів. Тому виконується оцінка

$$\left\|F[\lambda R^*(\beta_j,t)] - F_n[\lambda R^*(\beta_j,t)]\right\| \le$$

$$\le \left\|F\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R^*(\beta_i,t)\right] - F_n\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R^*(\beta_i,t)\right]\right\|. \qquad (30)$$

Таким чином, другий спосіб апроксимації демонструє кращу збіжність у часі ніж перший спосіб. Вже при апроксимації третім підхідним дробом апроксимація кожного оператора окремо є і більш простою в обчислювальному плані:

$$\sqrt{\prod_{i=1}^{n}[1+(\beta_i-\beta_i')R^*(\beta_i)]}^{\,(3)} = \prod_{i=1}^{n}[1+0.25(\beta_i-\beta_i')R^*(\beta_i)+$$

$$+0.25(\beta_i-\beta_i')R^*(0.5(\beta_i+\beta_i'))] = 1+0.25\sum_{i=1}^{n}\tilde{\lambda}_i R^*(\beta_i)+$$

$$+0.25\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tilde{\lambda}}_i R^*(0.5(\beta_i+\beta_i')), \qquad (31)$$

де

$$\tilde{\lambda}_i = (\beta_i - \beta'_i) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(1 + 0.25 \frac{\beta_j - \beta'_j}{\beta_i - \beta_j} + 0.25 \frac{\beta_j - \beta'_j}{\beta_i - 0.5\beta_j + 0.5\beta'_j}\right),$$

$$\tilde{\tilde{\lambda}}_i = (\beta_i - \beta'_i) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(1 + 0.25 \frac{\beta_j - \beta'_j}{0.5\beta_i - \beta_j + 0.5\beta'_j} + 0.25 \frac{\beta_j - \beta'_j}{\beta_i - \beta_j - \beta'_i + \beta'_j}\right).$$

7. **Приклад обчислення максимальної похибки.** При побудові розв'язку задачі в'язкопружності для ортотропної пластини [5, 17] виникає потреба в розшифруванні суми та добутку коренів характеристичного рівняння:

$$k^* = \sqrt{\frac{E_1^*}{E_2^*}}, \qquad n^* = \sqrt{2k^* + \frac{E_1^*}{G^*} - 2\nu_1}\,. \tag{32}$$

Оператори E_1^*, E_2^*, G^* визначаються наступним чином [3]:

$$\frac{1}{E_1^*} = \frac{1 + \lambda_1 R^*(\beta_1)}{E_1^0}, \qquad \frac{1}{E_2^*} = \frac{1 + \lambda_2 R^*(\beta_2)}{E_2^0}, \qquad \frac{1}{G^*} = \frac{1 + \lambda_g R^*(\beta_g)}{G^0},$$

де E_1^0, E_2^0, G^0 – миттєві пружні сталі матеріалу; $\lambda_1, \beta_1, \lambda_2, \beta_2, \lambda_g, \beta_g$ – реологічні параметри матеріалу пластини.

Для прикладу розшифруємо корені (32) у третьому наближенні:

$$k^* = k^0 \sqrt{1 - \lambda_1 R^*(\beta_1 - \lambda_1)}\sqrt{1 + \lambda_2 R^*(\beta_2)} = k^0 (1 - 0.25\lambda_1 R^*(\beta_1 - \lambda_1) -$$

$$- 0.25\lambda_1 R^*(\beta_1 - 0.5\lambda_1))(1 + 0.25\lambda_2 R^*(\beta_2) +$$

$$+ 0.25\lambda_2 R^*(\beta_2 - 0.5\lambda_2)) = k^0 \left(1 + \sum_{i=1}^{4} \lambda_{i,1} R^*(\beta_{i,1})\right),$$

