

МОДЕЛЮВАННЯ ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ У ҐРУНТАХ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОВИХ І ХІМІЧНИХ ЧИННИКІВ

Розвинуто методика виведення рівняння вологоперенесення в ґрунтах з урахуванням теплових та хімічних чинників. Методика полягає у формулюванні рівняння нерозривності для рідкої фази пористого середовища через похідну за часом від складеної функції. Як наслідок коефіцієнти рівняння вологоперенесення залежать від зміни в часі температури, концентрації хімічних речовин у рідкій і твердій фазах, пористості, а також містять похідні густини порової рідини та пористості як функцій від температури та концентрації хімічних речовин. Проаналізовано залежності характеристик ґрунту (густина, коефіцієнтів вологоперенесення, дифузії ґрунтової вологи, пористості тощо) від врахованих факторів.

Вступ. Дослідження вологоперенесення у пористих середовищах є окремим напрямком у математичному та комп'ютерному моделюванні систем із розподіленими параметрами [2, 8, 13–15]. Складність моделювання явищ і процесів у ґрунтах обумовлюється нелінійною взаємозалежністю параметрів досліджуваних процесів. Наприклад, зміна температури впливає на коефіцієнт фільтрації пористого середовища [4, 16] та концентрацію хімічних речовин у поровій рідині [4]. У роботі [20] (див. також наведену там бібліографію) досліджено залежності коефіцієнта фільтрації ґрунтів від ступеня вилуговування гіпсів (хімічна суфозія). У свою чергу, такі залежності впливають на конвективні складові теплосоперенесення в пористому середовищі. При вологоперенесенні солі розчиняються, внаслідок чого знижуються міцнісні параметри ґрунту. На динаміку цих процесів може впливати температура. Інтенсифікація зсувних процесів значною мірою залежить від ступеня вологонасичення ґрунту [22]. Це далеко не повний перелік прикладів таких взаємовпливів та взаємозалежностей.

Математичне моделювання взаємозв'язаних процесів в гетерогенних пористих середовищах інтенсивно розвивають представники вітчизняних і зарубіжних наукових шкіл з прикладної математики. У роботах [14, 15] досліджено вплив теплоперенесення на динаміку розподілу вологи в ґрунті. У [6] досліджено вплив техногенних факторів на положення межі розподілу насиченого та ненасиченого ґрунту. У роботах [1, 5, 19] досліджено взаємозв'язані процеси хімічної суфозії, тепломасоперенесення та фільтрації в деформованих пористих середовищах. Взаємозв'язані процеси вологоперенесення та міграції забруднюючих речовин розглянуто в [13], фільтрації та тепломасоперенесення – в [24, 29], з урахуванням ефектів осмосу – в [27].

У [17] при виведенні рівняння фільтрації в ґрунтах з метою прогнозування поширення забруднень запропоновано рівняння нерозривності рідкої фази у вигляді (згідно з авторськими позначеннями)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \rho \left(1 - \frac{c}{\delta} \right) \right) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

де ρ – густина порової рідини; σ – пористість; \mathbf{u} – вектор швидкості фільтрації; c – концентрація розчинених солей у поровій воді; δ – густина солей у твердій фазі. Цю ідею М. М. Веригіна розвинуто в роботах [5, 19, 20]. Однак наведений запис рівняння нерозривності має певні недоліки. Фактично припускається, що густина рідкої фази ґрунту лінійно залежить від концентрації хімічних речовин. Але, по-перше, залежність густини порової рідини від розчинених у ній хімічних речовин при високих концентраціях останніх не є лінійною. По-друге, зміна фізико-хімічного складу порової рідини вимагає модифікації рівнянь нерозривності, що створює

певні незручності. У роботах [9, 10] на прикладі рівняння та кінематичної граничної умови в теорії фільтраційної консолідації повністю насичених ґрунтів запропоновано методику усунення вказаних недоліків через використання в рівняннях нерозривності похідної за часом від складеної функції і подальшого застосування відомих залежностей густини та пористості від концентрації хімічних речовин і температури. Метою цієї статті є розвинування запропонованої методики на випадок руху рідини у неповністю насичених ґрунтах з урахуванням впливу теплових та хімічних чинників.

1. Рівняння вологоперенесення. Розглянемо ґрунт зі змінною пористістю $\sigma(\mathbf{X}, t)$, який складається з рідкої і твердої фаз. Тут $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$, t – час. Тверда фаза містить водонерозчинні частинки та частинки водорозчинних солей (різних типів солей є n). Рідка фаза – це n -компонентний хімічний розчин відповідних солей. Зміна пористості обумовлена: 1) зміною концентрації $N_i(\mathbf{X}, t)$, $i = 1, \dots, n$, солей у твердій фазі, ступеня їх розчинення або випадання в осад (хімічна суфозія) [3, 20, 21 (розд. 1, §5)]; 2) зміною температури $T(\mathbf{X}, t)$ пористого середовища (термічне розширення фаз); 3) реологічними властивостями ґрунту [7].

Рівняння вологоперенесення n -компонентного хімічного розчину виведемо на основі рівняння нерозривності рідкої фази ґрунту [13, с. 33]

$$\frac{d(\rho_p \theta)}{dt} + \nabla \cdot (\rho_p \mathbf{q}_p) = 0, \quad (1)$$

де ρ_p – густина порової рідини, яка залежить від концентрацій $c_i(\mathbf{X}, t)$, $i = 1, \dots, n$, хімічних речовин у поровій рідині та температури $T(\mathbf{X}, t)$ пористого середовища; \mathbf{q}_p – вектор швидкості вологоперенесення; $\theta = V_v/V$ – об'ємна вологість; V_v – об'єм порової рідини у виділеному об'ємі V ґрунту. На відміну від робіт [11, 13, 21], у рівнянні (1) використано похідну за часом від складеної функції замість частинної похідної. Тоді

$$\frac{d(\rho_p \theta)}{dt} = \theta \frac{d\rho_p}{dt} + \rho_p \frac{d\theta}{dt} = \theta \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho_p}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \rho_p \frac{d\theta}{dt}. \quad (2)$$

З метою врахування змінної пористості за невідому приймемо функцію насичення (інколи – відносна вологість) пористого середовища [18, с. 198]

$$s(\mathbf{X}, t) = \frac{\theta(\mathbf{X}, t) - \theta_{\min}}{\sigma(\mathbf{X}, t) - \theta_{\min}},$$

де θ_{\min} – залишкова (мінімальна) вологість (відносна кількість рідини в ґрунті після повного осушення).

За наявності градієнта концентрації розчинених хімічних речовин в ґрунті можуть спостерігатись явища хімічного осмосу [4, 18 (§1.1.4), 27] – рух порової рідини під впливом градієнта концентрації солей. Аналогічно за наявності градієнта температури спостерігаються явища термічного осмосу [4, 11]. Припустимо, що досліджуваний ґрунт зазнає впливу нерівномірних теплового поля та хімічних забруднень. На випадок урахування осмотичних явищ [20, §2.1] закон Дарсі – Кюта модифікується до вигляду [14]

$$\mathbf{q}_p = -\mathbf{K}_p \nabla h + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{ci} \nabla c_i + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad (3)$$

де h – напір; $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p(c, T, \theta, \sigma)$ – коефіцієнт (тензор) вологоперенесення, який в загальному випадку залежить від концентрації хімічних речовин $\mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1}^n$, температури, пористості, вологості тощо; \mathbf{K}_{ci} – коефіцієнти (тензори) хімічного осмосу; \mathbf{K}_T – коефіцієнт (тензор) термічного осмосу.

Перейдемо в (3) від функції напорів $h(\mathbf{X}, t)$ до функції $s(\mathbf{X}, t)$. Врахуємо, що [18, с. 197] $h(\mathbf{X}, t) = -\psi(\mathbf{X}, t) + x_3$, де ψ – потенціал ґрунтової вологи. Тут, не зменшуючи загальності, вісь Ox_3 направлено вгору. Тоді

$$-\mathbf{K}_p \nabla h = \mathbf{K}_p \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \nabla \theta - \mathbf{K}_p \nabla x_3 = -\mathbf{D}_p \nabla \theta - \mathbf{K}_p \nabla x_3,$$