де

$$k^0 = \sqrt{\frac{E_1^0}{E_2^0}}, \quad \lambda_{1,1} = -0.25\lambda_1 \left(1 + \frac{0.25\lambda_2}{\beta_1 - \lambda_1 - \beta_2} + \frac{0.25\lambda_2}{\beta_1 - \lambda_1 - \beta_2 + 0.5\lambda_2}\right),$$

$$\lambda_{2,1} = -0.25\lambda_1 \left(1 + \frac{0.25\lambda_2}{\beta_1 - 0.5\lambda_1 - \beta_2} + \frac{0.25\lambda_2}{\beta_1 - 0.5\lambda_1 - \beta_2 + 0.5\lambda_2}\right),$$

$$\lambda_{3,1} = 0.25\lambda_2 \left(1 - \frac{0.25\lambda_1}{\beta_2 - \beta_1 + \lambda_1} - \frac{0.25\lambda_1}{\beta_2 - \beta_1 + 0.5\lambda_1}\right),$$

$$\lambda_{4,1} = 0.25\lambda_2 \left(1 - \frac{0.25\lambda_1}{\beta_2 - 0.5\lambda_2 - \beta_1 + \lambda_1} - \frac{0.25\lambda_1}{\beta_2 - 0.5\lambda_2 - \beta_1 + 0.5\lambda_1}\right),$$

$$\beta_{1,1} = \beta_1 - \lambda_1, \qquad \beta_{2,1} = \beta_1 - 0.5\lambda_1, \qquad \beta_{3,1} = \beta_2, \qquad \beta_{4,1} = \beta_2 - 0.5\lambda_2.$$

Отже, похибка цього розшифрування обчислюється за формулою

$$r_3(k^*) = \left|\sqrt{1 + \lambda_1 \frac{1}{\beta_1 - \lambda_1}}\sqrt{1 - \lambda_2 \frac{1}{\beta_2}} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_{i,1}}{\beta_{i,1}}\right|.$$

Тепер обчислимо у третьому наближенні другий з коренів (32):

$$n^* = \left[2k^0 \left(1 + \sum_{i=1}^{4} \lambda_{i,1} R^*(\beta_{i,1})\right) + E_1^0 (1 - \lambda_1 R^*(\beta_1 - \lambda_1)) \frac{1 + \lambda_g R^*(\beta_g)}{G^0} - 2\nu_1\right] =$$

$$= n^0 \left(1 + \sum_{i=1}^{5} \lambda_{i,2} R^*(\beta_{i,1})\right) =$$

$$= n^0 \sqrt{\prod_{i=1}^{5} (1 + (\beta_{i,2} - \beta_{i,3}) R^*(\beta_{i,2}))} =$$

$$= n^0 \prod_{i=1}^{5} \left(1 + 0.25(\beta_{i,2} - \beta_{i,3}) R^*(\beta_{i,2}) + 0.25(\beta_{i,2} - \beta_{i,3}) \times \right.$$

$$\left. \times R^*(0.5(\beta_{i,2} + \beta_{i,3}))\right) = n^0 \left(1 + 0.25 \sum_{i=1}^{5} \lambda_{i,3} R^*(\beta_{i,2}) + \right.$$

$$\left. + 0.25 \sum_{i=1}^{5} \lambda'_{i,3} R^*(0.5(\beta_{i,2} + \beta_{i,3}))\right),$$

де

$$n^0 = \sqrt{2k^0 + \frac{E_1^0}{G^0} - 2\nu_1}, \qquad \beta_{1,5} = \beta_g,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2k^0}{n^0} \lambda_{1,1} - \frac{E_1^0 \lambda_1}{G^0 n^0 (\beta_1 - \lambda_1 - \beta_g)}, \quad \lambda_{i,2} = \frac{2k^0}{n^0} \lambda_{i,1}, \quad i = 2, 3, 4,$$

$$\lambda_{5,2} = \frac{E_1^0 \lambda_g}{G^0 n^0 (\beta_g + \beta_1 - \lambda_1)},$$

$$\lambda_{i,3} = (\beta_{i,2} - \beta_{i,3}) \prod_{j=1, j\neq i}^{5} \left(1 + 0.25 \frac{\beta_{j,2} - \beta_{j,3}}{\beta_{i,2} - \beta_j} + 0.25 \frac{\beta_{j,2} - \beta_{j,3}}{\beta_{i,2} - 0.5\beta_{j,2} + 0.5\beta_{j,3}}\right),$$