де $\mathbf{D}_p = -\mathbf{K}_p \partial \psi / \partial \theta$ – коефіцієнт дифузії ґрунтової вологи, який теж залежить від факторів впливу. Для зменшення громіздкості формул ми явно не вказуємо, що $\mathbf{D}_p = \mathbf{D}_p(\mathbf{c}, T, \theta, \sigma)$, однак тут і в подальшому це мається на увазі. Далі, враховуючи, що $\theta = s(\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min}$, маємо

$$-\mathbf{D}_p \nabla \theta = -\mathbf{D}_p ((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s + s \nabla \sigma).$$

Отже, зі співвідношення (3) випливає

$$\mathbf{q}_p = -\mathbf{D}_p ((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s + s \nabla \sigma) - \mathbf{K}_p \nabla x_3 + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{c_i} \nabla c_i + \mathbf{K}_T \nabla T. \quad (4)$$

Крім того,

$$\frac{d\theta}{dt} = (\sigma - \theta_{\min}) \frac{ds}{dt} + s \frac{d\sigma}{dt}. \quad (5)$$

Тоді з (1) з урахуванням (2), (4), (5) маємо

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho_p}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) (s(\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) + \rho_p (\sigma - \theta_{\min}) \frac{ds}{dt} + \rho_p s \frac{d\sigma}{dt} = \\ & = \nabla \cdot \left(\rho_p \mathbf{D}_p ((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s + s \nabla \sigma) \right) + \\ & + \nabla \cdot \left(\rho_p \left(\mathbf{K}_p \nabla x_3 - \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{c_i} \nabla c_i - \mathbf{K}_T \nabla T \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Для використання рівняння (6) мають бути відомими поля $c_i(\mathbf{X}, t)$, $N_i(\mathbf{X}, t)$, $i = 1, \dots, n$, $T(\mathbf{X}, t)$ і залежності ρ_p , \mathbf{K}_p , σ від фізико-хімічного стану порової рідини та фізико-механічних властивостей пористого середовища.

Враховувати зміну σ у (6) можна двома шляхами. Для реалізації першого мають бути відомими експериментальні або (і) теоретичні залежності пористості від фізико-хімічних та фізико-механічних властивостей пористого середовища. Другий шлях полягає у формулюванні крайової задачі для $\sigma(\mathbf{X}, t)$, наприклад у рамках теорії ненасиченої консолідації [28]. Зосередимось на першому з вказаних шляхів.

Враховуючи залежність пористості від концентрації хімічних речовин і температури, отримаємо

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma}{\partial N_i} \frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla \sigma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma}{\partial N_i} \nabla N_i + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \nabla T. \quad (7)$$

Перша похідна за часом у правій частині першої з рівностей (7) враховує реологічні властивості пористого середовища [7].

2. Рівняння масоперенесення. Для i -ї хімічної компоненти в рідкій фазі з рівняння нерозривності потоку розчинених речовин з урахуванням похідної за часом від складеної функції отримаємо

$$\frac{d(\theta c_i)}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{c_i} + \frac{\partial N_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

де вектор потоку розчинених речовин визначається виразом [16, 18, 21]

$$\mathbf{q}_{ci} = -\mathbf{D}_{ci} \nabla c_i + c_i \mathbf{q}_p, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

\mathbf{D}_{ci} – коефіцієнти (тензори) конвективної дифузії. При цьому хімічну взаємодію між фазами можна виразити в рівняннях кінетики масообмінних процесів $\partial N_i / \partial t = f_i(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)$, $i = 1, \dots, n$. Функції $f_i(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)$ – це відомі характеристики моделі кінетики масообміну [3 (розд. XI, §3), 21 (розд. 1, §5)] (розчинення і кристалізація, нерівноважні адсорбція та десорбція тощо).

Тоді з (8) та (9) отримуємо

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_{ci} \nabla c_i) - \mathbf{q}_p \nabla c_i - c_i \left(\frac{d\theta}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q}_p \right) - \frac{\partial N_i}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

З (1) маємо

$$\rho_p \left(\frac{d\theta}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q}_p \right) = -\theta \frac{d\rho_p}{dt} - \mathbf{q}_p \nabla \rho_p. \quad (11)$$

З урахуванням (11) рівняння (10) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial c_i}{\partial t} = & \nabla \cdot (\mathbf{D}_{ci} \nabla c_i) - \mathbf{q}_p \nabla c_i + \\ & + \frac{c_i}{\rho_p} \left(\theta \frac{d\rho_p}{dt} + \mathbf{q}_p \nabla \rho_p \right) - \frac{\partial N_i}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

При врахуванні впливу на зміну густини порової рідини лише хімічного й теплового чинників рівняння (12) можна модифікувати. Зокрема, якщо

$$\frac{d\rho_p}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla \rho_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \nabla c_j + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T,$$

то (12) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \theta \left(1 - \frac{c_i}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c_i} \right) \frac{\partial c_i}{\partial t} = & \nabla \cdot (\mathbf{D}_{ci} \nabla c_i) - \mathbf{q}_p \left(1 - \frac{c_i}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c_i} \right) \nabla c_i + \\ & + \frac{c_i}{\rho_p} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \left(\theta \frac{\partial c_j}{\partial t} + \mathbf{q}_p \nabla c_j \right) + \\ & + \frac{c_i}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \left(\theta \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q}_p \nabla T \right) - \frac{\partial N_i}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

3. Рівняння теплоперенесення. Рівняння нерозривності для потоку тепла [13 (§2.2), 21 (розд. 1, §8-9)] з урахуванням змінної пористості та вологості, що, в свою чергу, вимагає застосування похідної за часом від складеної функції, має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\rho_p c_p \theta + \rho_m c_m (1 - \sigma) \right) T \right) + \nabla \cdot \mathbf{q}_T = 0, \quad (13)$$

де вектор-функція теплового потоку [11, 16]

$$\mathbf{q}_T = -\lambda \nabla T + \rho_p c_p \mathbf{q}_p T, \quad (14)$$

λ – коефіцієнт (тензор) теплопровідності пористого середовища; c_p , c_m – питомі теплоємності відповідних матеріалів (порової рідини, матеріалу скелета пористого середовища).

Далі, аналогічно до [13, 16, 21], ввівши для зручності функцію об'ємної теплоємності вологого ґрунту $c_T = \rho_p c_p \theta + \rho_m c_m (1 - \sigma)$, отримаємо

$$\frac{d}{dt} (c_T T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{d(\rho_m c_m (1 - \sigma))}{dt} + c_p T \frac{d(\rho_p \theta)}{dt}. \quad (15)$$

У результаті з (13)–(15) маємо

$$\begin{aligned} c_T \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{d(\rho_m c_m (1 - \sigma))}{dt} + c_p T \frac{d(\rho_p \theta)}{dt} = \\ = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - c_p T \nabla \cdot (\rho_p \mathbf{q}_p) - \rho_p c_p \mathbf{q}_p \nabla T. \end{aligned}$$

Враховуючи (1), з вищенаведеної рівності отримуємо

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{d(\rho_m c_m (1 - \sigma))}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{q}_p \nabla T.$$

З урахуванням припущень про склад скелета ґрунту маємо

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_m c_m (1 - \sigma))}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n c_{mi} N_i + \rho_{m0} c_{m0} (1 - \sigma_0) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n c_{mi} \frac{\partial N_i}{\partial t} - \rho_{m0} c_{m0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} + c_{m0} (1 - \sigma_0) \frac{\partial \rho_{m0}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тут σ_0 – пористість скелета пористого середовища із твердих водонерозчинних частинок (у випадку повної відсутності водорозчинних солей); ρ_{mi} , c_{mi} – густина та питома теплоємність i -х елементів, $i = 1, \dots, n$.

4. Математична модель процесу вологоперенесення з урахуванням впливу теплових і хімічних чинників. Припустимо, що процес досліджується в обмеженій області Ω з межею Γ . Тоді згідно з вищенаведеним викладом маємо таку наступну математичну модель:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho_p}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) (s(\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) + \\ + \rho_p (\sigma - \theta_{\min}) \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_p s \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma}{\partial N_i} \frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \\ = \nabla \cdot (\rho_p \mathbf{D}_p ((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s + s \nabla \sigma)) + \\ + \nabla \cdot \left(\rho_p \left(\mathbf{K}_p \nabla x_3 - \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{ci} \nabla c_i - \mathbf{K}_T \nabla T \right) \right), \\ \theta \left(1 - \frac{c_i}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c_i} \right) \frac{\partial c_i}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_{ci} \nabla c_i) - \mathbf{q}_p \left(1 - \frac{c_i}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c_i} \right) \nabla c_i + \\ + \frac{c_i}{\rho_p} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \left(\theta \frac{\partial c_j}{\partial t} + \mathbf{q}_p \nabla c_j \right) + \frac{c_i}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \left(\theta \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q}_p \nabla T \right) - \frac{\partial N_i}{\partial t}, \\ c_T \frac{\partial T}{\partial t} + T \left(\sum_{i=1}^n c_{mi} \frac{\partial N_i}{\partial t} - \rho_{m0} c_{m0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} + c_{m0} (1 - \sigma_0) \frac{\partial \rho_{m0}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \\ = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{q}_p \nabla T, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = f_i(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad t > 0, \quad \theta = s(\sigma - \theta_{\min}) + \theta_{\min},$$