$$\lambda'_{i,3} = (\beta_{i,2} - \beta_{i,3}) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(1 + 0.25 \frac{\beta_{j,2} - \beta_{j,3}}{0.5\beta_{i,2} - \beta_{j,2} + 0.5\beta_{j,3}} + \right.$$

$$\left. + 0.25 \frac{\beta_{j,2} - \beta_{j,3}}{\beta_{i,2} - \beta_{j,2} - \beta_{i,3} + \beta_{j,3}}\right), \quad i = 2, 3, 4,$$

$\beta_{i,3}$ – корені рівняння

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{\lambda_{k,2}}{\beta - \beta_{k,2}} = -1.$$

Похибка розшифрування другого з коренів (32) обчислюється за формулою:

$$r_3(n^*) = \left| \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda_1}{\beta_1 - \lambda_1}} \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\beta_2}} + \left(1 + \frac{\lambda_1}{\beta_1 - \lambda_1}\right)\left(1 - \frac{\lambda_g}{\beta_g}\right) - 2\nu_1 \right)^{1/2} - \right.$$

$$\left. - 0.25 \sum_{i=1}^{5} \frac{\lambda_{i,3}}{\beta_{i,2}} - 0.25 \sum_{i=1}^{5} \frac{\lambda'_{i,3}}{0.5(\beta_{i,2} + \beta_{i,3})} \right|.$$

У табл. 1 наведено результати обчислень похибки розшифрування коренів (32) для матеріалу, в'язкопружні властивості якого описуються інтегральними операторами з ядром Ю. М. Работнова [7]:

$$R(\beta_i, t - \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_i^n (t - \tau)^{n(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)]},$$

реологічні параметри матеріалу (склопластика на основі епоксидного з'єднувача) [4, 5] є такими:

$E_1^0 = 23.0 \cdot 10^3$ Мпа, $\lambda_1 = 0.0323\,\text{с}^{\alpha-1}$, $\beta_1 = -0.1570\,\text{с}^{\alpha-1}$,

$E_2^0 = 16.0 \cdot 10^3$ Мпа, $\lambda_2 = 0.1295\,\text{с}^{\alpha-1}$, $\beta_1 = -0.2745\,\text{с}^{\alpha-1}$,

$G^0 = 3.08 \cdot 10^3$ Мпа, $\lambda_g = 0.0717\,\text{с}^{\alpha-1}$, $\beta_1 = -0.0276\,\text{с}^{\alpha-1}$,

$\nu_1 = \nu_2 = 0.11$, $\alpha = 0.846$.

Таблиця 1

$k^0 = 1.19896$, $k^\infty = 1.32464$		
Номер наближення i	Похибка $r_i(k^*)$	Відносна похибка $\lvert r_i(k^*)/k^\infty \rvert$
1	0.03072	0.02320
2	−0.00210	0.00159
3	0.00024	0.00019
$n^0 = 3.10572$, $n^\infty = 4.97111$		
Номер наближення i	Похибка $r_i(n^*)$	Відносна похибка $\lvert r_i(n^*)/n^\infty \rvert$
1	−0.68147	0.13709
2	0.07642	0.01538
3	−0.03987	0.00803