$$\mathbf{q}_p = -\mathbf{D}_p ((\sigma - \theta_{\min}) \nabla s + s \nabla \sigma) - \mathbf{K}_p \nabla x_3 + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{ci} \nabla c_i + \mathbf{K}_T \nabla T,$$

$$\begin{aligned} \ell_1 s(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_{t_0}} &= S_1(\mathbf{X}, t), & \ell_2 c_i(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_{t_0}} &= C_{i1}(\mathbf{X}, t), & i &= 1, \dots, n, \\ \ell_3 T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_{t_0}} &= T_1(\mathbf{X}, t), & (\mathbf{X}, t) &\in \Gamma_{t_0}, \\ s(\mathbf{X}, 0) &= S_0(\mathbf{X}), & N_i(\mathbf{X}, 0) &= N_{0i}(\mathbf{X}), & c_i(\mathbf{X}, 0) &= C_{0i}(\mathbf{X}), & i &= 1, \dots, n, \\ T(\mathbf{X}, 0) &= T_0(\mathbf{X}), & \mathbf{X} &\in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

де ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 – оператори, що задають граничні умови для насиченості, концентрації солей та температури на бічній поверхні Γ_{t_0} циліндра $Q_{t_0} = \Omega \times (0, t_0]$.

Для практичного використання наведеної математичної моделі мають бути відомими $\rho_p(c, T)$, $\mathbf{K}_p(c, T, \theta, \sigma)$, $\sigma(\mathbf{N}, t)$, $\rho_{mi}(T)$, $i = 1, \dots, n$, а також числові значення всіх коефіцієнтів. Огляд залежностей густини порової рідини від концентрації хімічних речовин і температури наведено в [9, 10].

5. Залежності коефіцієнта вологоперенесення та коефіцієнта дифузії ґрунтової вологи від насиченості. Для визначення нелінійних функцій $\mathbf{D}_p(c, T, s, \sigma)$ та $\mathbf{K}_p(c, T, s, \sigma)$ можна використати такі емпіричні залежності (вважаємо, що ґрунт є ізотропним за своїми характеристиками, тому замість тензорів використовуємо скалярні функції):

– Модель Brooks and Corey's model [23] (BC):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p(c, T, s, \sigma) &= K_0(c, T, \sigma) s^{3+2/\lambda}, & \mathbf{D}_p(c, T, s, \sigma) &= D_0(c, T, \sigma) s^{2+1/\lambda}, \\ D_0 &= -\frac{K_0(c, T, \sigma) \psi_b}{\lambda(\sigma - \theta_{\min})}, \end{aligned}$$

де $K_0(c, T, \sigma)$ – коефіцієнт фільтрації, який залежить від концентрації солей, температури та пористості (див. наступний пункт); λ – характеристичний параметр розподілу розміру пор ґрунту; ψ_b – тиск повітря в ґрунті.

– Модель Mualem and van Genuchten's model [23] (MvG):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p(c, T, s, \sigma) &= K_0(c, T, \sigma) \cdot \sqrt{s} \left(1 - (1 - s^{c/\lambda})^{\lambda/c} \right)^2, \\ \mathbf{D}_p(c, T, s, \sigma) &= D_0(c, T, \sigma) s^{-1/\lambda-1/2} \left(1 - (1 - s^{r/\lambda})^{\lambda/r} \right)^2 (1 - s^{r/\lambda})^{1/r-1}, \end{aligned}$$

де r – емпіричний параметр. Дві наведені моделі є часто вживаними, однак існують інші залежності або модифікації цих моделей.

6. Залежність коефіцієнта фільтрації від фізико-механічних та хімічних факторів. Експериментальні дані з впливу хімічного складу порової рідини та її температури на фільтраційні властивості пористого середовища проаналізовано в [4, розд. 2] (див. також наведену там бібліографію). Тут наведемо лише узагальнюючі висновки:

1°) При зростанні температури від 0°C до 90°C коефіцієнт фільтрації чистої води є монотонно зростаючою функцією.

2°) Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей (однокомпонентний хімічний розчин) є немонотонною і досягає максимуму при $c = C_M > 0$. Значення C_M залежить від типів ґрунту та хімічного розчину.

Коефіцієнт фільтрації K_0 значно залежить і від коефіцієнта пористості e ґрунтового середовища [30]. У роботі [26] вказано на можливість використання формули Козені – Кармана $K_0 = k_0 \frac{1 + e_0}{1 + e} \left(\frac{e}{e_0} \right)^3$, де k_0, e_0 – почат-

кові значення коефіцієнта фільтрації та коефіцієнта пористості. Відмітимо, що коефіцієнт пористості e та пористість σ – це, взагалі кажучи, різні, але взаємозв'язані характеристики пористого середовища. Зважаючи на відому з механіки ґрунтів формулу [12, с. 30] $e = \sigma / (1 - \sigma)$, отримаємо залежність коефіцієнта фільтрації від пористості σ .

У [4] для апроксимації загальної залежності коефіцієнта фільтрації від факторів впливу $K_0 = K_0(s_1, s_2, \dots, s_\ell)$ в ℓ -вимірному просторі використовувався метод радіальних базисних функцій [25]. Цей метод, окрім апроксимації функцій, забезпечує апроксимацію їхніх похідних із належною точністю, що є важливим для наведеної математичної моделі.

7. Залежність пористості ґрунту від концентрації солей в твердій фазі та температури. Виділимо елементарний фрагмент ґрунту об'ємом V . Пористість у виділеному фрагменті визначається як [12, с. 30] $\sigma = 1 - \sigma_m = 1 - V_m/V$, де σ_m , V_m – відносний вміст та об'єм твердих частинок у V .

Далі $V_m = V_{m0} + \sum_{i=1}^n V_{mi}$, де V_{m0} – об'єм твердих водонерозчинних частинок; V_{mi} – об'єм твердих водорозчинних частинок у виділеному об'ємі V , де i відповідає номеру частинок певних солей, $i = 1, \dots, n$. Тоді

$$\sigma = 1 - \frac{1}{V} \left(V_{m0} + \sum_{i=1}^n V_{mi} \right) = 1 - \frac{V_{m0}}{V} - \sum_{i=1}^n \frac{V_{mi}}{V}. \quad (17)$$

За означенням концентрації солей у твердій фазі $N_i = m_i/V = \rho_{mi} V_{mi}/V$, де m_i , ρ_{mi} – маса та густина водорозчинних солей у виділеному об'ємі V , $i = 1, \dots, n$. Враховуючи, що $\sigma_0 = 1 - V_{m0}/V$, з (17) отримаємо

$$\sigma = \sigma_0 - \sum_{i=1}^n \frac{V N_i}{V \rho_{mi}} = \sigma_0 - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_{mi}}.$$

Тоді $\frac{\partial \sigma}{\partial N_i} = -\frac{1}{\rho_{mi}}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial T} + \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_{mi}^2} \frac{\partial \rho_{mi}}{\partial T}$. Ввівши характеристику пористого середовища N_{m0} – концентрацію твердих нерозчинних частинок, які

формують скелет пористого середовища, отримаємо $\frac{\partial \sigma_0}{\partial T} = -\frac{N_{m0}}{\rho_{m0}^2} \frac{\partial \rho_{m0}}{\partial T}$.

Отже, визначення вказаних величин зводиться до обчислення залежностей густин твердих частинок пористого середовища від температури. Такі ж похідні входять у (16). У роботах [9, 10] показано, що $\frac{\partial \rho_{mi}}{\partial T} = -\alpha_{mi} \rho_{mi}$, $i = 1, \dots, n$, де α_{mi} , $i = 1, \dots, n$, – коефіцієнти об'ємного термічного розширення відповідних твердих частинок ґрунту.