1. *Громов В. Г.* К вопросу о решении граничных задач линейной вязкоупругости. // Механика полимеров. – 1967. – № 6. – С. 999–1012.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. –Reading, MA.: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p.
3. *Каминский А. А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1990. – 310 с.
4. *Каминский А. А., Кекух С. А.* К методу решения задач линейной теории вязкоупругости для анизотропных материалов (с учетом наличия трещин) // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 4. – С. 82–90.
   Те саме: *Kaminskii A. A., Kekukh S. A.* Method of solving problems of the linear theory of viscoelasticity for anisotropic materials (in the presence of cracks) // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, No. 4. – P. 320–327.
5. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
6. *Подільчук І. Ю.* Про деякі властивості та формули перетворення резольвентних інтегральних операторів в'язкопружності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 1. – С. 71–79.
7. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – Москва: Наука, 1977. – 383 с.
8. *Adolfsson K., Enelund M., Larsson S.* Adaptive discretization of fractional order viscoelasticity using sparse time history // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2004. – **193**. – P. 4567–4590.
9. *Adolfsson K., Enelund M., Olsson P.* On the fractional order model of viscoelasticity // Mech. Time-Dependent Mater. – 2005. – **9**. – P. 15–34.
10. *Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D., Luchko Yu.* Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2005. – **194**. – P. 743–773.
11. *Joseph S. H.* A cooperative model for the mechanical deformation of polymers // J. Polymer Sci.: Polymer Phys. – 1978. – **16**. – P. 1071–1084.
12. *Joseph S. H.* A method for modelling the nonlinear viscoelastic response of polymers // Mech. Time-Dependent Mater. – 2005. – **9**. – P. 35–69.
13. *Kaminskii A. A., Gavrilov G. V.* Delayed fracture of an aging viscoelastic composite under plane strain // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38,** No. 2. – P. 181–187.

Те саме: *Каминский А. А., Гаврилов Г. В.* Длительное разрушение стареющего вязкоупругого композита в условиях плоской деформации // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 2. – С. 72–78.
14. *Kaminskii A. A., Selivanov M. F.* Growth of the penny-chaped crack with a non-small fracture process zone in a composite // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 8. – P. 866–871.
Те саме: *Каминский А. А., Селиванов М. Ф.* О развитие дискообразной трещины с немалой зоной предразрушения в композитном материале // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 45–51.
15. *Kaminskii A. A., Selivanov M. F.* On the application of branched operator continued fractions for the boundary problem of linear viscoelasticity // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No. 1. – P. 115–126.
Те саме: *Каминский А. А., Селиванов М. Ф.* О применении операторных цепных ветвящихся дробей к краевой задаче линейной вязкоупругости // Прикл. механика. – 2006. – **42,** № 1. – С. 133–143.
16. *Koeller R. C.* Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1984. – **51**. – P. 299–307.
17. *Podilchuk I. Yu.* Stress concentration in viscoelastic orthotropic plate with rigid circular inclusion// Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 8. – P. 660–668.
Те саме: *Подильчук И. Ю.* Концентрация напряжений в вязкоупругой ортотропной пластине с жестким круговым включением // Прикл. механика. – 1997. – **33,** № 8. – С. 78–89.
18. *Selivanov M. F., Chernoivan Y. A.* A combined approach of the Laplace transform and Pade approximation solving viscoelasticity problems // Int. J. Solids Struct. – 2007. – **44**. – P. 66–76.
19. *Tremblay R., Fugere B.-J.* The use of fractional derivatives to expand analytical functions in terms of quadratic functions with applications to special functions // Appl. Math. Comput. – 2007. – **187**. – P. 507–529.

О МАКСИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ НЕРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ РЕЗОЛЬВЕНТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

При построении решений задач линейной теории вязкоупругости возникает потребность в расшифровке нерациональных функций от резольвентных интегральных операторов. В этой работе разработан способ вычисления максимальной погрешности с помощью метода операторных цепных дробей, что позволяет оценивать точность построения решений задач вязкоупругости. Приведен численный пример расчета погрешности.

ON MAXIMUM ERROR AT APPROXIMATION OF NON-RATIONAL FUNCTIONS FROM RESOLVENT INTEGRAL OPERATORS BY BRANCHED CONTINUED FRACTIONS

During construction of solutions of linear viscoelasticity problems the necessity of decoding the non-rational functions from resolvent integral operators appears. In this work the technique of calculation the maximum error using the method of operator branched continuous fractions is developed which allows to estimate accuracy of construction of solutions for the viscoelasticity problems. A numerical example of calculation of an error is given.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
16.12.10