Висновки та напрямки подальших досліджень. У статті розвинуто методику виведення рівнянь для математичного опису взаємозв'язаних процесів у ґрунтах. Як приклад розглянуто взаємозв'язані процеси вологоперенесення та теплосолеперенесення. Сформульовано відповідну математичну модель. Надалі передбачається чисельне дослідження відповідних нелінійних крайових задач, якими описується побудована математична модель, та дослідження якісних характеристик їх наближених розв'язків. Також доцільним є вивчення ступеня впливу того чи іншого врахованого фактору на досліджувані процеси і встановлення умов, при яких цими факторами доцільно або недоцільно знехтувати.

1. Булавацький В. М., Кривонос Ю. Г. Математическое моделирование динамики аномальных миграционных полей в рамках модели распределенного порядка // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – **49**, № 3. – С. 74–81.
Te same: *Bulavatsky V. M., Krivonos Yu. G. Mathematical modeling of the dynamics of anomalous migration fields within the framework of the model of distributed order // Cybern. Syst. Anal. – 2013. – 49, No. 3. – P. 390–396.*
2. Вабищевич П. Н., Данияров А. О. Математическое моделирование промачивания зоны аэрации в условиях близкого залегания грунтовых вод // Мат. моделирование. – 1994. – **6**, № 11. – С. 11–24.
3. Веригин Н. Н., Васильев С. В., Саркисян В. С., Шержуков Б. С. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. – Москва: Недра, 1977. – 271 с.
4. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2010. – 277 с.
5. Власюк А. П., Мартинюк П. М., Фурсович О. Р. Числове розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засоленних ґрунтів в неізотермічному режимі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 1. – С. 197–204.
Te same: *Vlasyuk A. P., Martynyuk P. M., Fursovych O. R. Numerical solution of a one-dimensional problem of filtration consolidation of saline soils in a nonisothermal regime // J. Math. Sci. – 2009. – 160, No. 4. – P. 525–535.*
6. Власюк А. П., Цветкова Т. П. Математическое моделирование солепереноса при фильтрации и влагопереносе в насыщенно-ненасыщенных грунтах в увлажняющем режиме // Инж.-физ. журн. – 2015. – **88**, № 5. – С. 1031–1042.
Te same: *Vlasyuk A. P., Tsvetkova T. P. Mathematical simulation of the transport of salt in the case of filtration and moisture transfer in saturated-unsaturated soils in a moistening regime // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2015. – 88, No. 5. – P. 1062–1073.*
7. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов. – Москва: Высш. шк., 1978. – 447 с.
8. Гайвась Б., Чапля Є., Чанаев Д. Конвективно-теплове сушіння шару зерна // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2015. – Вип. 21. – С. 39–51.
9. Герус В. А., Мартинюк П. М. Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів // Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. Мат. моделювання. Інформ. технології. Автоматизовані системи управління. – 2015. – №1156, вип. 27. – С. 41–52.
10. Герус В., Мартинюк П., Мічута О. Загальна кінематична гранична умова в теорії фільтраційної консолідації ґрунтів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2015. – Вип. 22. – С. 23–30.
11. Глобус А. М. Физика неізотермического внутрипочвенного влагообмена. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1983. – 278 с.
12. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов. – Москва: Высш. шк., 1991. – 447 с.
13. Кундас С. П., Гишкелюк И. А., Коваленко В. И., Хилько О. С. Компьютерное моделирование миграции загрязняющих веществ в природных дисперсных средах. – Минск: МГЭУ им. А. Д. Сахарова, 2011. – 212 с.
14. Кутя Т. В. Математичне моделювання змочування ґрунту на схилі в умовах багатокомпонентного неізотермічного солеперенесення // Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. Мат. моделювання. Інформ. технології. Автоматизовані системи управління. – 2014. – № 1105, вип. 24. – С. 99–110.
15. Кутя Т., Мартинюк П. Математичне моделювання зволоження ґрунту на схилі внаслідок аварії безнапірного трубопроводу з урахуванням процесів теплосолеперенесення // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 107–116.
16. Ляшко И. И., Демченко Л. И., Мистецкий Г. Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 264 с.
17. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод / под ред. Н. Н. Веригина. – Москва: Колос, 1979. – 336 с.
18. Мироненко В. А., Румынин В. Г. Проблемы гидрогеоэкологии: В 3-х т. – Т. 1. Теоретическое изучение и моделирование геомиграционных процессов. – Москва: Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 1998. – 611 с.
19. Мичута О. Р., Власюк А. П., Мартинюк П. Н. Моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неізотермических условиях // Мат. моделирование. – 2013. – **25**, № 2. – С. 3–18.

20. Мічута О. Р., Мартинюк П. М., Герус В. А. Математичне моделювання процесів хімічної та контактної суфозій в ґрунтах. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2016. – 207 с.
21. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
22. Соколовська В. А. Фактори розвитку небезпечних інженерно-геологічних процесів в межах забудованих територій міст України // Містобудування та терит. планув. – 2004. – Вип. 19. – С. 226–231.
23. Abbaspour H., Shorafa M., Daneshfaraz R., Mohammadi M. H., Rashtbari M. Study and comparison the efficiency of Mualem-Van Genuchten and Brooks-Corey models in predicting unsaturated hydraulic conductivity in compacted soils // J. Civil Eng. Urban. – 2012. – 2, No. 2. – P. 56–62.
24. Bolduc F. L., Aubertin M. Numerical investigation of the influence of waste rock inclusions on tailings consolidation // Can. Geotech. J. – 2014. – 51, No. 9. – P. 1021–1032.
25. Buhmann M. D. Radial basis functions: theory and implementations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. – 272 p.
26. Francisca F. M., Glatstein D. A. Long term hydraulic conductivity of compacted soils permeated with landfill leachate // Appl. Clay Sci. – 2010. – 49, No. 3 – P. 187–193.
27. Garavito Rojas A. M. F. Chemical osmosis in clayey sediments: field experiments and numerical modelling: PhD thesis. – Amsterdam: Vrije Universiteit, 2006. – 140 p.
28. Ho L., Fatahi B., Khabbaz H. A closed form analytical solution for two-dimensional plane strain consolidation of unsaturated soil stratum // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2015. – 39, No. 15. – P. 1665–1692.
29. Jacques D., Šimůnek J., Mallants D., van Genuchten M. Th. Modeling coupled water flow, solute transport and geochemical reactions affecting heavy metal migration in a podzol soil // Geoderma. – 2008. – 145, No. 3–4. – P. 449–461.
30. Niwas S., Celik M. Equation estimation of porosity and hydraulic conductivity of Ruhrtal aquifer in Germany using near surface geophysics // J. Appl. Geophys. – 2012. – 84. – P. 77–85.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛАГОПЕРЕНОСА В ГРУНТАХ С УЧЁТОМ ТЕПЛОВЫХ И ХИМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

Развита методика вывода уравнения влагопереноса в грунтах с учетом тепловых и химических факторов. Методика заключается в формулировке уравнений неразрывности для жидкой фазы пористой среды через производную по времени от сложной функции. Вследствие этого коэффициенты уравнения влагопереноса зависят от изменения во времени температуры, концентрации химических веществ в жидкой и твердой фазах, пористости, а также включают производные плотности поровой жидкости и пористости как функций температуры и концентрации химических веществ. Проанализированы зависимости характеристик грунта (плотность, коэффициенты влагопереноса, диффузии грунтовой влаги, пористости и т. д.) от учтённых факторов.

MODELING THE MOISTURE-TRANSFER IN SOILS UNDER THERMAL AND CHEMICAL INFLUENCE

A technique for the derivation of a moisture-transfer equation in soils subjected to both thermal and chemical influences is developed. This technique is based on the formulation of the continuity equation for the liquid phase of a porous medium using the time derivative of a composite function. As a result, the coefficients of the moisture-transfer equation depend on the time variations of the temperature, chemicals concentration in both liquid and solid phases, porosity and also contain the derivatives of pore fluid density and porosity as functions of the temperature and chemicals concentration. The dependences of the soil phase parameters (density, moisture transfer coefficient, diffusion coefficient of soil moisture, porosity etc.) of the considered factors are analyzed.

Нац. ун-т водн. госп-ва
та природокористування, Рівне

Одержано
09.12.16